

Δρ. Σταύρος Π. Καρατζίκος

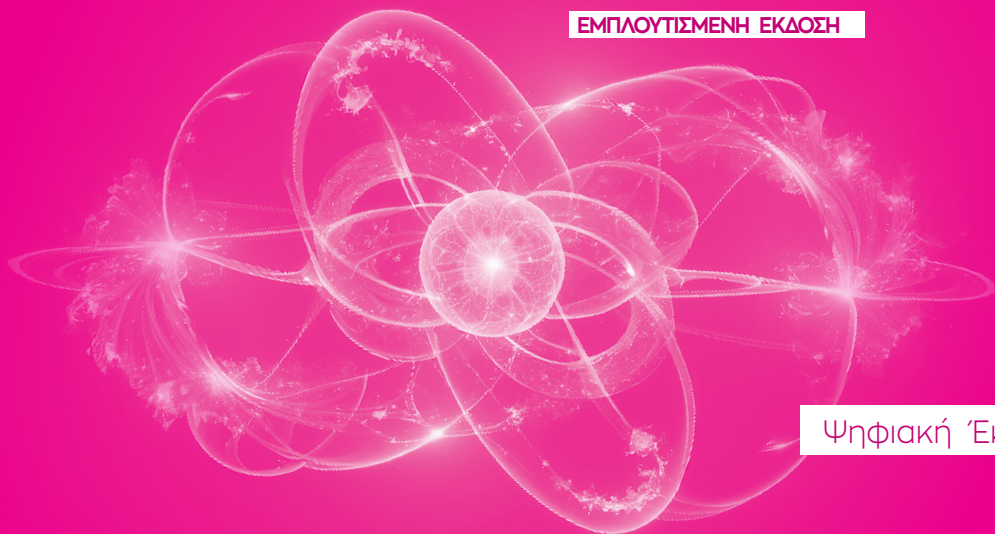
Κώστας Παρασύρης

Φυσική

Μέθοδοι Εμβάθυνσης
και Επανάληψης

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΥΓΕΙΑΣ

ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΕΝΗ ΕΚΔΟΣΗ



Ψηφιακή Έκδοση



εκδόσεις

ΠΟΥΚΑΜΙΑΣ

Περιεχόμενα

Μέρος Α

Μαθαίνοντας τη Θεωρία	4
-----------------------	---

Μέρος Β

Αναλυτικές Λύσεις	78
-------------------	----

Παροράματα	428
------------	-----



Μαθαίνοντας τη ΘΕΩΡΙΑ

ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Θ1.1) Τι ονομάζουμε κρούση;

Κρούση ονομάζουμε το φαινόμενο κατά το οποίο δύο (ή περισσότερα) σώματα έρχονται σε επαφή για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα, αλληλοεπιδρώντας με πολύ ισχυρές δυνάμεις, με αποτέλεσμα η κινητική τους κατάσταση να μεταβάλλεται απότομα.

Θ1.2) Τι ονομάζουμε σκέδαση;

Η έννοια της κρούσης μπορεί να επεκταθεί και στον μικρόκοσμο όπου τα συγκρουόμενα σώματα δεν έρχονται υποχρεωτικά σε επαφή. Για παράδειγμα, όταν ένα σωματίδιο α (πυρήνας He) κινείται προς έναν αρχικά ακίνητο πυρήνα οι αρχικά ασθενείς αλληλεπιδράσεις τους όταν βρίσκονται πολύ μακριά γίνονται πολύ ισχυρές όταν πλησιάσουν σε μικρή απόσταση, με αποτέλεσμα την απότομη μεταβολή της κινητικής τους κατάστασης. Η χρονική διάρκεια της μεταβολής της κινητικής τους κατάστασης είναι πολύ μικρή. Το φαινόμενο αυτό στη σύγχρονη φυσική ονομάζεται και σκέδαση.

Θ1.3) Πώς διακρίνονται οι κρούσεις με κριτήριο τις διευθύνσεις των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται, πριν την κρούση τους;

Ανάλογα με τη διεύθυνση της κίνησης των σωμάτων πριν συγκρουστούν, οι κρούσεις διακρίνονται σε κεντρικές, έκκεντρες και πλάγιες.

Κεντρική (ή μετωπική) ονομάζεται η κρούση κατά την οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

Εάν τα σώματα που συγκρούονται είναι σφαίρες και η κρούση τους είναι κεντρική, οι ταχύτητές τους μετά την κρούση θα βρίσκονται και πάλι στην ίδια αρχική διεύθυνση.

Έκκεντρη, ονομάζεται η κρούση κατά την οποία οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται είναι παράλληλες.

Πλάγια ονομάζεται η κρούση κατά την οποία οι ταχύτητες των σωμάτων που συγκρούονται βρίσκονται σε τυχαίες διευθύνσεις.

Θ1.4) Η αρχή διατήρησης της ορμής μπορεί να εφαρμοστεί σε μια κρούση;

Η κρούση είναι ένα φαινόμενο που διαρκεί ελάχιστο χρόνο και οι ωθήσεις των εξωτερικών δυνάμεων (αν αυτές υπάρχουν) είναι αμελητέες κατά τη διάρκεια της κρούσης. Επομένως, το σύστημα των σωμάτων που συγκρούονται μπορεί να θεωρηθεί μονωμένο, για τη χρονική διάρκεια της κρούσης και άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται. Καταλήγουμε, συνεπώς, στο συμπέρασμα ότι η ορμή ενός συστήματος σωμάτων, κατά τη διάρκεια της κρούσης, διατηρείται. Αν $\vec{p}_{\text{πριν}}$ είναι η ορμή του συστήματος των σωμάτων αμέσως πριν την κρούση και $\vec{p}_{\text{μετά}}$ η ορμή του συστήματος αμέσως μετά, τότε ισχύει:

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}}$$

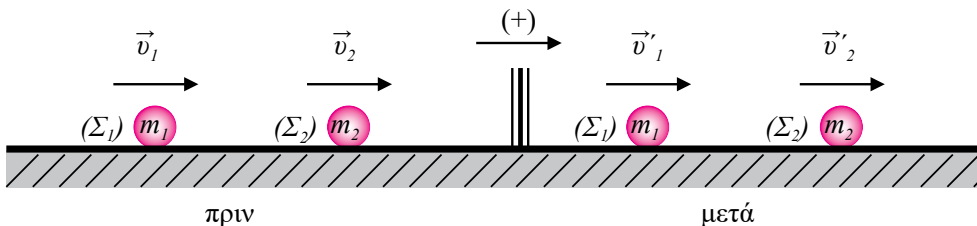
Θ1.5) Πώς διακρίνονται οι κρούσεις με κριτήριο τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων που συγκρούονται; Τι γνωρίζετε για κάθε μία από αυτές;

Με κριτήριο τη διατήρηση ή όχι της κινητικής ενέργειας οι κρούσεις διακρίνονται σε ελαστικές και ανελαστικές.

Όταν συγκρούονται δύο σώματα ένα μέρος της μηχανικής τους ενέργειας μετατρέπεται σε θερμότητα. Στην ιδανική περίπτωση που κατά τη διάρκεια της κρούσης δεν μεταβάλλεται η μηχανική ενέργεια των σωμάτων, η κρούση ονομάζεται ελαστική. Επειδή η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα η δυναμική ενέργεια των σωμάτων που εξαρτάται από τη θέση τους στο χώρο-δε μεταβάλλεται. Επομένως, ελαστική ονομάζεται η κρούση στην οποία διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος των συγκρουόμενων σωμάτων. Η ελαστική κρούση στον μακρόκοσμο αποτελεί μια εξιδανίκευση. Η κρούση ανάμεσα σε δύο πολύ σκληρά σώματα (π.χ μπάλες μπυλιάρδου) μπορεί να θεωρηθεί προσεγγιστικά ελαστική. Στον μικρόκοσμο μπορεί να έχουμε όμως απόλυτα ελαστικές κρούσεις. Ανελαστική, ονομάζεται η κρούση στην οποία ένα μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας των σωμάτων μετατρέπεται σε θερμότητα. Ειδική περίπτωση της ανελαστικής κρούσης είναι εκείνη που οδηγεί στη συγκόλληση των σωμάτων(δηλαδή στη δημιουργία συσσωματώματος). Η κρούση αυτή ονομάζεται πλαστική.

Θ1.6) Δύο σφαίρες Σ_1 και Σ_2 συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Ποιοι είναι οι τύποι υπολογισμού των αλγεβρικών τιμών των ταχυτήτων που αποκτούν οι δύο σφαίρες μετά την κεντρική και ελαστική κρούση τους;

Δύο σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και m_2 κινούνται με ταχύτητες $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Οι σφαίρες μετά την κεντρική και ελαστική τους κρούση αποκτούν ταχύτητες v'_1 και v'_2 . Από την αρχή διατήρησης της ορμής (Α.Δ.Ο.) για το σύστημα των δύο σφαιρών προκύπτει:

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (1)$$

όπου v_1, v_2 είναι οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σφαιρών πριν την κρούση και v'_1, v'_2 είναι οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σφαιρών μετά την κρούση.

Η σχέση (1) μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$m_1 (v_1 - v'_1) = m_2 (v'_2 - v_2) \quad (2)$$

Η κρούση είναι ελαστική, επομένως από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας προκύπτει:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Rightarrow m_1 v_1^2 - m_1 v_1'^2 = m_2 v_2'^2 - m_2 v_2^2$$

$$\Rightarrow m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2 (v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \quad (3)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (2),(3) προκύπτει:

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \quad (4)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1), (4) ως προς τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων τους v_1', v_2' προκύπτουν οι σχέσεις:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad v_2' = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Θ1.7) Πως διαμορφώνονται οι τύποι της προηγούμενης ερώτησης Θ 1.6 στις περιπτώσεις που:

- α) οι δύο σφαίρες έχουν ίσες μάζες,**
β) η σφαίρα Σ_2 είναι αρχικά ακίνητη.

α) Στην περίπτωση που οι δύο σφαίρες έχουν ίσες μάζες ($m_1 = m_2$) τότε από τις σχέσεις:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad v_2' = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Προκύπτει:

$$v_1' = v_2 \quad \text{και} \quad v_2' = v_1$$

Δηλαδή οι σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες.

β) Στην περίπτωση που η σφαίρα Σ_2 ήταν αρχικά ακίνητη πριν την κρούση ($v_2 = 0$), τότε οι σχέσεις:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad v_2' = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Παίρνουν τη μορφή:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2}, \quad v_2' = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Θ1.8) Τι γνωρίζετε για την κεντρική ελαστική κρούση ενός σώματος με άλλο ακίνητο πολύ μεγάλης μάζας;

Έστω ότι μια σφαίρα Σ_1 κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_1$ και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με μία ακίνητη σφαίρα Σ_2 .

Στην περίπτωση που η σφαίρα Σ_2 έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα από τη Σ_1 , από τις σχέσεις:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2}, \quad v_2' = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

προκύπτει:

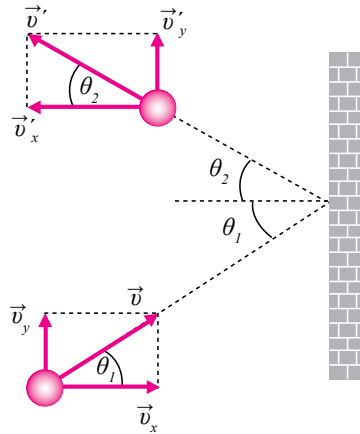
$$v_1' = -v_1 \quad \text{και} \quad v_2' = 0$$

Δηλαδή η σφαίρα Σ_1 ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς από αυτήν που είχε πριν την κρούση ενώ η σφαίρα Σ_2 παραμένει πρακτικά ακίνητη.

Θ1.9) Τι γνωρίζετε για την ελαστική κρούση μιας σφαίρας με ακλόνητο τοίχο όταν η σφαίρα προσκρούει κάθετα σ' αυτόν; Τι ισχύει όταν προσκρούει ελαστικά και πλάγια;

Όταν μια σφαίρα με μικρή μάζα προσκρούει ελαστικά και κάθετα στην επιφάνεια ενός τοίχου, τότε ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς.

Στην περίπτωση που μια σφαίρα προσκρούει ελαστικά και πλάγια σε έναν κατακόρυφο τοίχο αναλύουμε την ταχύτητά της σε δύο συνιστώσες, τη μία $\vec{v}_x$ κάθετη στον τοίχο και την άλλη $\vec{v}_y$ παράλληλη με αυτόν, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σύμφωνα με τα παραπάνω η κάθετη στον τοίχο συνιστώσα της ταχύτητας θα αλλάξει φορά, θα έχει όμως το ίδιο μέτρο. Δηλαδή θα ισχύει:

$$v'_x = -v_x$$

Η δύναμη που δέχεται η σφαίρα κατά την κρούση είναι κάθετη στον τοίχο, επομένως η παράλληλη στον τοίχο συνιστώσα δεν μεταβάλλεται. Προκύπτει:

$$v'_y = v_y$$

Το μέτρο της ταχύτητας μετά την κρούση είναι:

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} \Rightarrow v' = \sqrt{v^2_x + v^2_y} \Rightarrow v' = v$$

Προκύπτει επομένως ότι το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας δεν μεταβάλλεται.

Αν θ_1 είναι η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα $\vec{v}$ της σφαίρας πριν την κρούση με την κάθετη στον τοίχο και θ_2 είναι η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα $\vec{v}'$ της σφαίρας μετά την κρούση με την κάθετη στον τοίχο, προκύπτει:

$$\eta\mu\theta_1 = \frac{v_y}{v} \text{ και } \eta\mu\theta_2 = \frac{v_y}{v'}$$

Ισχύει όμως: $v'_y = v_y$ και $v' = v$

Οπότε: $\eta\mu\theta_1 = \eta\mu\theta_2$

και:

$$\theta_1 = \theta_2$$

Καταλήγουμε επομένως στο συμπέρασμα ότι η γωνία πρόσπτωσης θ_1 είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης θ_2 .

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ

Θ2.1) Ποια σώματα ονομάζονται υλικά σημεία και ποια μηχανικά στερεά;

Υλικό σημείο ονομάζεται το σώμα που έχει όλες τις άλλες τις άλλες ιδιότητες της ύλης εκτός από διαστάσεις. Ένα υλικό σημείο, μη έχοντας διαστάσεις, έχει τη δυνατότητα να εκτελεί μόνο μεταφορικές κινήσεις. Στην πραγματικότητα όλα τα σώματα έχουν διαστάσεις και γι' αυτό εκτός από το να εκτελούν μεταφορική κίνηση, μπορούν να αλλάζουν προσανατολισμό στον χώρο, δηλαδή να εκτελούν περιστροφική(στροφική) ή, ακόμη, σύνθετη κίνηση, δηλαδή συνδυασμό μεταφορικής και στροφικής κίνησης. Αν σε κάποιο στερεό σώμα ασκηθούν δυνάμεις το σώμα παραμορφώνεται, λίγο ή πολύ και μόνιμα ή προσωρινά. Τα υποθετικά στερεά που δεν παραμορφώνονται όταν τους ασκούνται δυνάμεις λέγονται μηχανικά στερεά.

Θ2.2) Τι γνωρίζετε για τη μεταφορική, τη στροφική και τη σύνθετη κίνηση ενός στερεού σώματος;

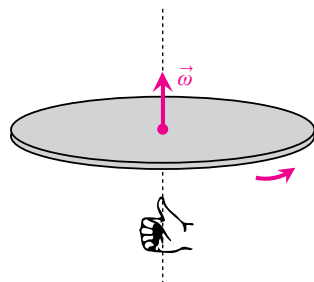
Ένα στερεό σώμα μπορεί να κάνει μεταφορική, στροφική και σύνθετη κίνηση. Στη μεταφορική κίνηση, κάθε στιγμή, όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα. Στη μεταφορική κίνηση των στερεών ισχύουν οι νόμοι που διέπουν την κίνηση των υλικών σημείων. Όταν ένα στερεό εκτελεί μεταφορική κίνηση, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο τυχαία σημεία του μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του. Στη στροφική κίνηση το σώμα αλλάζει προσανατολισμό. Στην κίνηση αυτή υπάρχει μια ευθεία-ο άξονας περιστροφής-που όλα της τα σημεία παραμένουν ακίνητα ενώ τα υπόλοιπα σημεία του σώματος εκτελούν κυκλική κίνηση. Όταν ένα σώμα μετακινείται στον χώρο και ταυτόχρονα αλλάζει ο προσανατολισμός του λέμε ότι κάνει σύνθετη κίνηση. Για παράδειγμα, τέτοια κίνηση εκτελεί ο τροχός ενός αυτοκινήτου, όταν κινείται το αυτοκίνητο. Όπως συμβαίνει και με το υπόλοιπο αυτοκίνητο, ο τροχός αλλάζει θέση στον χώρο(μεταφορική κίνηση) και ταυτόχρονα περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του. Η σύνθετη κίνηση μπορεί να μελετηθεί ως επαλληλία μιας μεταφορικής και μιας στροφικής κίνησης.

Θ2.3) Πώς ορίζεται η γωνιακή ταχύτητα ενός στερεού σώματος που εκτελεί στροφική κίνηση; Ποια η μονάδα μέτρησης στο S.I.; Ποια είναι η διεύθυνση της; Πώς προσδιορίζεται η φορά της; Πότε λέμε ότι το στερεό εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση;

Κατάλληλο μέγεθος για να περιγράψει το πόσο γρήγορα περιστρέφεται ένα σώμα κάποια στιγμή, είναι η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$.

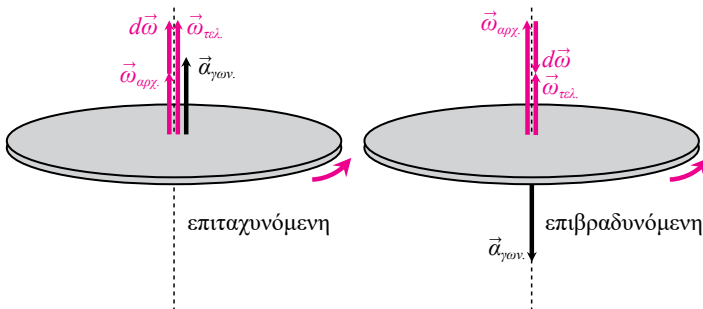
Η γωνιακή ταχύτητα ορίζεται ως το πηλίκο της γωνίας στροφής που διαγράφει ένα στερεό σε κάποιο χρονικό διάστημα, προς το χρονικό αυτό διάστημα.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$



Μονάδα μέτρησης της γωνιακής ταχύτητας στο S.I. είναι το 1 rad/s. Η γωνιακή ταχύτητα είναι μέγεθος διανυσματικό και έχει διεύθυνση πάνω στον άξονα περιστροφής του σώματος και φορά που προσδιορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Εάν η γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος που περιστρέφεται είναι σταθερή, τότε θα λέμε ότι κάνει ομαλή στροφική κίνηση.

Θ2.4) Πώς ορίζεται η γωνιακή επιτάχυνση ενός στερεού σώματος που εκτελεί στροφική κίνηση; Ποια η μονάδα μέτρησης στο S.I.; Ποια είναι η κατεύθυνσή της;



Η γωνιακή επιτάχυνση ορίζεται ως το πηλίκο της μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας ενός στερεού σε κάποιο χρονικό διάστημα, προς το χρονικό αυτό διάστημα. Εναλλακτικά, ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας, ονομάζεται γωνιακή επιτάχυνση.

$$\alpha_{\text{γων.}} = \frac{d\omega}{dt}$$

Μονάδα μέτρησης της γωνιακής ταχύτητας στο S.I. είναι το 1 rad/s².

Η γωνιακή επιτάχυνση είναι μέγεθος διανυσματικό και έχει την ίδια κατεύθυνση με αυτήν της μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας. Στην επιταχυνόμενη στροφική η γωνιακή επιτάχυνση έχει την ίδια κατεύθυνση με αυτήν της γωνιακής ταχύτητας ενώ στην επιβραδυνόμενη στροφική έχει την αντίθετη κατεύθυνση από αυτήν της γωνιακής ταχύτητας.

Θ2.5) Πώς ορίζεται το κέντρο μάζας ενός στερεού σώματος;

Μια έννοια που απλοποιεί τη μελέτη του στερεού σώματος είναι η έννοια του κέντρου μάζας του σώματος.

Κέντρο μάζας (cm) ενός στερεού σώματος ονομάζεται το σημείο εκείνο που κινείται όπως ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με τη μάζα του σώματος, αν σε αυτό ασκούσαν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. Το κέντρο μάζας ομογενών και συμμετρικών σωμάτων συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας τους. Το κέντρο μάζας ενός σώματος μπορεί να βρίσκεται και έξω από το σώμα. Τέτοια είναι η περίπτωση ισοπαχούς και ομογενούς δακτυλίου, το κέντρο μάζας του οποίου βρίσκεται στο κέντρο του. Αν ένα σώμα βρίσκεται μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας το κέντρο μάζας του συμπίπτει με το κέντρο βάρους, το σημείο δηλαδή από το οποίο περνάει πάντα το βάρος του σώματος, όπως και να τοποθετηθεί.

Θ2.6) Ποια είναι η σχέση που συνδέει την ταχύτητα του κέντρου μάζας ενός τροχού που κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, με τη γωνιακή του ταχύτητα; Με ποιον τύπο συνδέεται η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του με τη γωνιακή του επιτάχυνση κατά την κύλιση χωρίς ολίσθηση;

Ο τροχός του διπλανού σχήματος έχει ακτίνα R , κινείται σε οριζόντιο επίπεδο και σε χρόνο dt το κέντρο μάζας του έχει μετατοπιστεί κατά dx . Στο ίδιο χρονικό διάστημα το σημείο επαφής A του τροχού με το οριζόντιο έδαφος, έχει στραφεί κατά τόξο dS στο οποίο αντιστοιχεί επίκεντρη γωνία $d\theta$, όσο είναι και η γωνία στροφής του ίδιου του τροχού.

Όταν ο τροχός κυλιέται χωρίς ταυτόχρονα να ολισθαίνει, θα πρέπει η μετατόπιση του κέντρου μάζας του τροχού στο χρονικό διάστημα dt να είναι ίση με τόξο dS που έχει στραφεί το σημείο A αλλά και οποιοδήποτε άλλο σημείο του τροχού.

Δηλαδή:

$$dx = dS$$

Από τον ορισμό της επίκεντρης γωνίας, όμως, έχουμε ότι:

$$dS = R \cdot d\theta$$

Οπότε, τελικά, παίρνουμε: $dx = R \cdot d\theta$ (1η συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση)

Από την πρώτη συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση έχουμε:

$$dx = R \cdot d\theta \Rightarrow \frac{dx}{dt} = R \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

Για τα μέτρα όμως της ταχύτητας του κέντρου μάζας του τροχού $\vec{v}_{cm}$ και της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του $\vec{\omega}$ έχουμε:

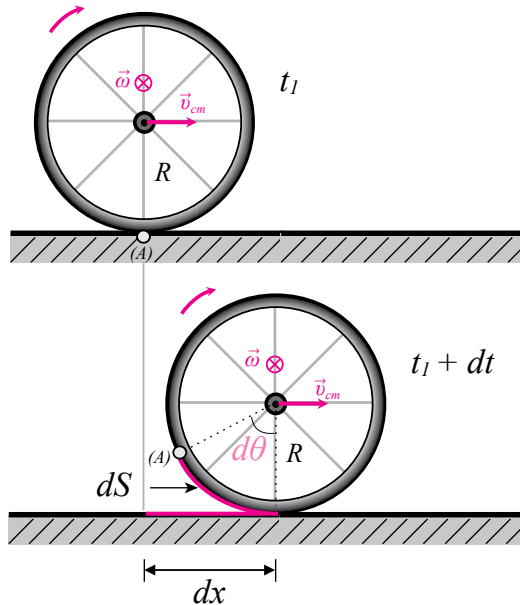
$$v_{cm} = \frac{dx}{dt} \text{ και } \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Οπότε, τελικά, παίρνουμε: $v_{cm} = \omega R$ (2η συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση)

Αν επιπλέον ο τροχός εκτελεί μεταβαλλόμενη κίνηση (είτε επιταχυνόμενη είτε επιβραδυνόμενη) το κέντρο μάζας του θα έχει επιτάχυνση $\vec{a}_{cm}$ με μέτρο $a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt}$ ενώ ταυτόχρονα η γωνιακή του ταχύτητα $\vec{\omega}$ θα μεταβάλλεται με γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_{γων}$ που θα έχει μέτρο $a_{γων} = \frac{d\omega}{dt}$.

Από τη δεύτερη συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση έχουμε:

$$v_{cm} = \omega R \Rightarrow \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} \Rightarrow \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R$$

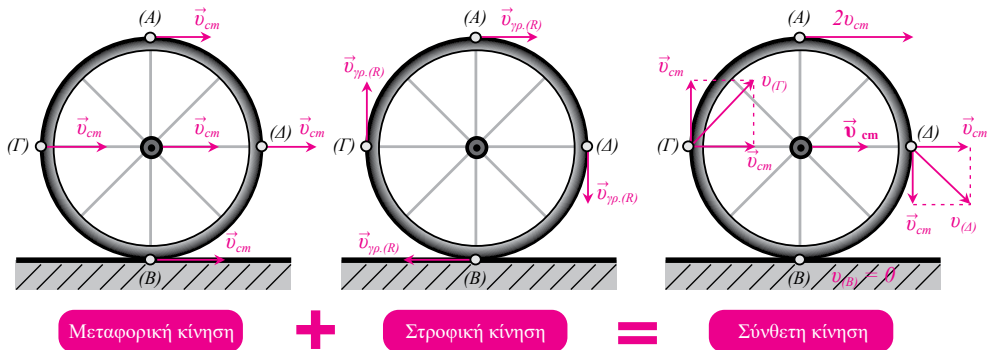


Οπότε, τελικά, παίρνουμε:

$$\alpha_{\text{cm}} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R \quad (3\text{η συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση})$$

Θ2.7) Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα ενός σημείου του τροχού που κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει;

Έστω ένα τροχός που κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει. Η κίνησή του μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα της επαλληλίας μιας μεταφορικής κίνησης, στην οποία όλα τα σημεία του τροχού, κάθε στιγμή, έχουν την ίδια ταχύτητα $\vec{v}_{\text{cm}}$ και μιας στροφικής κίνησης, γύρω από άξονα που περνάει από το κέντρο του τροχού και είναι κάθετος σ' αυτόν.



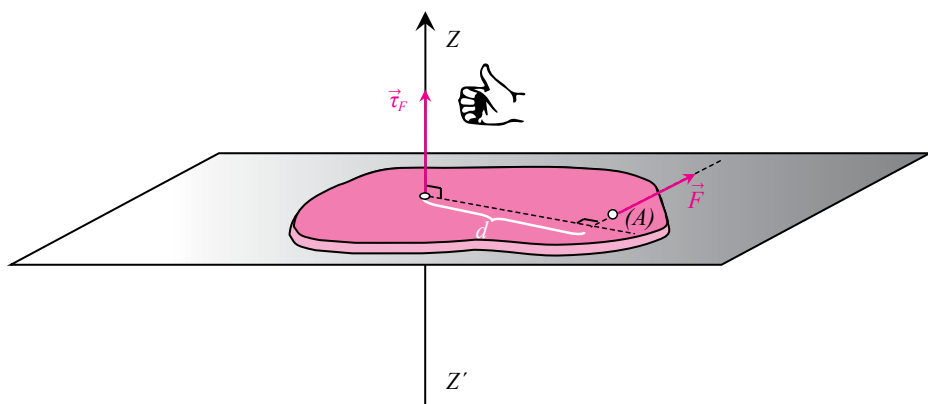
Στη στροφική κίνηση όλα τα σημεία του τροχού που απέχουν την ίδια απόσταση από τον άξονα περιστροφής έχουν ίδιες κατά μέτρο γραμμικές ταχύτητες $\vec{v}$, εφαπτόμενες στην κυκλική τους τροχιά. Η ταχύτητα κάθε σημείου του τροχού είναι η συνισταμένη της ταχύτητας $\vec{v}_{\text{cm}}$, λόγω μεταφορικής κίνησης και της $\vec{v}$ λόγω στροφικής κίνησης. Όπως γνωρίζουμε για το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας $\vec{v}$ για ένα σημείο της περιφέρειας του τροχού ισχύει $v = \omega R$. Γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση που ο τροχός κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει για το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}_{\text{cm}}$ η σχέση $v_{\text{cm}} = \omega R$. Δηλαδή προκύπτει $v = v_{\text{cm}}$.

Θ2.8) Τι περιγράφει το φυσικό μέγεθος ροπή δύναμης;

Όταν ασκήσουμε μια δύναμη σ' ένα σώμα που έχει τη δυνατότητα να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα το σώμα περιστρέφεται εκτός και αν ο φορέας της δύναμης περνάει από τον άξονα περιστροφής. Εμπειρικά γνωρίζουμε πως η περιστροφή που προκαλεί μια δύναμη εξαρτάται όχι μόνο από την κατεύθυνση και το μέγεθος της δύναμης αλλά και από το σημείο στο οποίο ασκείται η δύναμη. Το μέγεθος το οποίο περιγράφει την ικανότητα μιας δύναμης να στρέφει ένα σώμα ονομάζεται ροπή της δύναμης και συμβολίζεται με $\vec{\tau}$.

Θ2.9) Πώς ορίζεται η ροπή δύναμης ως προς άξονα; Ποια η μονάδα μέτρησης στο S.I.; Ποια είναι η διεύθυνση και ποια η φορά της;

Έστω ένα σώμα που μπορεί να στρέφεται γύρω από τον άξονα $z'z$. Στο σώμα ασκείται δύναμη $\vec{F}$ που βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

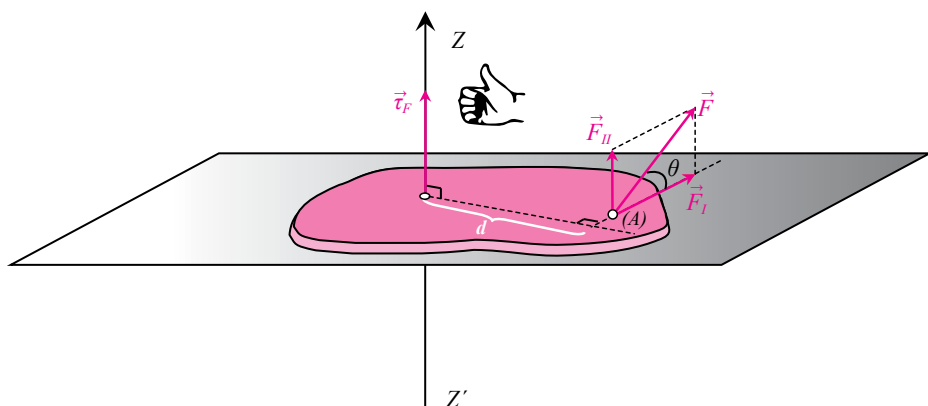


Ροπή της δύναμης $\vec{F}$ ως προς άξονα περιστροφής ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος $\vec{\tau}$ που έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την κάθετη απόσταση d της δύναμης από τον άξονα περιστροφής (μοχλοβραχίονας).

$$\tau = Fd$$

Η ροπή έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής και η φορά της δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Μονάδα μέτρησης της ροπής στο S.I. είναι το 1 Nm. Προκειμένου να προσδιορίσουμε τη φορά της ροπής κλείνουμε τα δάχτυλα του δεξιού χεριού και τα τοποθετούμε έτσι ώστε να δείχνουν τη φορά κατά την οποία τείνει να περιστρέψει το σώμα η δύναμη. Ο αντίχειρας μας δίνει τη φορά του διανύσματος της ροπής.

Στην περίπτωση που η δύναμη $\vec{F}$ δεν βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής, η ροπή της είναι ίση με τη ροπή που δημιουργεί η συνιστώσα που βρίσκεται στο κάθετο επίπεδο όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

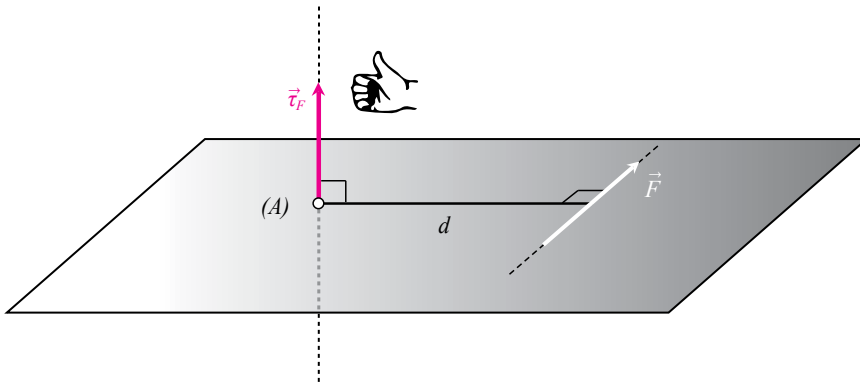


Σε τέτοιου είδους προβλήματα (περιπτώσεις στις οποίες όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο), για να περιγράψουμε την τάση μιας δύναμης να περιστρέψει ένα σώμα προς τη μία ή την άλλη φορά, κάνουμε χρήση της αλγεβρικής τιμής της ροπής. Κατά σύμβαση θεωρούμε θετική τη ροπή της δύναμης που τείνει να περιστρέψει το σώμα αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού και αρνητική τη ροπή της δύναμης που τείνει να περιστρέψει κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Θ2.10) Πώς ορίζεται η ροπή δύναμης ως προς σημείο;

Στην περίπτωση που σε ένα ελεύθερο σώμα ασκηθεί δύναμη που ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα δεν περιστρέφεται και θα εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση. Αν όμως ο φορέας της δύναμης δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το σώμα μαζί με τη μεταφορική κίνηση θα εκτελέσει και περιστροφική γύρω από έναν νοητό άξονα(ελεύθερος άξονας) που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζεται από τη δύναμη και το κέντρο μάζας του σώματος.

Στις περιπτώσεις που δεν υπάρχει σταθερός άξονας περιστροφής κάνουμε χρήση της έννοιας της ροπής της δύναμης ως προς σημείο.



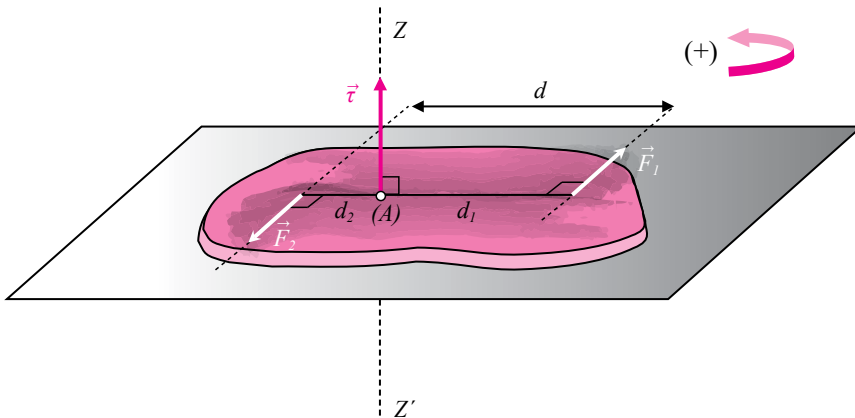
Ροπή μιας δύναμης $\vec{F}$ ως προς σημείο A ονομάζουμε το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την απόστασή της d από το σημείο A, δηλαδή:

$$\tau = F d$$

Η διεύθυνσή της είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τη δύναμη και το σημείο A και η φορά της δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Θ2.11) Πώς ορίζεται ένα ζεύγος δυνάμεων; Τι γνωρίζετε για τη ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων;

Ζεύγος δυνάμεων ονομάζουμε δύο αντίρροπες δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ που έχουν ίσα μέτρα.



Αν η απόσταση των φορέων των δύο δυνάμεων είναι ίση με d , όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα, η αλγεβρική τιμή της ροπής του ζεύγους ως προς κάποιο σημείο A , που απέχει απόσταση d_1 από τη δύναμη $\vec{F}_1$ και απόσταση d_2 από τη δύναμη $\vec{F}_2$, είναι:

$$\tau_{\zeta\epsilon\upsilon\gamma} = F_1 d_1 + F_2 d_2 \Rightarrow \tau_{\zeta\epsilon\upsilon\gamma} = F_1 (d_1 + d_2) \Rightarrow \tau_{\zeta\epsilon\upsilon\gamma} = F_1 d$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε και ως προς οποιοδήποτε άλλο σημείο. Επομένως, η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο.

Θ2.12) Τι πρέπει να ισχύει ώστε να ισορροπεί ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις;

Για να ισορροπεί ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα, στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις, θα πρέπει πρώτον η συνισταμένη αυτών των δυνάμεων να είναι ίση με μηδέν:

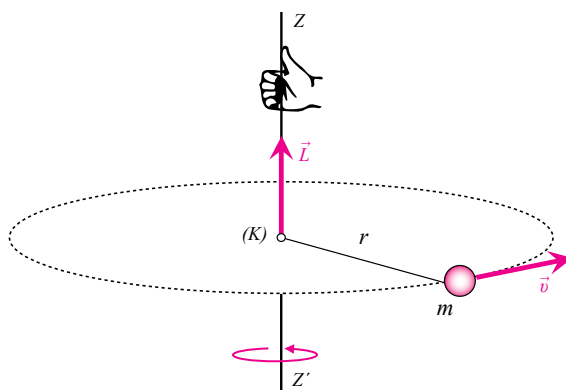
$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \text{ ή } (\Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \text{ και } \Sigma \vec{F}_y = \vec{0})$$

και δεύτερον το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων αυτών, ως προς οποιοδήποτε σημείο, να είναι ίσο με μηδέν:

$$\Sigma \tau = 0$$

Θ2.13) Πώς ορίζεται η στροφορμή ενός υλικού σημείου που κινείται σε περιφέρεια κύκλου;

Το υλικό σημείο μάζας m , του ακόλουθου σχήματος κινείται σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας r . Το μέτρο της ταχύτητάς του είναι ίσο με v και της ορμής του ίσου με p .



Ονομάζουμε στροφορμή του υλικού σημείου, ως προς έναν άξονα $z'z$ που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδό της, το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο:

$$L = pr \Rightarrow L = mvr$$

διεύθυνση αυτήν του άξονα $z'z$ και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Μονάδα μέτρησης της στροφορμής στο S.I. είναι το $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

Θ2.14) Πώς μπορεί να υπολογιστεί η στροφορμή ενός συστήματος σωμάτων;

Σε ένα σύστημα σωμάτων, στροφορμή ονομάζεται το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των σωμάτων που απαρτίζουν το σύστημα. Εάν δηλαδή οι στροφορμές των σωμάτων του συστήματος είναι $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \dots$, η στροφορμή του συστήματος είναι:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots$$

Θ2.15) Πώς διατυπώνεται ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης για ένα υλικό σημείο; Τι ισχύει στην περίπτωση ενός συστήματος σωμάτων;

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής έχουμε:

$$\Sigma F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow \Sigma F \cdot r = \frac{dp}{dt} \cdot r \Rightarrow \Sigma(F \cdot r) = \frac{d(p \cdot r)}{dt}$$

όπου τελικά, προκύπτει:

$$\Sigma \tau = \frac{dL}{dt} \quad (1)$$

Η τελευταία σχέση διατυπώνεται ως εξής:

Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν σε ένα σώμα, είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του.

Σε ένα σύστημα σωμάτων, το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ροπών, δηλαδή των ροπών που οφείλονται στις εξωτερικές δυνάμεις καθώς και εκείνων που οφείλονται στις εσωτερικές δυνάμεις, είναι ίσο με τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος. Η ολική ροπή όμως των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική. Με βάση τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, οι εσωτερικές δυνάμεις εμφανίζονται κατά ζεύγη (δράση-αντίδραση). Σε κάθε τέτοιο ζεύγος οι δυνάμεις είναι αντίθετες, οπότε η ροπή κάθε τέτοιου ζεύγους, ως προς οποιοδήποτε σημείο, είναι μηδενική και επομένως το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών όλων των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν. Έτσι, για το σύστημα σωμάτων η σχέση (1) γράφεται:

$$\Sigma \tau_{\text{εξ}} = \left(\frac{dL}{dt} \right)_{\text{συστ}}$$

και διατυπώνεται ως εξής:

Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν σε ένα σύστημα σωμάτων, είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του.

Θ2.16) Πότε διατηρείται σταθερή η στροφορμή ενός υλικού σημείου που περιφέρεται γύρω από ακλόνητο άξονα; Τι ισχύει στην περίπτωση συστήματος σωμάτων;

Από τη σχέση $\Sigma \tau = \frac{dL}{dt}$, αν $\Sigma \tau = 0$, προκύπτει ότι:

$$\frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow dL = 0 \Rightarrow L = \text{σταθερό} \Rightarrow L_{(\text{αρχ})} = L_{(\text{τελ})}$$

Δηλαδή, η στροφορμή του σώματος διατηρείται.

Στην περίπτωση συστήματος σωμάτων έχουμε $\Sigma \tau_{\varepsilon\xi} = \left(\frac{dL}{dt} \right)_{\text{συστ}}$.

Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα είναι ίσο με το μηδέν ($\Sigma \tau_{\varepsilon\xi} = 0$), τότε:

$$\left(\frac{dL}{dt} \right)_{\text{συστ}} = 0 \Rightarrow (dL)_{\text{συστ}} = 0 \Rightarrow L_{\text{συστ}} = \text{σταθερό} \Rightarrow L_{\text{συστ(αρχ)}} = L_{\text{συστ(τελ)}}$$

Η διατήρηση της στροφορμής για σύστημα σωμάτων διατυπώνεται ως εξής:

Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σύστημα σωμάτων είναι μηδέν, τότε η ολική στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Θ3.1) Ποια φαινόμενα ονομάζονται περιοδικά;

Περιοδικά ονομάζονται τα φαινόμενα που εξελίσσονται και επαναλαμβάνονται αναλλοίωτα σε σταθερά χρονικά διαστήματα.

Θ3.2) Πώς ορίζονται η περίοδος και συχνότητα ενός περιοδικού φαινομένου; Με ποια σχέση συνδέονται; Τι γνωρίζετε για τη γωνιακή συχνότητα;

Περίοδος T ενός περιοδικού φαινομένου είναι ο χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη επανάληψη του φαινομένου. Μονάδα μέτρησης της περιόδου στο S.I. είναι το 1 s.

Συχνότητα ενός περιοδικού φαινομένου ονομάζεται το φυσικό μέγεθος που είναι ίσο με το πηλίκο του αριθμού των επαναλήψεων N σε έναν ορισμένο χρόνο προς τον χρόνο αυτό. Δηλαδή:

$$f = \frac{N}{\Delta t}$$

Η σχέση μεταξύ περιόδου και συχνότητας είναι:

$$f = \frac{1}{T}$$

Μονάδα μέτρησης της συχνότητας στο S.I. είναι το 1 Hz. Η γωνιακή συχνότητα ω που αναφέρεται επίσης σε όλα τα περιοδικά φαινόμενα, χωρίς άμεση φυσική σημασία, υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 2\pi f$$

Μονάδα μέτρησης της γωνιακής συχνότητας στο S.I. είναι το 1 rad/s.

Θ3.3) Ποια κίνηση ονομάζεται ταλάντωση; Ποιο είναι το χαρακτηριστικό της γραμμικής ταλάντωσης;

Μια περιοδική παλινδρομική κίνηση ονομάζεται ταλάντωση. Η ταλάντωση που γίνεται σε ευθεία τροχιά ονομάζεται γραμμική ταλάντωση.

Θ3.4) Πώς ορίζεται η απλή αρμονική ταλάντωση;

Απλή αρμονική ταλάντωση ονομάζεται η γραμμική ταλάντωση ενός σώματος του οποίου η απομάκρυνση είναι ημιτονοειδής (αρμονική) συνάρτηση του χρόνου.

Θ3.5) Τι γνωρίζετε για τις χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης στην απλή αρμονική ταλάντωση;

Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από τη σχέση:

$$x = A \eta \mu \omega t$$

όπου A το πλάτος της ταλάντωσης (μέγιστη απόσταση από τη θέση ισορροπίας).

Η ταχύτητα μεταβάλλεται με τον χρόνο σύμφωνα με τη σχέση:

$$v = v_{\max} \sigma \upsilon \nu \omega t$$

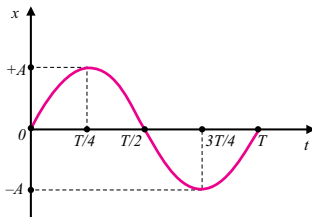
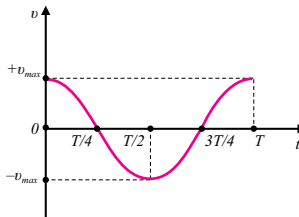
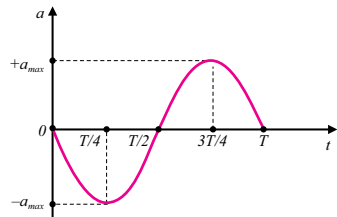
όπου $v_{\max} = \omega A$ η μέγιστη ταχύτητα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης.

Η επιτάχυνση μεταβάλλεται με τον χρόνο σύμφωνα με τη σχέση:

$$a = -a_{\max} \eta \mu \omega t$$

όπου $a_{\max} = \omega^2 A$ η μέγιστη επιτάχυνση κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης.

Στην περίπτωση που ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση (χωρίς αρχική φάση) τα διαγράμματα της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε σχέση με τον χρόνο είναι:

Απομάκρυνσης – χρόνου ($x = f(t)$)Ταχύτητας – χρόνου ($v = f(t)$)Επιτάχυνσης – χρόνου ($a = f(t)$)**Θ3.6) Πώς ορίζεται η αρχική φάση και η φάση μιας ταλάντωσης;**

Η γωνία $\varphi = \omega t$ που η τιμή της καθορίζει την τιμή της απομάκρυνσης του σώματος τη χρονική στιγμή t , ονομάζεται φάση της ταλάντωσης.

Οι σχέσεις:

$$x = A \eta \mu \omega t, v = v_{\max} \sigma \upsilon \nu \omega t, a = -a_{\max} \eta \mu \omega t$$

ισχύουν με την προϋπόθεση ότι το σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και η ταχύτητά του είναι $v > 0$, δηλαδή κινείται προς τα θετικά του άξονα. Σε κάθε άλλη περίπτωση οι σχέσεις γίνονται:

$$x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0), v = v_{\max} \sigma \upsilon \nu(\omega t + \varphi_0), a = -a_{\max} \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$$

όπου φ_0 είναι η φάση της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t = 0$ και ονομάζεται αρχική φάση της ταλάντωσης. Για την αρχική φάση ισχύει:

$$0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$$

Η τιμή της αρχικής φάσης καθορίζει που βρίσκεται το σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ που αρχίζει η ταλάντωση.

Θ3.7) Πώς ορίζεται η θέση ισορροπίας μιας ταλάντωσης; Πώς συνδέεται η δύναμη επαναφοράς με την απομάκρυνση; Πώς ορίζεται η σταθερά επαναφοράς;

Όταν ένα σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, τότε σε τυχαία θέση της τροχιάς του έχει επιτάχυνση a . Η συνολική δύναμη που δέχεται το σώμα και είναι υπεύθυνη για την επιτάχυνσή του, υπακούει στον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής. Αν υποθέσουμε ότι η ταλάντωση δεν έχει αρχική φάση, έχουμε:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow \Sigma F = m(-a_{\max} \eta \mu \omega t) \Rightarrow \Sigma F = -m\omega^2 A \eta \mu \omega t$$

Όμως επειδή $x = A \eta \mu \omega t$ η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\Sigma F = -m\omega^2 x$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι όταν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση η συνολική δύναμη που δέχεται είναι ανάλογη με την απομάκρυνση του σώματος από το μέσο O της τροχιάς του και έχει αντίθετη φορά από αυτήν. Όταν το σώμα περνά από το σημείο O η συνολική δύναμη που δέχεται ισούται με μηδέν. Για το λόγο αυτό, το σημείο O ονομάζεται θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. Αν συμβολίσουμε το γινόμενο $m\omega^2$ με D (που είναι σταθερό για κάθε ταλαντωτή), δηλαδή: $D = m\omega^2$ η σχέση που δίνει τη δύναμη είναι:

$$\Sigma F = -D \cdot x$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί την αναγκαία και ικανή συνθήκη για να κάνει ένα σώμα απλή αρμονική ταλάντωση.

Η δύναμη ΣF ονομάζεται δύναμη επαναφοράς (γιατί τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας) και η σταθερά αναλογίας D σταθερά επαναφοράς η τιμή της οποίας σχετίζεται με τα φυσικά χαρακτηριστικά του ταλαντούμενου συστήματος.

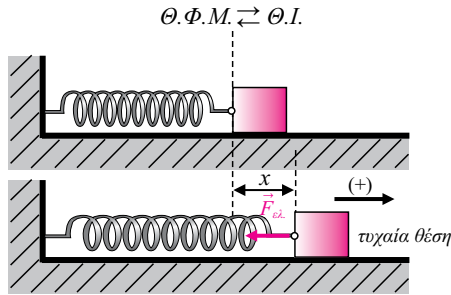
Θ3.8) Με ποια σχέση συνδέεται η περίοδος της ταλάντωσης με τη σταθερά επαναφοράς;

Ισχύει:

$$D = m\omega^2 \Rightarrow D = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

Θ3.9) Να αποδείξετε ότι ένα σώμα που είναι δεμένο στην άκρη ελατηρίου εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση στην περίπτωση που το διεγείρουμε από τη θέση ισορροπίας του. Να μελετηθεί η περίπτωση οριζόντιου ελατηρίου, κατακόρυφου ελατηρίου και ελατηρίου σε κεκλιμένο επίπεδο.

Α) Οριζόντιο ελατήριο



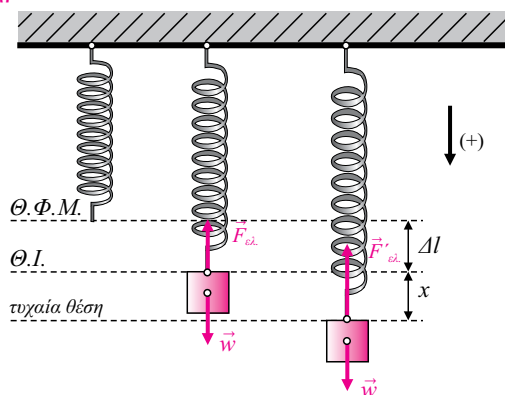
Σώμα μάζας m , το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο δάπεδο, είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k , η άλλη άκρη του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένη σε κατακόρυφο τοίχο. Αρχικά το σώμα ισορροπεί με το ελατήριο να βρίσκεται στη θέση φυσικού του μήκους. Εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά τυχαία απομάκρυνση x και κάποια στιγμή το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα.

Στην αρχική κατάσταση ισορροπίας το ελατήριο δεν είναι ούτε επιμηκυμένο ούτε συσπειρωμένο, οπότε η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης ταυτίζεται με τη θέση φυσικού του μήκους. Στην τυχαία θέση σχεδιάζουμε τη δύναμη που δέχεται το σώμα από το ελατήριο. Στη θέση αυτή υπολογίζουμε τη συνισταμένη δύναμη θεωρώντας θετική τη φορά της αρχικής εκτροπής. Τυχαία θέση: $\Sigma F = -F_{ελ.} = -kx$

Η συνισταμένη δύναμη είναι της μορφής $\Sigma F = -Dx$ άρα το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

Για την περίοδο της ταλάντωσης έχουμε: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Β) Κατακόρυφο ελατήριο



Σώμα μάζας m είναι δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k , η άλλη άκρη του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένη σε σημείο της οροφής όπως φαίνεται στο σχήμα. Αρχικά το σώμα ισορροπεί υπό την επίδραση του βάρους του και της δύναμης του ελατηρίου. Εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του, κατα-

κόρυφα προς τα κάτω, κατά τυχαία απομάκρυνση x και κάποια στιγμή το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα.

Στην αρχική κατάσταση ισορροπίας του σώματος το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά Δl από τη θέση φυσικού του μήκους. Εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας στη θέση αυτή.

$$(\Theta.I.): \Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ.} = w \Rightarrow k \cdot \Delta l = mg \quad (1)$$

Στην τυχαία θέση το ελατήριο έχει εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του κατά τυχαία απομάκρυνση x . Στη θέση αυτή υπολογίζουμε τη συνισταμένη δύναμη θεωρώντας θετική τη φορά της αρχικής εκτροπής.

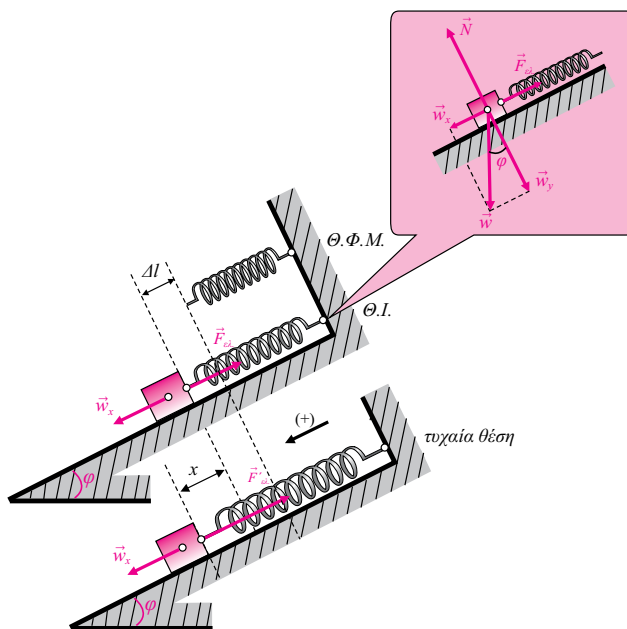
$$\text{Τυχαία θέση: } \Sigma F = w - F'_{ελ.} = mg - k(\Delta l + x) = mg - k \cdot \Delta l - kx \stackrel{(1)}{=} -kx$$

Η συνισταμένη δύναμη είναι της μορφής $\Sigma F = -Dx$, άρα το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

Για την περίοδο της ταλάντωσης έχουμε:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Γ) Ελατήριο σε κεκλιμένο επίπεδο



Σώμα μάζας m το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ , είναι δεμένο στο κάτω άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k , η άλλη άκρη του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένη σε τοίχο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αρχικά το σώμα ισορροπεί υπό την επίδραση του βάρους του και της δύναμης του ελατηρίου. Εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του, προς τα κάτω, κατά τυχαία

απομάκρυνση x και κάποια στιγμή το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα. Στην αρχική κατάσταση ισορροπίας του σώματος το ελατήριο είναι επιμηγμένο κατά Δl από τη θέση φυσικού του μήκους. Εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας στη θέση αυτή για τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στον άξονα της ταλάντωσης (άξονας $x'x$).

$$(\Theta.I.): \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{ελ.} = w_x \Rightarrow k \cdot \Delta l = mg\eta\mu\phi \quad (1)$$

Στην τυχαία θέση το ελατήριο έχει εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του κατά τυχαία απομάκρυνση x . Στη θέση αυτή υπολογίζουμε τη συνισταμένη δύναμη στη διεύθυνση της ταλάντωσης θεωρώντας θετική τη φορά της αρχικής εκτροπής.

$$\text{Τυχαία θέση: } \Sigma F_x = w_x - F'_{ελ.} = mg\eta\mu\phi - k(\Delta l + x) = mg\eta\mu\phi - k \cdot \Delta l - kx \stackrel{(1)}{=} -kx$$

Η συνισταμένη δύναμη είναι της μορφής $\Sigma F_x = -Dx$ άρα το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

$$\text{Για την περίοδο της ταλάντωσης έχουμε: } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Θ3.10) Τι γνωρίζετε για την κινητική, τη δυναμική και την ενέργεια ταλάντωσης ενός συστήματος που ταλαντώνεται; Πώς γράφεται η αρχή διατήρησης της ενέργειας στην απλή αρμονική ταλάντωση;

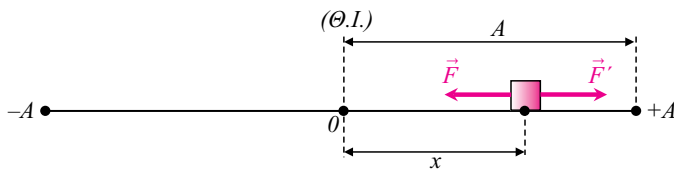
Κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης, αφού το σώμα κινείται, έχει κινητική ενέργεια η οποία θα δίνεται από τη σχέση:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

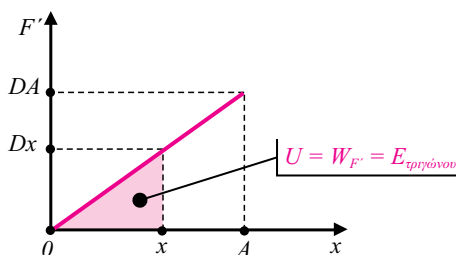
Στην περίπτωση που το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση χωρίς αρχική φάση, η σχέση (1) παίρνει τη μορφή:

$$K = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t$$

Για να εκτελέσει ένα σώμα απλή αρμονική ταλάντωση θα πρέπει όπως έχουμε αποδείξει να του ασκείται μια δύναμη (συνισταμένη) που λέγεται δύναμη επαναφοράς και είναι της μορφής $F = -Dx$.



Για να θέσουμε όμως το σώμα σε ταλάντωση από την ηρεμία θα πρέπει να του ασκήσουμε μια εξωτερική δύναμη $\vec{F}'$ η οποία να εξουδετερώνει κάθε χρονική στιγμή την δύναμη επαναφοράς, έως ότου το μετατοπίσουμε κατά x . Το μέτρο αυτής της δύναμης $\vec{F}'$ θα πρέπει να είναι κάθε χρονική στιγμή ίσο με το μέτρο της δύναμης επαναφοράς δηλαδή $F' = Dx$. Το έργο αυτής της εξωτερικής δύναμης για αυτή τη μετατόπιση αποθηκεύεται ως δυναμική ενέργεια στο σύστημα. Για τον υπολογισμό αυτού του έργου αφού η δύναμη δεν είναι σταθερή και μεταβάλλεται με την απομάκρυνση, θα πρέπει να σχεδιάσουμε το διάγραμμα της δύναμης με την απομάκρυνση και από το εμβαδόν που σχηματίζεται μεταξύ των αξόνων και της γραφικής παράστασης να υπολογίσουμε το έργο.



Ισχύει:

$$U = W_F = E_{\text{τριγώνου}} = \frac{\text{βάση} \cdot \text{ύψος}}{2} = \frac{x \cdot Dx}{2} \Rightarrow U = \frac{1}{2} Dx^2 \quad (2)$$

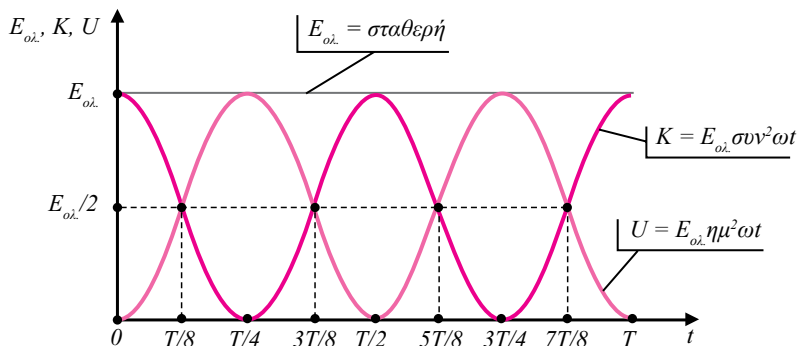
Στην περίπτωση που το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση χωρίς αρχική φάση, η σχέση (2) παίρνει τη μορφή:

$$U = \frac{1}{2} DA^2 \eta\mu^2 \omega t = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \eta\mu^2 \omega t$$

Η ενέργεια ταλάντωσης του συστήματος σε μια τυχαία θέση δίνεται από τη σχέση:

$$E = K + U \Rightarrow E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \eta\mu^2 \omega t + \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sigma\upsilon\nu^2 \omega t \Rightarrow E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} DA^2$$

Προκύπτει επομένως ότι η ενέργεια στην απλή αρμονική ταλάντωση είναι σταθερή και ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους. Στην περίπτωση απλής αρμονική ταλάντωσης χωρίς αρχική φάση, τα διαγράμματα της κινητικής, της δυναμικής και της ενέργειας ταλάντωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:



Θ3.11) Πώς ορίζεται μια φθίνουσα μηχανική ταλάντωση;

Οι ταλαντώσεις των οποίων το πλάτος μειώνεται με την πάροδο του χρόνου, μέχρις ότου μηδενιστεί, ονομάζονται φθίνουσες ταλαντώσεις. Όλες οι ταλαντώσεις στον μακρόκοσμο είναι φθίνουσες γιατί καμία κίνηση δεν είναι απαλλαγμένη από τριβές και αντιστάσεις. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι φθίνουσες ταλαντώσεις των οποίων η δύναμη αντίστασης έχει μέτρο ανάλογο με την ταχύτητα του σώματος όπως είναι η δύναμη αντίστασης που ασκείται σε μικρά αντικείμενα που κινούνται μέσα στον αέρα ή μέσα σε υγρό. Στην περίπτωση αυτή η δύναμη θα δίνεται από τη σχέση:

$$F_{\text{αντ.}} = -bv$$

Το αρνητικό πρόσημο στον τύπο δηλώνει ότι αυτή η δύναμη έχει πάντα αντίθετη φορά από τη φορά κίνησης του σώματος (ταχύτητα).

Θ3.12) Τι γνωρίζετε για την απόσβεση σε μια φθίνουσα ταλάντωση; Πώς ορίζεται η σταθερά απόσβεσης και ποια η μονάδα μέτρησής της;

Η απόσβεση οφείλεται σε δυνάμεις που αντιτίθενται στην κίνηση. Οι δυνάμεις αυτές μεταφέρουν ενέργεια από το ταλαντούμενο σύστημα στο περιβάλλον με αποτέλεσμα η μηχανική ενέργεια του συστήματος με την πάροδο του χρόνου να ελαττώνεται και το πλάτος της ταλάντωσης να μειώνεται. Η σταθερά αναλογίας b είναι μια θετική σταθερά που ονομάζεται σταθερά απόσβεσης και έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

α) Μονάδα μέτρησης στο S.I. το 1 kg/s .

β) Τιμή που εξαρτάται από το σχήμα και το μέγεθος του σώματος που εκτελεί την φθίνουσα ταλάντωση καθώς και από τις ιδιότητες του μέσου (χώρου) στον οποίο γίνεται η ταλάντωση.

γ) Ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται το πλάτος μιας φθίνουσας ταλάντωσης εξαρτάται από την τιμή της σταθεράς b . Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της σταθεράς b , τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η μείωση του πλάτους σε κάθε περίοδο.

Θ3.13) Τι συμπεράσματα προκύπτουν από τη μελέτη μιας φθίνουσας μηχανικής ταλάντωσης;

α) Η περίοδος, για ορισμένη τιμή της σταθεράς b , διατηρείται σταθερή και ανεξάρτητη από το πλάτος. Όταν η σταθερά b μεγαλώνει το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται πιο γρήγορα και η περίοδος παρουσιάζει μια μικρή αύξηση (θα θεωρείται αμελητέα).

β) Όταν η σταθερά απόσβεσης παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, η κίνηση του σώματος γίνεται απεριοδική, δηλαδή, ο ταλαντωτής, επιστρέφει στη θέση ισορροπίας χωρίς ποτέ να την υπερβεί (ταλάντωση σώματος μέσα σε κάποιο παχύρευστο υγρό όπως το μέλι).

γ) Σε μια φθίνουσα ταλάντωση στην οποία η αντιτιθέμενη δύναμη είναι της μορφής $F_{\text{αντ.}} = -bv$, με $b = \text{σταθερό}$, το πλάτος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση:

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \quad (1)$$

όπου A το πλάτος της ταλάντωσης σε τυχαία χρονική στιγμή t , A_0 το αρχικό πλάτος τη χρονική στιγμή $t = 0$, Λ μια σταθερά η οποία εξαρτάται από τη μάζα του σώματος και τη σταθερά απόσβεσης και έχει μονάδα μέτρησης στο S.I. το 1 s^{-1} και t ο χρόνος. Ο παραπάνω τύπος του πλάτους υπολογίζει το πλάτος πάντα ή στην αρχή ή στο τέλος κάποιας ταλάντωσης. Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι ο λόγος δύο διαδοχικών μεγίστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση διατηρείται σταθερός, δηλαδή:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \text{σταθ.}$$

Θ3.14) Τι γνωρίζετε για το σύστημα ταλάντωσης του αυτοκινήτου;

Το σύστημα ταλάντωσης του αυτοκινήτου είναι σύστημα αποσβεννύμενων ταλαντώσεων. Τα αμορτισέρ του αυτοκινήτου εξασφαλίζουν δύναμη απόσβεσης (εξαρτάται από την ταχύτητα) τέτοια ώστε όταν το αυτοκίνητο περνάει πάνω από ένα εξόγκωμα του δρόμου, να μη συνεχίζει να ταλαντώνεται για πολύ χρόνο. Καθώς τα αμορτισέρ παλιώνουν η τιμή της σταθεράς απόσβεσης b μειώνεται και η ταλάντωση διαρκεί περισσότερο χρόνο. Επομένως, στην περίπτωση του αυτοκινήτου είναι επιθυμητή η μεγάλη απόσβεση σε αντίθεση με άλλα συστήματα που επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση της απόσβεσης (εκκρεμές ρολοί).

Θ3.15) Ποια ταλάντωση ονομάζεται ελεύθερη; Πώς ορίζεται η ιδιοσυχνότητα μιας ελεύθερης ταλάντωσης;

Ένα σύστημα θα λέμε ότι εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση όταν διεγερθεί κατάλληλα (με τη βοήθεια κάποιου εξωτερικού μηχανισμού) και στη συνέχεια αφεθεί ελεύθερο να ταλαντωθεί. Ένα σύστημα θα λέμε ότι εκτελεί ελεύθερη αμείωτη ταλάντωση, όταν το πλάτος της παραμένει σταθερό μετά που θα διεγερθεί κατάλληλα και αφεθεί ελεύθερο να κινηθεί χωρίς τη βοήθεια εξωτερικού μηχανισμού από κει και στο εξής. Για να συμβεί αυτό δεν πρέπει να υπάρχουν απώλειες ενέργειας λόγω τριβών και δυνάμεων αντίστασης γενικά. Η συχνότητα με την οποία ταλαντώνεται το σύστημα στην περίπτωση αυτή θα λέγεται ιδιοσυχνότητα f_0 της ταλάντωσης και η περίοδος της θα λέγεται ιδιοπερίοδος T_0 . Η ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης ενός συστήματος εξαρτάται μόνο από τα φυσικά του χαρακτηριστικά. Στην περίπτωση που το σύστημα που εκτελεί την ελεύθερη αμείωτη ταλάντωση είναι το σύστημα ελατήριο - μάζα, η ιδιοσυχνότητα του συστήματος θα δίνεται από τη σχέση:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Θ3.16) Ποια ταλάντωση ονομάζεται εξαναγκασμένη; Πώς ορίζεται η διεγείρουσα δύναμη και πώς ο διεγέρτης;

Επειδή στην πραγματικότητα οι ταλαντώσεις είναι φθίνουσες μιας και καμία κίνηση δεν είναι απαλλαγμένη από τριβές και αντιστάσεις, αν θέλουμε το πλάτος της να παραμένει σταθερό με την πάροδο του χρόνου, θα πρέπει με τη βοήθεια κάποιου εξωτερικού μηχανισμού να προσφέρουμε ενέργεια στο σύστημα, έτσι ώστε να αναπληρώνονται οι ενεργειακές του απώλειες λόγω των δυνάμεων αντίστασης. Για να πετύχουμε κάτι τέτοιο, πρέπει ο εξωτερικός μηχανισμός που θα λέγεται διεγέρτης, να ασκεί στο σύστημα μια εξωτερική περιοδική δύναμη, η οποία θα λέγεται διεγείρουσα δύναμη. Έτσι επειδή το σύστημα στην περίπτωση αυτή "αναγκάζεται" να εκτελεί αμείωτη ταλάντωση σταθερού πλάτους, η ταλάντωση θα λέγεται εξαναγκασμένη.

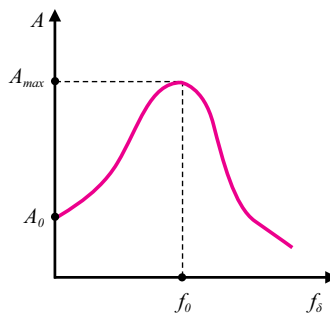
Θ3.17) Τι συμπεράσματα προκύπτουν από τη μελέτη μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης;

α) Η συχνότητα με την οποία ταλαντώνεται το σύστημα που εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση είναι πάντα ίση με τη συχνότητα που του επιβάλλει ο διεγέρτης ($f_{\text{ταλ.}} = f_{\delta}$). Αν η συχνότητα του διεγέρτη αλλάζει, αλλάζει ταυτόχρονα και η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης.

β) Για συγκεκριμένη συχνότητα διεγέρτη και συγκεκριμένη σταθερά απόσβεσης b , το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης παραμένει σταθερό σε όλη τη διάρκεια της ταλάντωσης. Έτσι αν μεταβληθεί η συχνότητα του διεγέρτη (χωρίς να υπάρξει κάποια άλλη αλλαγή στο σύστημα) μεταβάλλεται και το πλάτος της εκτελούμενης ταλάντωσης το οποίο πάλι θα παραμένει σταθερό.

Θ3.18) Πώς μεταβάλλεται το πλάτος A της εξαναγκασμένης ταλάντωσης ενός συστήματος σε συνάρτηση με τη συχνότητα του διεγέρτη f_{δ} , για συγκεκριμένη τιμή της σταθεράς b ;

Το ακόλουθο διάγραμμα δείχνει πώς μεταβάλλεται το πλάτος A της εξαναγκασμένης ταλάντωσης ενός συστήματος σε συνάρτηση με τη συχνότητα του διεγέρτη f_{δ} για συγκεκριμένη μικρή σταθερά απόσβεσης b . Από αυτό γίνεται αντιληπτό ότι υπάρχει μια τιμή συχνότητας διεγέρτη όπου το πλάτος της ταλάντωσης μεγιστοποιείται.



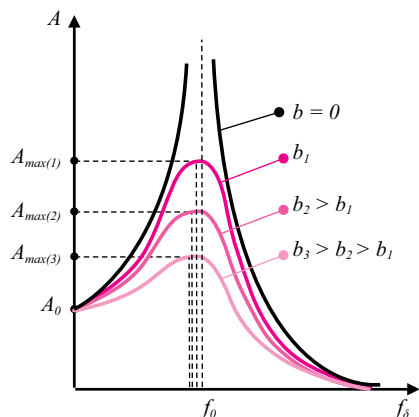
Θ3.19) Πότε λέμε ότι έχουμε συντονισμό σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση; Τι ισχύει σε αυτή την περίπτωση;

Συντονισμός είναι το φαινόμενο κατά το οποίο η συχνότητα του διεγέρτη γίνεται ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος και έχει ως αποτέλεσμα τη μεγιστοποίηση του πλάτους ταλάντωσης. Στην ιδανική περίπτωση που η ταλάντωση δεν έχει απώλειες ενέργειας, τότε το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης γίνεται άπειρο.

Θ3.20) Ποια είναι η εξάρτηση του πλάτους της εξαναγκασμένης ταλάντωσης από τη σταθερά απόσβεσης b ;

Όταν αυξάνεται η σταθερά απόσβεσης b , τότε για συγκεκριμένη συχνότητα διεγέρτη το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος μειώνεται. Επίσης, όσο μεγαλύτερη είναι η σταθερά απόσβεσης τόσο μικρότερο είναι το μέγιστο πλάτος στην κατάσταση συντονισμού. Στο ακόλουθο διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση του πλάτους σε συνάρτηση με τη συχνότητα του διεγέρτη για διάφορες τιμές της σταθεράς απόσβεσης b .

Είναι ξεκάθαρο από τη γραφική παράσταση ότι για μικρές τιμές της σταθεράς b το πλάτος της ταλάντωσης μεγιστοποιείται όταν η συχνότητα του διεγέρτη (άρα και η συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος) γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 του συστήματος. Στην ιδανική περίπτωση που η εξαναγκασμένη ταλάντωση δεν έχει απόσβεση ($b = 0$), το πλάτος της θεωρητικά γίνεται άπειρο στην κατάσταση του συντονισμού.



Θ3.21) Τι συμπεράσματα προκύπτουν από την ενεργειακή μελέτη μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης;

Όταν θέτουμε ένα σύστημα σε ελεύθερη ταλάντωση, δίνεται σε αυτό κάποια μηχανική ενέργεια, η οποία διατηρείται σταθερή εάν η ταλάντωση είναι αμείωτη. Εάν η ταλάντωση είναι φθίνουσα τότε μετατρέπεται σταδιακά σε θερμότητα. Στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, στο σύστημα προσφέρεται συνεχώς ενέργεια με συχνότητα f μέσω του διεγέρτη. Η ενέργεια που προσφέρεται στο σύστημα αντισταθμίζει τις απώλειες και έτσι το πλάτος της ταλάντωσης διατηρείται σταθερό. Ο τρόπος με τον οποίο το ταλαντούμενο σύστημα αποδέχεται την ενέργεια είναι εκλεκτικός και έχει να κάνει με τη συχνότητα υπό την οποία προσφέρεται. Κατά το συντονισμό η ενέργεια μεταφέρεται στο σύστημα κατά τον βέλτιστο τρόπο, γι' αυτό και το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο.

Θ3.22) Να αναφέρετε παραδείγματα του συντονισμού στη Φυσική.

α) Ένα κτίριο εάν διεγερθεί, θεωρητικά έχει τη δυνατότητα να εκτελέσει ελεύθερη ταλάντωση με συχνότητα ίση με την ιδιοσυχνότητά του f_0 . Στη διάρκεια ενός σεισμού το έδαφος πάλλεται με συχνότητα f και τα κτίρια εξαναγκάζονται να εκτελέσουν ταλάντωση. Εάν η συχνότητα f με την οποία πάλλεται το έδαφος (διεγέρτης) είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 του κτιρίου, το πλάτος της ταλάντωσης του κτιρίου θα γίνει μεγάλο με κίνδυνο κατάρρευσης.

β) Εάν μια ομάδα ανθρώπων κινηθεί με βηματισμό πάνω σε μια γέφυρα, η γέφυρα διεγείρεται και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Εάν η συχνότητα βηματισμού είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα της γέφυρας, τότε έχουμε συντονισμό και η γέφυρα ταλαντώνεται με μεγάλο πλάτος με κίνδυνο κατάρρευσης.

ΚΥΜΑ

Θ4.1) Τι ονομάζεται κύμα;

Αν προκαλέσουμε μια διαταραχή σε ένα υλικό που ηρεμεί (ισορροπεί), τότε τα μόρια του στην περιοχή που προκλήθηκε η διαταραχή, μετατοπίζονται από τις θέσεις ισορροπίας τους. Επειδή τα μόρια αυτά αλληλεπιδρούν με τα γειτονικά τους δέχονται δυνάμεις που τείνουν να τα επαναφέρουν στις αρχικές τους θέσεις ενώ στα διπλανά τους ασκούνται δυνάμεις που τείνουν να τα εκτρέψουν από τη θέση ισορροπίας. Έτσι, η διαταραχή διαδίδεται από τη μια περιοχή του υλικού στην άλλη με αποτέλεσμα όλα τα σημεία του υλικού να εκτελούν διαδοχικά την ίδια κίνηση. Τη διάδοση αυτής της διαταραχής στον χώρο την ονομάζουμε κύμα. Για τη δημιουργία ενός κύματος χρειάζεται:

- α) η πηγή της διαταραχής ή πηγή του κύματος δηλαδή η αιτία που θα προκαλέσει τη διαταραχή,
- β) ένα υλικό μέσο στο οποίο κάθε μόριο αλληλεπιδρά με τα γειτονικά του (ελαστικό μέσο).

Θ4.2) Ποια κύματα ονομάζονται μηχανικά; Τι μεταφέρουν τα κύματα κατά τη διάδοσή τους;

Τα κύματα που διαδίδονται σε ένα ελαστικό μέσο ονομάζονται μηχανικά κύματα. Μερικά παραδείγματα μηχανικών κυμάτων είναι ο κυματισμός στην επιφάνεια της θάλασσας, η διάδοση των δονήσεων κατά μήκος ενός στερεού και ο ήχος. Κατά τη διάδοση ενός κύματος δεν έχουμε μεταφορά ύλης από μια περιοχή του ελαστικού μέσου σε άλλη. Τα μόρια του ελαστικού μέσου κινούνται γύρω από τη θέση ισορροπίας τους. Για να προκαλέσουμε μια κυματική διαταραχή θα πρέπει να δώσουμε ενέργεια σε κάποια περιοχή του μέσου. Την ενέργεια αυτή τη μεταφέρει το κύμα σε άλλες περιοχές του μέσου. Κατά τη διάδοση ενός κύματος μεταφέρεται ενέργεια και ορμή από ένα σημείο του μέσου στο άλλο, όμως δε μεταφέρεται ύλη.

Θ4.3) Ποια κύματα ονομάζονται εγκάρσια και ποια διαμήκη;

Με κριτήριο τη διεύθυνση στην οποία κινούνται τα σημεία του ελαστικού μέσου, τα κύματα διακρίνονται σε εγκάρσια και διαμήκη. Τα εγκάρσια κύματα διαδίδονται στα στερεά ενώ τα διαμήκη στα στερεά, στα υγρά και στα αέρια. Εγκάρσια ονομάζονται τα κύματα στα οποία όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Τέτοιου είδους κύματα διαδίδονται κατά μήκος μιας χορδής. Τα κύματα που διαδίδονται στην επιφάνεια των υγρών θεωρούνται κατά προσέγγιση εγκάρσια. Διαμήκη ονομάζονται τα κύματα στα οποία τα σημεία του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται παράλληλα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Θ4.4) Πώς ορίζεται η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος;

Ως ταχύτητα διάδοσης ορίζουμε το πηλίκο της απόστασης x που διαδίδεται μια διαταραχή σε χρόνο t προς τον χρόνο αυτό. Δηλαδή:

$$v_s = \frac{x}{t}$$

Η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ένα κύμα σε ένα μέσο είναι ανεξάρτητη από το πόσο ισχυρή είναι η διαταραχή και εξαρτάται μόνο από τις ιδιότητες του μέσου. Για παράδειγμα ο ήχος, σε θερμοκρασία 20 βαθμών Κελσίου, διαδίδεται στον αέρα με ταχύτητα 344 m/s, ανεξάρτητα από το αν είναι ισχυρός ή ασθενής. Στα στερεά ο ήχος διαδίδεται με μεγαλύτερη ταχύτητα. Πρέπει να επισημάνουμε τη διαφορά μεταξύ της ταχύτητας διάδοσης του κύματος, η οποία σε ομογενές και ισότροπο μέσο είναι σταθερή και ανεξάρτητη από τον χρόνο και της ταχύτητας ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα και η οποία είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου (δεν είναι σταθερή).

Θ4.5) Ποιο κύμα ονομάζεται περιοδικό;

Εάν η πηγή του κύματος εκτελεί περιοδική κίνηση τότε τα σωματίδια του μέσου κινούνται και αυτά περιοδικά. Το κύμα που προκύπτει είναι ένα περιοδικό κύμα.

Θ4.6) Ποιο κύμα ονομάζεται αρμονικό; Τι γνωρίζετε για τα χαρακτηριστικά του (περίοδος, συχνότητα και μήκος κύματος);

Εάν η κίνηση της πηγής είναι απλή αρμονική ταλάντωση τότε όλα τα σωματίδια του μέσου εκτελούν επίσης απλή αρμονική ταλάντωση και το κύμα ονομάζεται ημιτονοειδές ή αρμονικό. Τα αρμονικά κύματα παίζουν έναν ιδιαίτερα σπουδαίο ρόλο και η μαθηματική τους περιγραφή είναι απλή. Οποιαδήποτε κυματική διαταραχή, όσο περίπλοκη και αν είναι αυτή, μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από το άθροισμα ενός αριθμού αρμονικών κυμάτων. Η περίοδος T του κύματος είναι το χρονικό διάστημα στο οποίο ένα σωματίδιο του μέσου ολοκληρώνει την κίνησή του εκτελώντας μια πλήρη αρμονική ταλάντωση. Εάν φωτογραφίζαμε το μέσο στο οποίο διαδίδεται το αρμονικό κύμα δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές που διαφέρουν κατά μια περίοδο θα παρατηρούσαμε ότι όλα τα σωματίδια του μέσου, έχοντας εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση, βρίσκονται πάλι στις αρχικές τους θέσεις. Έτσι, παρά το γεγονός ότι το κύμα θα έχει προχωρήσει, η κυματική εικόνα που θα πάρουμε θα είναι ίδια. Επομένως, η περίοδος του κύματος είναι επίσης το χρονικό διάστημα στο οποίο η κυματική εικόνα επαναλαμβάνεται. Η συχνότητα f με την οποία ταλαντώνονται τα σημεία του μέσου ονομάζεται και συχνότητα του κύματος. Η συχνότητα του κύματος δείχνει τον αριθμό των κορυφών (στην περίπτωση ενός εγκάρσιου κύματος) ή των πυκνωμάτων (στην περίπτωση ενός διαμήκου) που φτάνουν σε κάποιο σημείο του μέσου στη μονάδα του χρόνου, κατά τη διάδοση του κύματος. Η απόσταση στην οποία διαδίδεται το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου ονομάζεται μήκος κύματος και συμβολίζεται με λ . Εναλλακτικά, μπορούμε να ορίσουμε το μήκος κύματος και ως την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων του μέσου που απέχουν το ίδιο από τη θέση ισορροπίας τους και κινούνται κατά την ίδια φορά.

Θ4.7) Ποια είναι η θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής;

Εάν στη σχέση $v_\delta = \frac{\lambda}{T}$ (1) αντικαταστήσουμε το t με την περίοδο του κύματος τότε η απόσταση x στην οποία διαδίδεται το κύμα θα είναι ίση με λ και η σχέση (1) θα έχει τη μορφή:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \quad (2)$$

Επειδή ισχύει $f = \frac{1}{T}$ η σχέση (2) θα γίνει:

$$v_\delta = \lambda f \quad (3)$$

Η παραπάνω σχέση (3) ονομάζεται θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής.

Θ4.8) Να περιγράψετε μαθηματικά ένα αρμονικό κύμα που διαδίδεται προς τα θετικά. Ποια είναι η εξίσωσή του; Τι ισχύει εάν το κύμα διαδίδεται προς την αντίθετη φορά;

Υποθέτουμε ότι μια πηγή αρμονικής διαταραχής στην αρχή O αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ και ότι η ταλάντωσή της περιγράφεται από τη σχέση $y = A \cdot \eta\mu\omega t$. Ένα σημείο M του ελαστικού μέσου θα αρχίσει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{x}{v_\delta}$.

Επομένως, τη χρονική στιγμή t , το σημείο M θα ταλαντώνεται για χρόνο $t - t_1 = t - \frac{x}{v_\delta}$ και με δεδομένο ότι το πλάτος ταλάντωσης του M είναι ίσο με το πλάτος ταλάντωσης του O , η εξίσωση κίνησής του θα είναι:

$$y = A \cdot \eta\mu\omega\left(t - \frac{x}{v_\delta}\right) \Rightarrow y = A \cdot \eta\mu\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v_\delta}\right) \Rightarrow y = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{v_\delta T}\right) \Rightarrow$$

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad (1)$$

Αν το κύμα διαδίδεται κατά την αντίθετη φορά θα ισχύει:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

Η εξίσωση (1) αποτελεί την εξίσωση του κύματος και μας δίνει κάθε χρονική στιγμή την απομάκρυνση που έχουν τα σημεία του ελαστικού μέσου από τη θέση ισορροπίας τους.

Θ4.9) Πώς ορίζεται το πλάτος και η φάση ενός αρμονικού κύματος;

Έστω ένα κύμα με εξίσωση $y = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$. Το A ονομάζεται πλάτος του κύματος και είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει η απομάκρυνση ενός σημείου του μέσου κατά την αρμονική ταλάντωση που εκτελεί. Η γωνία $2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ ονομάζεται φάση και μετριέται σε ακτίνια. Βλέπουμε ότι η φάση εξαρτάται από την απόσταση x από την πηγή, επομένως προκύπτει ότι τα σημεία του ελαστικού μέσου την ίδια χρονική στιγμή θα έχουν διαφορετικές φάσεις.

Θ4.10) Ποιες είναι οι γραφικές παραστάσεις ενός αρμονικού κύματος;

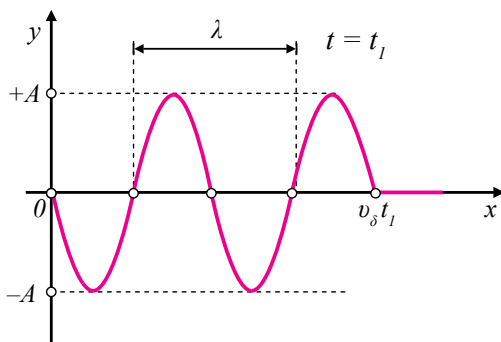
Από τη σχέση $y = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ (1) προκύπτει ότι η απομάκρυνση y ενός σημείου του μέσου είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών, του χρόνου t και της απόστασης x του σημείου από την πηγή. Έτσι, η σχέση αυτή δεν μπορεί να παρασταθεί γραφικά σε επίπεδο

σχήμα. Στην περίπτωση όμως που μια από τις δυο μεταβλητές θεωρηθεί σταθερή, η απομάκρυνση είναι συνάρτηση μόνο της άλλης μεταβλητής και είναι δυνατή η γραφική της παράσταση.

Για δεδομένη χρονική στιγμή $t = t_1$ η σχέση (1) παίρνει τη μορφή:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\text{σταθ} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

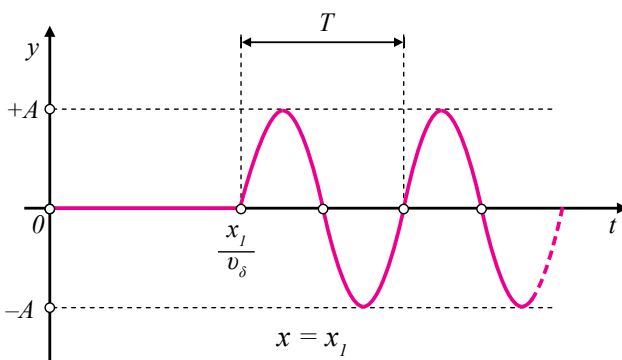
και μας δίνει την απομάκρυνση κάθε σημείου του μέσου συναρτήσει της απόστασής του από την πηγή. Το διάγραμμα της συνάρτησης αυτής που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα μας δίνει τη θέση των διαφόρων σημείων του μέσου μια ορισμένη χρονική στιγμή και ονομάζεται στιγμιότυπο του κύματος.



Για ορισμένη απόσταση από την πηγή ($x = x_1$) η σχέση (1) παίρνει τη μορφή:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \text{σταθ} \right)$$

και μας δίνει την απομάκρυνση ενός συγκεκριμένου σημείου του μέσου συναρτήσει του χρόνου. Η γραφική παράσταση της σχέσης αυτής, που ακολουθεί, είναι η γνωστή μας γραφική παράσταση της απλής αρμονικής ταλάντωσης.



Θ4.11) Τι γνωρίζετε για την αρχή της επαλληλίας;

Έχει διαπιστωθεί ότι τα κύματα ακολουθούν την αρχή της επαλληλίας ή υπέρθεσης σύμφωνα με την οποία:

Όταν σε ένα ελαστικό μέσο διαδίδονται δύο ή περισσότερα κύματα η απομάκρυνση

ενός σημείου του μέσου είναι ίση με τη συνισταμένη των απομακρύνσεων που οφείλονται στα επιμέρους κύματα. Έστω ότι έχουμε δύο κύματα που διαδίδονται στο ίδιο μέσο. Τα κύματα αυτά δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, διέρχονται το ένα μέσα από το άλλο χωρίς να μεταβληθούν καθόλου και κάθε κύμα διαδίδεται σαν να μην υπήρχε το άλλο. Η συνεισφορά κάθε κύματος στην απομάκρυνση ενός σημείου του μέσου είναι ανεξάρτητη από την ύπαρξη του άλλου κύματος. Η αρχή της επαλληλίας παραβιάζεται μόνο όταν τα κύματα είναι τόσο ισχυρά ώστε να μεταβάλλουν τις ιδιότητες του μέσου στο οποίο διαδίδονται (όταν οι δυνάμεις που ασκούνται στα σωματίδια του μέσου δεν είναι ανάλογες της απομάκρυνσης). Τέτοιες περιπτώσεις όπου παραβιάζεται η αρχή της επαλληλίας, έχουμε στα κύματα που δημιουργούνται από μια έκρηξη. Τα κυματικά φαινόμενα που συναντάμε στη φύση είναι συχνά πολύ σύνθετα. Όπως την κίνηση ενός βλήματος την αναλύουμε σε συνιστώσες, μια οριζόντια και μια κατακόρυφη, έτσι και ένα σύνθετο κύμα μπορούμε να το θεωρήσουμε ως αποτέλεσμα της επαλληλίας ενός αριθμού αρμονικών κυμάτων, με επιλεγμένα πλάτη και μήκη κύματος.

Θ4.12) Τι ονομάζεται συμβολή δύο η περισσότερων κυμάτων;

Η ταυτόχρονη διάδοση δύο ή περισσότερων κυμάτων στην ίδια περιοχή ενός ελαστικού μέσου ονομάζεται συμβολή.

Θ4.13) Ποιες πηγές ονομάζονται σύγχρονες;

Όταν η σταθερή διαφορά φάσης των ταλαντώσεων δύο σύμφωνων πηγών είναι ίση με μηδέν, τότε οι πηγές ονομάζονται σύγχρονες. Δηλαδή: $\Delta\phi = 0$.

Θ4.14) Πότε έχουμε ενισχυτική και πότε ακυρωτική συμβολή σ' ένα σημείο του μέσου διάδοσης στο οποίο συμβάλλουν 2 κύματα;

Στα σημεία Α, Β της ήρεμης επιφάνειας νερού έχουμε δύο πηγές όμοιων κυμάτων. Τα σημεία της επιφάνειας του νερού στα οποία συμβάλλουν τα δύο κύματα και των οποίων οι αποστάσεις r_1 και r_2 , από τις δύο πηγές διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος λ (δηλαδή $r_1 - r_2 = N\lambda$ όπου $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος. Τότε έχουμε ενίσχυση.

Τα σημεία στα οποία συμβάλλουν τα δύο κύματα και των οποίων οι αποστάσεις r_1 και r_2 από τις δύο πηγές διαφέρουν κατά περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος $\frac{\lambda}{2}$ (δηλαδή $r_1 - r_2 = (2N + 1)\frac{\lambda}{2}$ όπου $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), μένουν διαρκώς ακίνητα. Τότε έχουμε απόσβεση. Όλα τα υπόλοιπα σημεία κάνουν ταλάντωση με ενδιάμεσο πλάτος

Θ4.15) Που πάνω βρίσκονται τα σημεία στα οποία συμβαίνει ενισχυτική ή ακυρωτική συμβολή;

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων για τα οποία ισχύει $r_1 - r_2 = \text{σταθ.}$ είναι υπερβολή. Επομένως, τα σημεία στα οποία έχουμε ενισχυτική συμβολή και τα σημεία στα οποία έχουμε ακυρωτική συμβολή, βρίσκονται πάνω σε υπερβολές.

Θ4.16) Πώς ορίζεται ένα στάσιμο κύμα;

Στάσιμο κύμα ονομάζεται το αποτέλεσμα της συμβολής δύο κυμάτων της ίδιας συχνότητας και του ίδιου πλάτους που διαδίδονται στο ίδιο μέσο με αντίθετες κατευθύνσεις. Σ' ένα στάσιμο κύμα υπάρχουν σημεία που ονομάζονται δεσμοί, τα οποία παραμένουν διαρκώς ακίνητα ενώ όλα τα άλλα εκτελούν ταλάντωση με την ίδια συχνότητα. Το πλάτος της ταλάντωσης όμως δεν είναι το ίδιο για όλα τα σημεία που ταλαντώνονται. Μέγιστο πλάτος έχουν τα σημεία που βρίσκονται στο μέσο της απόστασης μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών και τα σημεία αυτά ονομάζονται κοιλίες. Η ονομασία στάσιμο οφείλεται στο γεγονός ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν έχουμε να κάνουμε με ένα κύμα, δηλαδή μια παραμόρφωση που διαδίδεται. Στο κύμα όλα τα σημεία εκτελούν διαδοχικά την ίδια κίνηση κάτι που δεν ισχύει για το στάσιμο.

Θ4.17) Ποια είναι η εξίσωση ενός στάσιμου κύματος;

Έστω ότι έχουμε ένα αρμονικό κύμα με εξίσωση:

$$y_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

το οποίο διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα x .

Ένα δεύτερο κύμα με το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα, το οποίο διαδίδεται κατά την αντίθετη κατεύθυνση θα περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y_2 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, η απομάκρυνση ενός σημείου M του μέσου τη χρονική στιγμή t , θα είναι $y = y_1 + y_2$ και προκύπτει ότι:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \quad (1)$$

Με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής ταυτότητας:

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

η σχέση (1) γίνεται:

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t}{T} \quad (2)$$

Παρατηρούμε ότι ο όρος $A' = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda}$ εξαρτάται μόνο από τη θέση x του σημείου και παραμένει σταθερός με τον χρόνο. Η σχέση (2) παίρνει τη μορφή:

$$y = A' \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow y = A' \cdot \eta\mu\omega t$$

που είναι η εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης. Άρα το κάθε σημείο του μέσου εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος ταλάντωσης $|A'|$ που δεν είναι ίδιο για όλα τα σημεία αλλά εξαρτάται από τη θέση του.

Θ4.18) Τι γνωρίζετε για τους δεσμούς και τις κοιλίες ενός στάσιμου κύματος;

Τα σημεία τα οποία βρίσκονται σε θέση x τέτοια ώστε:

$$A' = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0$$

Δηλαδή:

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, (2K+1) \frac{\pi}{2}$$

ή

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \dots, (2K+1) \frac{\lambda}{4}$$

έχουν μηδενικό πλάτος ταλάντωσης, δηλαδή παραμένουν συνεχώς ακίνητα. Είναι οι δεσμοί του στάσιμου κύματος.

Τα σημεία τα οποία βρίσκονται σε θέση x τέτοια ώστε:

$$A' = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm 2A$$

Δηλαδή:

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = 0, \pi, \dots, K\pi$$

ή

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \dots, \frac{K\lambda}{2}$$

έχουν μέγιστο πλάτος ταλάντωσης ίσο με $2A$. Είναι οι κοιλίες του στάσιμου κύματος.

Θ4.19) Με τι ισούται η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών ή μεταξύ δύο διαφορετικών δεσμών;

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών ή κοιλιών είναι ίση με το μισό του μήκους κύματος λ των κυμάτων από τη συμβολή των οποίων προήλθε το στάσιμο κύμα.

Θ4.20) Ποια είναι η ενεργειακή προσέγγιση ενός στάσιμου κύματος;

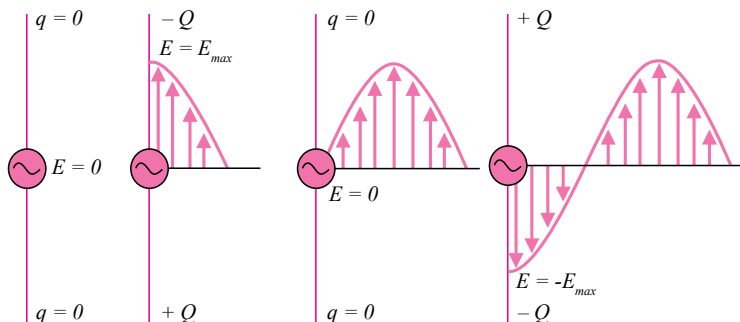
Τη στιγμή που στο στάσιμο κύμα υπάρχουν σημεία που παραμένουν ακίνητα, δε μεταφέρεται ενέργεια από ένα σημείο του μέσου στο άλλο (κάτι που δεν ισχύει στο τρέχων κύμα). Η ενέργεια που είχαν τα αρχικά κύματα, η συμβολή των οποίων έδωσε το στάσιμο, εγκλωβίζεται ανάμεσα στους δεσμούς. Σε μια χορδή, στην οποία έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, η ενέργεια μετατρέπεται συνεχώς από ελαστική δυναμική ενέργεια (όταν η χορδή είναι στιγμιαία ακίνητη) σε κινητική (όταν η χορδή διέρχεται από τη θέση ισορροπίας). Στις ενδιάμεσες θέσεις τα μόρια της χορδής έχουν και κινητική και δυναμική ενέργεια.

Θ4.21) Τι είναι το ταλαντούμενο ηλεκτρικό δίπολο;

Γνωρίζουμε ότι ένα σύστημα δύο φορτίων $+Q$ και $-Q$ δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο και ότι ένας αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα δημιουργεί γύρω του μαγνητικό πεδίο. Αν συνδέσουμε δύο μεταλλικούς αγωγούς στους πόλους μιας πηγής συνεχούς τάσης τότε οι αγωγοί φορτίζονται με φορτία $+Q$ και $-Q$, αντίστοιχα. Οι ίδιοι αγωγοί, εάν συνδεθούν με γεννήτρια εναλλασσόμενης τάσης, αποκτούν ετερόσημα φορτία $+q$ και $-q$ που μεταβάλλονται ημιτονοειδώς με τον χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι οι δύο αγωγοί διαρρέονται από εναλλασσόμενο ρεύμα. Το σύστημα αυτών των αγωγών ονομάζεται ταλαντούμενο ηλεκτρικό δίπολο. Το ταλαντούμενο ηλεκτρικό δίπολο αποτελεί την κεραία εκπομπής των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε ραδιοφωνικούς και τηλεοπτικούς σταθμούς.

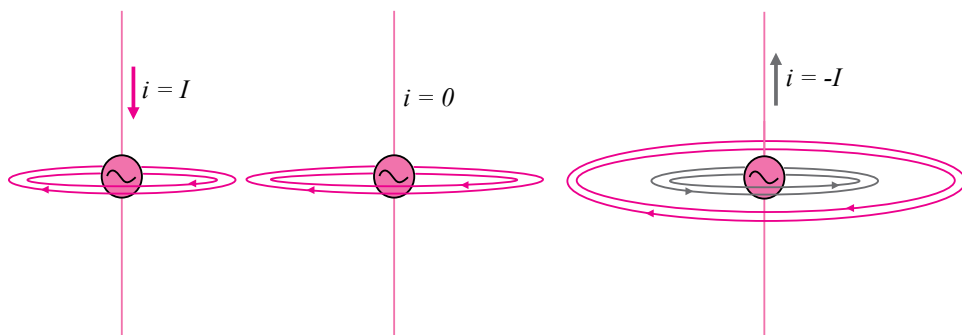
Θ4.22) Ποια είναι η διαδικασία παραγωγής ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος από ένα ταλαντούμενο ηλεκτρικό δίπολο;

Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται η διαδικασία παραγωγής ηλεκτρομαγνητικού κύματος από ένα ταλαντούμενο ηλεκτρομαγνητικό δίπολο.



Τη χρονική στιγμή $t = 0$ που αγωγοί είναι αφόρτιστοι. Καθώς η εναλλασσόμενη τάση μεταβάλλεται, στον επάνω αγωγό εμφανίζεται αρνητικό φορτίο $-q$, ενώ στον άλλο εμφανίζεται θετικό φορτίο $+q$ με αποτέλεσμα να δημιουργείται γύρω από αυτούς ηλεκτρικό πεδίο. Τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{4}$ τα φορτία στους αγωγούς έχουν πάρει τη μέγιστη τιμή. Το ηλεκτρικό πεδίο που είχε δημιουργηθεί από τη στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $\frac{T}{4}$ έχει απομακρυνθεί από τους αγωγούς. Από τη στιγμή αυτή και έπειτα τα φορτία στους αγωγούς μειώνονται και αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργούν. Ένα τέταρτο της περιόδου αργότερα τα φορτία πλέον έχουν μηδενισθεί. Στο μεταξύ το ηλεκτρικό πεδίο που είχε δημιουργηθεί μέχρι τότε απομακρύνεται από τους αγωγούς με την ταχύτητα του φωτός c . Έπειτα, καθώς η πολικότητα της πηγής αλλάζει, στον επάνω αγωγό εμφανίζεται θετικό φορτίο και στον κάτω αρνητικό. Τα φορτία λαμβάνουν τη μέγιστη τιμή τους τη χρονική στιγμή $t = \frac{3T}{4}$ και μηδενίζονται τη χρονική στιγμή $t = T$. Το φαινόμενο επαναλαμβάνεται συνεχώς με τον ίδιο τρόπο.

Στο ίδιο χρονικό διάστημα δημιουργείται και μαγνητικό πεδίο γιατί οι αγωγοί διαρρέονται από εναλλασσόμενο ρεύμα. Η ένταση του ρεύματος (άρα και το μαγνητικό πεδίο) έχει τη μέγιστη τιμή τη χρονική στιγμή $t = 0$ όπως φαίνεται και στο ακόλουθο σχήμα.



Το ρεύμα μηδενίζεται τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{4}$. Στον χρόνο που μεσολαβεί το μαγνητικό πεδίο που είχε δημιουργηθεί απλώνεται στο χώρο. Τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{2}$ οι αγωγοί διαρρέονται πάλι από ρεύμα μέγιστης έντασης. Τη στιγμή αυτή όμως η φορά του ρεύματος (όπως και των γραμμών του μαγνητικού πεδίου) είναι αντίθετη από την αρχική. Γύρω από τους αγωγούς έχει εκ νέου δημιουργηθεί μαγνητικό πεδίο το οποίο μεταβάλλεται με τη συχνότητα με την οποία μεταβάλλεται το ρεύμα στους αγωγούς. Αυτό που είναι πολύ σημαντικό είναι ότι, καθώς τα ηλεκτρικά φορτία ταλαντώνονται, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο που συνεχώς δημιουργούν απομακρύνονται από το δίπολο διαδιδόμενα με την ταχύτητα του φωτός c .

04.23) Πώς ορίζεται ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα;

Ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι η ταυτόχρονη διάδοση ενός ηλεκτρικού και ενός μαγνητικού πεδίου. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα του φωτός ενώ σε όλα τα υλικά με μικρότερη ταχύτητα.

04.24) Ποιες διαπιστώσεις προκύπτουν από τη μελέτη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων;

Από τη μελέτη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων προέκυψε ότι: Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι εγκάρσιο. Τα διανύσματα του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Κάθε χρονική στιγμή το πηλίκο των μέτρων των εντάσεων του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου ισούται με την ταχύτητα του φωτός. Δηλαδή:

$$\frac{E}{B} = c$$

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, όπως συμβαίνει και στα μηχανικά, υπακούουν στην αρχή της επαλληλίας.

04.25) Ποια είναι η αιτία δημιουργίας ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος;

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δημιουργούνται από μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο ή ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο δεν παράγει ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Επομένως τα ακίνητα φορτία όπως επίσης και τα φορτία που κινούνται με σταθερή ταχύτητα (σταθερά ρεύματα) δε μπορούν να δημιουργήσουν ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Μόνο επιταχυνόμενα ηλεκτρικά φορτία δημιουργούν ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Άρα, η αιτία δημιουργίας του ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι η επιταχυνόμενη κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων.

04.26) Ποια είναι η διαφορά φάσης μεταξύ ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος;

Οι κεραίες των ραδιοφωνικών ή τηλεοπτικών σταθμών είναι ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα. Κατά την ταλάντωση του φορτίου στην κεραία παράγεται ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Το ρεύμα γίνεται μέγιστο όταν τα φορτία στα άκρα της μηδενίζονται ενώ όταν

τα φορτία έχουν μέγιστη τιμή, το ρεύμα μηδενίζεται. Αυτό σημαίνει ότι, κοντά στην κεραία, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο έχουν διαφορά φάσης ίση με $\pi/2$ rad (όταν το ένα παίρνει τη μέγιστη τιμή του το άλλο μηδενίζεται). Σε μεγάλη όμως απόσταση από την κεραία τα δύο πεδία είναι σε φάση.

Θ4.27) Από ποιες εξισώσεις περιγράφεται το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος;

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ενός αρμονικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος που διαδίδεται κατά τη διεύθυνση x είναι:

$$E = E_{\max} \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \quad B = B_{\max} \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Θ4.28) Να περιγράψετε τις διάφορες περιοχές του φάσματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα δεν παράγονται αποκλειστικά από ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα. Σήμερα γνωρίζουμε ότι συνδέονται με έναν μεγάλο αριθμό φυσικών φαινομένων όπως είναι η αποδιέγερση των ατόμων, οι πυρηνικές διασπάσεις κ.α. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα μηκών κύματος και συχνοτήτων. Εφόσον όλα διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα c , η συχνότητά τους και το μήκος κύματός τους συνδέονται με τη σχέση:

$$c = \lambda f$$

Παρακάτω υπάρχει μια σύντομη περιγραφή των διάφορων περιοχών του φάσματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας κατά σειρά μειούμενου μήκους κύματος. Θα πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι δεν υπάρχει σαφής διαχωρισμός του κάθε τμήματος του φάσματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από τα υπόλοιπα.

Ραδιοκύματα: Είναι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα με μήκος κύματος από 10^5 m έως μερικά εκατοστά. Δημιουργούνται από ηλεκτρονικά κυκλώματα, όπως τα κυκλώματα LC, και χρησιμοποιούνται στη ραδιοφωνία και την τηλεόραση.

Μικροκύματα: Το μήκος κύματός τους εκτείνεται από 30 cm έως 1 mm περίπου. Παράγονται από ηλεκτρονικά κυκλώματα. Με κύματα αυτής της περιοχής λειτουργούν οι φούρνοι μικροκυμάτων και τα ραντάρ.

Υπέρυθρα κύματα: Καλύπτουν την περιοχή από 1mm έως $7 \cdot 10^{-7}$ m περίπου. Εκπέμπονται από τα θερμά σώματα και απορροφώνται εύκολα από τα περισσότερα υλικά. Η υπέρυθη ακτινοβολία που απορροφάται από ένα σώμα αυξάνει το πλάτος της ταλάντωσης των σωματιδίων από τα οποία αποτελείται, αυξάνοντας έτσι τη θερμοκρασία του.

Ορατό φως: Είναι το μέρος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που ανιχνεύει το ανθρώπινο μάτι. Το μήκος κύματος του ορατού φωτός κυμαίνεται από 400 nm έως 700 nm (δηλαδή από $400 \cdot 10^{-9}$ m έως $700 \cdot 10^{-9}$ m). Το ορατό φως παράγεται από την ανακατανομή των ηλεκτρονίων στα άτομα και τα μόρια. Κάθε υποπεριοχή του ορατού φάσματος προκαλεί στον άνθρωπο την αίσθηση κάποιου συγκεκριμένου χρώματος.

Τα μήκη κύματος των διαφόρων χρωμάτων του ορατού φάσματος είναι κατά προσέγγιση:

700 έως	630 nm	ερυθρό
630 έως	590 nm	πορτοκαλί
590 έως	560 nm	κίτρινο
560 έως	480 nm	πράσινο
480 έως	440 nm	κυανό
440 έως	400 nm	ιώδες

Υπεριώδης ακτινοβολία: Η ακτινοβολία αυτή καλύπτει τα μήκη κύματος από $3,8 \cdot 10^{-7}$ m έως $6 \cdot 10^{-8}$ m περίπου. Ο Ήλιος είναι μια ισχυρή πηγή υπεριώδους ακτινοβολίας. Οι υπεριώδεις ακτίνες είναι υπεύθυνες για το «μαύρισμα» όταν κάνουμε ηλιοθεραπεία το καλοκαίρι. Μεγάλες όμως δόσεις υπεριώδους ακτινοβολίας βλάπτουν τον ανθρώπινο οργανισμό. Το μεγαλύτερο μέρος της υπεριώδους ακτινοβολίας, που φτάνει στη Γη από την Ήλιο απορροφάται από τα άτομα και τα μόρια της ανώτερης ατμόσφαιρας (στρατόσφαιρα). Το όζον της στρατόσφαιρας, απορροφά κυρίως την επικίνδυνη υπεριώδη ακτινοβολία. Σήμερα ανησυχούμε για την πιθανή καταστροφή αυτής της προστατευτικής ασπίδας ενάντια στις υπεριώδεις ακτίνες του Ήλιου. Το όζον της στρατόσφαιρας ελαττώνεται λόγω της εκτεταμένης χρήσης των χλωροφθορανθράκων, ενώσεων που χρησιμοποιούνται στα ψυγεία, τα κλιματιστικά τους ψεκαστήρες και αλλού.

Ακτίνες X (ή ακτίνες Röntgen): Είναι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με μήκη κύματος 10^{-9} m έως 10^{-13} m περίπου. Η πιο κοινή αιτία παραγωγής ακτίνων X είναι η επιβράδυνση ηλεκτρονίων που προσπίπτουν με μεγάλη ταχύτητα σε έναν μεταλλικό στόχο. Οι ακτίνες X χρησιμοποιούνται στην Ιατρική, κυρίως για διαγνωστικούς σκοπούς (ακτινογραφίες) και στη μελέτη διαφόρων κρυσταλλικών δομών. Οι ακτίνες X μπορούν να προκαλέσουν βλάβες στους ζωντανούς οργανισμούς και έτσι πρέπει να αποφεύγουμε την έκθεσή μας σε αυτές εάν δεν υπάρχει σοβαρή αιτία.

Ακτίνες γ: Είναι ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που εκπέμπεται από ορισμένους ραδιενεργούς πυρήνες καθώς και σε αντιδράσεις πυρήνων και στοιχειωδών σωματιδίων ή ακόμα και κατά τη διάσπαση στοιχειωδών σωματιδίων. Τα μήκη κύματος ξεκινούν από 10^{-10} m και φτάνουν έως τα 10^{-14} m. Είναι πολύ διεισδυτικές και βλάπτουν τους οργανισμούς οι οποίοι τις απορροφούν.

Θ4.29) Ποια ακτινοβολία ονομάζεται μονοχρωματική;

Μια ακτινοβολία που περιέχει μήκη κύματος σε μια πολύ στενή περιοχή την ονομάζουμε μονοχρωματική. Για παράδειγμα μια ακτινοβολία από 490 έως 491 nm είναι μια πράσινη μονοχρωματική ακτινοβολία. Τέτοιου είδους ακτινοβολία μπορούμε να πάρουμε με τη χρήση ειδικών πηγών ή φίλτρων. Όταν χρησιμοποιούμε την έκφραση «μονοχρωματικό φως με μήκος κύματος 580 nm» στην πραγματικότητα εννοούμε φως σε μια στενή περιοχή μηκών κύματος γύρω στα 580 nm. Το απόλυτα μονοχρωματικό φως, δηλαδή το φως από αποτελείται μόνο από ένα μήκος κύματος, αποτελεί μια εξιδανίκευση. Μια διάταξη που παράγει φως που πλησιάζει πολύ στο απόλυτα μονοχρωματικό είναι το λείζερ.

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

Θ5.1) Τι γνωρίζετε για τον νόμο των Biot-Savart;

Σύμφωνα με τον νόμο των Biot-Savart αν ένας αγωγός διαρρέεται από ρεύμα έντασης I , ένα πολύ μικρό τμήμα του, μήκους Δl , δημιουργεί σε ένα σημείο A που απέχει απόσταση r από το τμήμα Δl μαγνητικό πεδίο $\Delta \vec{B}$ μέτρου:

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot \Delta l}{r^2} \sin \theta$$

όπου μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα του κενού και θ η γωνία ανάμεσα στα διανύσματα $\Delta \vec{l}$ και $\vec{r}$.

Το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής $\Delta \vec{B}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $\Delta \vec{l}$, $\vec{r}$ και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Αν τοποθετήσουμε την παλάμη του δεξιού χεριού στο επίπεδο που ορίζεται από το $\Delta \vec{l}$ και το σημείο A , έτσι ώστε ο αντίχειρας να δείχνει τη φορά του ρεύματος και τα υπόλοιπα δάχτυλα να βρίσκονται από την πλευρά του σημείου A , τότε, αν τα κάμψουμε, τα υπόλοιπα δάχτυλα θα δείξουν τη φορά του $\Delta \vec{B}$. Το τμήμα $\Delta \vec{l}$ θεωρείται προσανατολισμένο, με φορά ίδια με τη φορά του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό. Η τιμή της μαγνητικής διαπερατότητας του κενού είναι: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$. Το μαγνητικό πεδίο B , στο S.I. μετριέται σε Tesla (T). Ο νόμος των Biot και Savart, δίνει το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από ένα μόνο πολύ μικρό τμήμα $\Delta \vec{l}$ του αγωγού. Για να βρούμε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ολόκληρος ο αγωγός σε ένα σημείο A , πρέπει να τον χωρίσουμε σε άπειρα πολύ μικρά τμήματα $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3, \dots, \Delta l_n$ και στη συνέχεια να αθροίσουμε (διανυσματικά) τα αντίστοιχα μαγνητικά πεδία $\Delta \vec{B}_1, \Delta \vec{B}_2, \Delta \vec{B}_3, \dots, \Delta \vec{B}_n$ που δημιουργούν όλα αυτά τα μικρά τμήματα του αγωγού στο σημείο που εξετάζουμε. Δηλαδή:

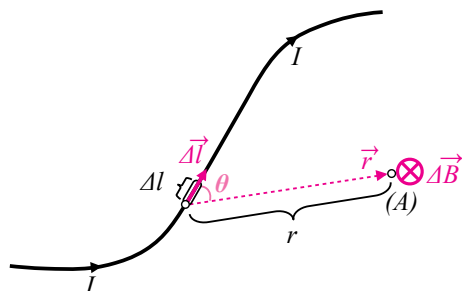
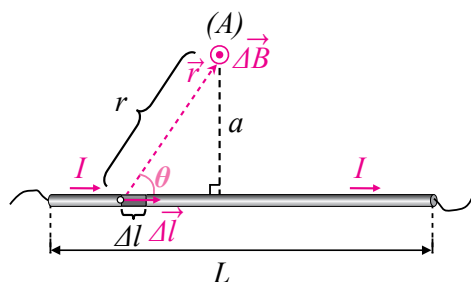
$$\vec{B} = \sum \Delta \vec{B} \Rightarrow \Delta \vec{B}_1 + \Delta \vec{B}_2 + \Delta \vec{B}_3 + \dots + \Delta \vec{B}_n$$

Ο νόμος των Biot και Savart είναι θεμελιώδης νόμος στον μαγνητισμό και παίζει ρόλο ανάλογο με εκείνον του Coulomb στον στατικό ηλεκτρισμό.

Θ5.2) Πώς εφαρμόζεται ο νόμος των Biot-Savart στην περίπτωση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο ενός ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού;

Έστω ο ευθύγραμμος αγωγός του διπλανού σχήματος ο οποίος έχει μήκος L και διαρρέεται από ρεύμα έντασης I .

Για να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ο αγωγός στο σημείο (A) , που απέχει απόσταση a από τον αγωγό, χωρίζουμε τον αγωγό σε πολύ μικρά στοιχειώ-



δη τμήματα. Έστω ένα τέτοιο τμήμα μήκους Δl που απέχει απόσταση r από το σημείο (A). Το μικρό αυτό τμήμα δημιουργεί στο σημείο (A) μαγνητικό πεδίο μέτρου:

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \Delta l}{r^2} \cdot \eta \mu \theta$$

διεύθυνσης κάθετης στη σελίδα και φοράς από τη σελίδα προς τον αναγνώστη.

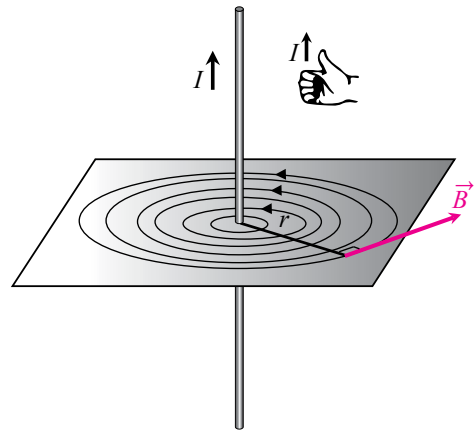
Για να βρούμε το πεδίο που δημιουργεί ολόκληρος ο αγωγός, στο σημείο (A), αθροίζουμε τα πεδία όλων των τμημάτων στα οποία έχουμε χωρίσει τον αγωγό. Δηλαδή:

$$B = \sum \Delta B \Rightarrow B = \sum \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \Delta l}{r^2} \cdot \eta \mu \theta \Rightarrow$$

Στην περίπτωση που ο αγωγός έχει άπειρο μήκος αποδεικνύεται ότι σε σημείο που απέχει απόσταση r από τον αγωγό, το μέτρο της έντασης $\vec{B}$ θα δίνεται από τη σχέση:

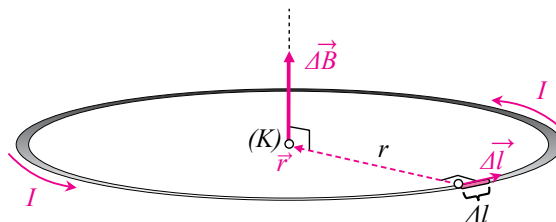
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{r}$$

Οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ένας αγωγός μεγάλου μήκους είναι ομόκεντροι κύκλοι που έχουν κέντρο τον ρευματοφόρο αγωγό και το επίπεδό τους είναι κάθετο σε αυτόν. Η διεύθυνση της έντασης $\vec{B}$ σε ένα σημείο του μαγνητικού πεδίου, είναι εφαπτόμενη της δυναμικής γραμμής που διέρχεται από το σημείο αυτό και κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τον αγωγό και το σημείο. Η φορά των δυναμικών γραμμών μπορεί να βρεθεί εύκολα με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Σύμφωνα με αυτόν, τοποθετούμε τον αντίχειρα του δεξιού χεριού στην κατεύθυνση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό και κάμπτουμε τα υπόλοιπα δάχτυλα. Η φορά των δυναμικών γραμμών είναι ίδια με τη φορά που καθορίζουν τα δάχτυλα.



Θ5.3) Πώς εφαρμόζεται ο νόμος των Biot-Savart στην περίπτωση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο ενός κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού;

Κυκλικός αγωγός ακτίνας r διαρρέεται από ρεύμα έντασης I . Για να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ένας τέτοιος αγωγός στο κέντρο του, χωρίζουμε τον αγωγό σε πολύ μικρά στοιχειώδη τμήματα μήκους Δl το καθένα.



Σύμφωνα με το νόμο των Biot και Savart, κάθε στοιχειώδες τμήμα Δl δημιουργεί στο κέντρο (Κ) μαγνητικό πεδίο μέτρου:

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \Delta l}{r^2} \cdot \sin 90^\circ \Rightarrow \Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \Delta l}{r^2}$$

Η διεύθυνση του $\vec{\Delta B}$ στο κέντρο του αγωγού είναι κάθετη στο επίπεδο του κυκλικού αγωγού με φορά προς τα πάνω. Αν υπολογίσουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού αγωγού εξαιτίας όλων των στοιχειωδών τμημάτων, θα διαπιστώσουμε ότι όλα έχουν το ίδιο μέτρο έντασης και ίδια κατεύθυνση. Το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ που δημιουργεί ολόκληρος ο κυκλικός αγωγός προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων που δημιουργούν τα στοιχειώδη τμήματα του αγωγού και επειδή όλα έχουν την ίδια κατεύθυνση, τελικά έχουμε:

$$B = \Delta B_1 + \Delta B_2 + \Delta B_3 + \dots \quad \Delta B_v = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I(\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \dots \Delta l_v)}{r^2}$$

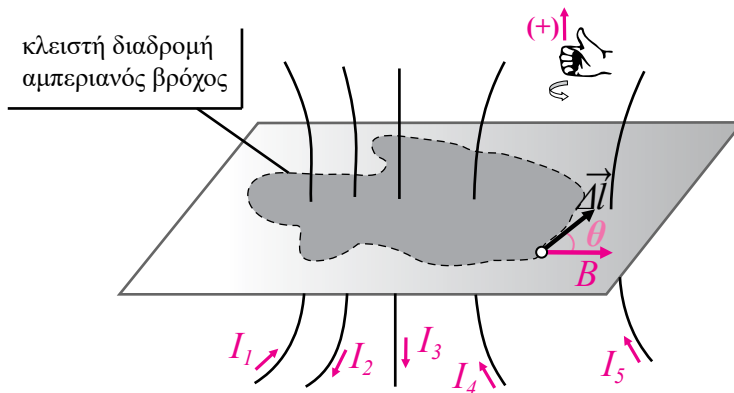
Το άθροισμα $\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \dots \Delta l_v$ δίνει την περίμετρο του κυκλικού αγωγού $2\pi r$ οπότε η τελευταία σχέση γίνεται:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I}{r}$$

Η διεύθυνση της έντασης $\vec{B}$ του πεδίου είναι κάθετη στο επίπεδο του κυκλικού αγωγού. Η φορά της έντασης $\vec{B}$ προσδιορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Θ5.4) Τι γνωρίζετε για τον νόμο του Ampère;

Ο νόμος του Ampère είναι μια γενική σχέση ανάμεσα στο μαγνητικό πεδίο και στις πηγές του.



Σύμφωνα με τον νόμο αυτόν: το άθροισμα των γινομένων $B \cdot \Delta l \cdot \sin\theta$ κατά μήκος μιας οποιασδήποτε κλειστής διαδρομής είναι ίσο με το γινόμενο $\mu_0 \cdot I_{\text{εγκ}}$ όπου $I_{\text{εγκ}}$ το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων που διέρχονται από την επιφάνεια η οποία περιβάλλεται από την κλειστή αυτή διαδρομή, δηλαδή:

$$\sum B \cdot \Delta l \cdot \sin\theta \Rightarrow \mu_0 \cdot I_{\text{εγκ}}$$

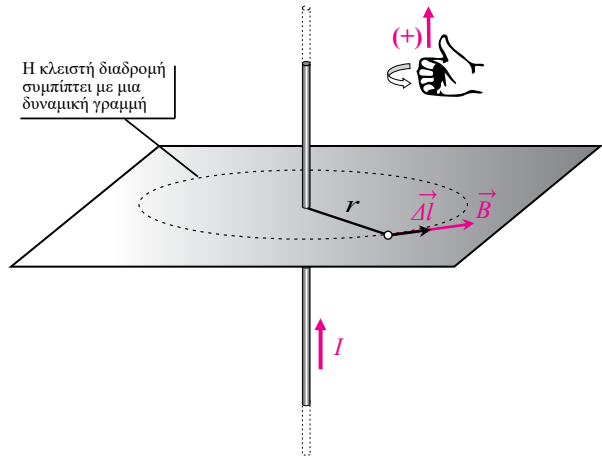
Η φορά που αντιστοιχεί σε θετικό ρεύμα ορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Αν τα δάκτυλα του δεξιού χεριού δείχνουν τη φορά κίνησης στον βρόχο, ο αντίχειρας ορίζει τη θετική φορά για τα ρεύματα. Το $\vec{B}$ στην παραπάνω σχέση οφείλεται τόσο στα ρεύματα που περικλείει ο βρόχος (κλειστή διαδρομή) όσο και σε ρεύματα που βρίσκονται έξω από αυτόν. Πρέπει να τονιστεί ότι ο νόμος του Ampère ισχύει μόνο για σταθερά ρεύματα και για σταθερά μαγνητικά πεδία.

Όπως ο νόμος του Gauss μάς επιτρέπει να υπολογίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από συμμετρικές κατανομές φορτίου, έτσι και ο νόμος του Ampère μάς διευκολύνει να υπολογίζουμε την ένταση σε μαγνητικά πεδία που εμφανίζουν συμμετρία.

Π5.5) Πώς εφαρμόζεται ο νόμος του Ampère στην περίπτωση του μαγνητικού πεδίου ενός ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού;

Το μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού μπορεί να υπολογιστεί και με τη βοήθεια του νόμου του Ampère:

Έστω ευθύγραμμος αγωγός πολύ μεγάλου μήκους, ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα έντασης I . Για να υπολογίσουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ σε κάποια απόσταση r από τον αγωγό θεωρούμε κλειστή κυκλική διαδρομή με το επίπεδό της κάθετο στον αγωγό



και το κέντρο της επί του αγωγού. Χωρίζουμε τη διαδρομή σε πολύ μικρά ευθύγραμμα τμήματα Δl . Θα υπολογίσουμε το άθροισμα των γινομένων $B\Delta l \cdot \cos\theta$ κατά μήκος της κυκλικής διαδρομής. Η κατεύθυνση των τμημάτων Δl σε κάθε σημείο είναι ίδια με την κατεύθυνση του $\vec{B}$ σε εκείνο το σημείο επομένως για τη γωνία θ ισχύει:

$$\theta = 0^\circ \Rightarrow \cos\theta = 1$$

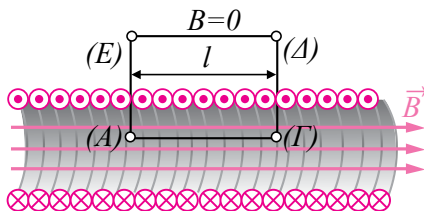
οπότε $\sum B\Delta l \cdot \cos\theta = \sum B\Delta l$. Όμως το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι σταθερό οπότε το άθροισμα γράφεται:

$$\sum B\Delta l \cdot \cos\theta = \sum B\Delta l = B \sum \Delta l$$

Το άθροισμα $\sum \Delta l$ είναι η περίμετρος της κυκλικής γραμμής, δηλαδή $\sum \Delta l = 2\pi r$. Εφαρμόζοντας τον νόμο του Ampère έχουμε:

$$\sum B\Delta l \cdot \cos\theta = \mu_0 I_{\text{εγκ.}} \Rightarrow B \sum \Delta l = \mu_0 I \Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{r}$$

Θ5.6) Πώς εφαρμόζεται ο νόμος του Ampère στην περίπτωση του μαγνητικού πεδίου ενός ρευματοφόρου σωληνοειδούς απείρου μήκους;



Στο σχήμα βλέπουμε την τομή ενός σωληνοειδούς με επίπεδο που περιέχει τον άξονά του. Γνωρίζουμε (πειραματικά) ότι στο εσωτερικό ενός σωληνοειδούς μεγάλου μήκους το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές και παράλληλο με τον άξονά του. Έξω από το σωληνοειδές το πεδίο είναι ασθενές, συγκρινόμενο με το πεδίο στο εσωτερικό. Στην ιδανική περίπτωση που το μήκος του σωληνοειδούς είναι άπειρο, το μαγνητικό πεδίο έξω από αυτό μπορεί να θεωρηθεί μηδέν. Εφαρμόζουμε τον νόμο του Ampère επιλέγοντας μια διαδρομή σχήματος ορθογωνίου μήκους l , όπως στο σχήμα. Το άθροισμα των γινομένων $B\Delta l \cdot \sin\theta$ κατά μήκος της διαδρομής ΑΓ είναι Bl . Κατά μήκος των διαδρομών ΓΔ και ΕΑ το ίδιο άθροισμα είναι μηδέν γιατί, όπου υπάρχει, το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στη διαδρομή. Επομένως $\sin\theta = \sin 90^\circ = 1$. Τέλος, κατά μήκος της ΔΕ είναι επίσης μηδέν γιατί στην περιοχή αυτή δεν υπάρχει μαγνητικό πεδίο ($B = 0$). Επομένως:

$$\sum B\Delta l \cdot \sin\theta = Bl$$

Σύμφωνα με τον νόμο του Ampère το άθροισμα αυτό είναι ίσο με το γινόμενο της σταθεράς μ_0 επί το συνολικό ρεύμα που διαπερνά το ορθογώνιο πλαίσιο. Αν I το ρεύμα που διαρρέει κάθε σπείρα και N ο αριθμός των σπειρών που περιέχονται στο ορθογώνιο πλαίσιο, τότε το ολικό ρεύμα που διέρχεται είναι NI .

Επομένως $\sum B\Delta l \cdot \sin\theta = \mu_0 I_{\text{εγκ.}} = \mu_0 NI \Rightarrow Bl = \mu_0 NI$ οπότε:

$$B = \mu_0 I \frac{N}{l}$$

Αν όπου N/l θέσουμε n , όπου το n αντιπροσωπεύει τον αριθμό των σπειρών N ανά μονάδα μήκους l , η τελευταία σχέση γίνεται:

$$B = \mu_0 In$$

Παρόλο που η σχέση αυτή βρέθηκε για σωληνοειδές απείρου μήκους, δίνει με μεγάλη ακρίβεια το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό οποιουδήποτε σωληνοειδούς με μεγάλο μήκος. Στα άκρα του σωληνοειδούς η τιμή του B είναι μικρότερη, περίπου η μισή.

Θ5.7) Πώς υπολογίζεται η μαγνητική ροή για μια επίπεδη επιφάνεια μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο;

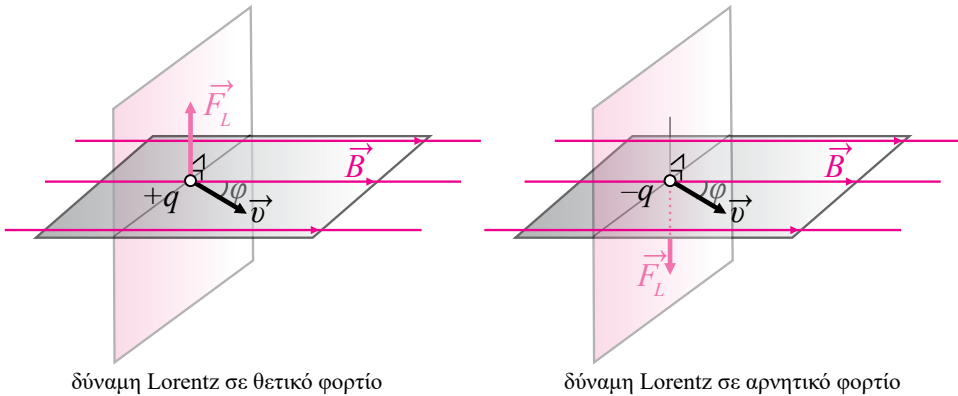
Μια επίπεδη επιφάνεια εμβαδού A βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου B . Μαγνητική ροή Φ ονομάζεται το μονόμετρο μέγεθος που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Phi = BA \cdot \sin\theta$$

όπου θ η γωνία ανάμεσα στις δυναμικές γραμμές και σε μια κάθετη στην επιφάνεια. Η

μαγνητική ροή εκφράζει τον αριθμό των δυναμικών που διέρχονται μέσα από την επιφάνεια. Μονάδα μέτρησης της μαγνητικής ροής στο S.I. είναι το 1 Weber. Αν η επιφάνεια A δεν είναι επίπεδη ή αν το μαγνητικό πεδίο δεν είναι ομογενές ή αν συμβαίνουν και τα δύο, για να υπολογίσουμε τη μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια χωρίζουμε την επιφάνεια σε στοιχειώδη τμήματα ΔA , τόσο μικρά ώστε να μπορούν να θεωρηθούν επίπεδα και το μαγνητικό πεδίο στην περιοχή καθενός να μπορεί να θεωρηθεί σταθερό. Υπολογίζουμε τη ροή που διέρχεται από κάθε επιφάνεια ΔA . Το άθροισμα των μαγνητικών ροών που διέρχονται από αυτά τα στοιχειώδη τμήματα θα είναι η ροή που περνάει από την επιφάνεια A .

¶5.8) Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της δύναμης Lorentz που ασκείται σε κινούμενα ηλεκτρικά φορτία μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο;



Το μαγνητικό πεδίο ασκεί στα κινούμενα ηλεκτρικά φορτία δύναμη Lorentz μέτρου:

$$F_L = B|q|v \cdot \eta\mu\phi$$

όπου ϕ η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα $\vec{v}$ του φορτίου με την ένταση $\vec{B}$ του μαγνητικού πεδίου.

Η δύναμη είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{v}$, $\vec{B}$ και η φορά της καθορίζεται από τον κανόνα των τριών δαχτύλων του δεξιού χεριού ως εξής: Τοποθετούμε τον δείκτη πάντα στη φορά της έντασης του μαγνητικού πεδίου (φορά δυναμικών γραμμών), τον αντίχειρα στη φορά της ταχύτητας αν πρόκειται για θετικό φορτίο και αντίθετα απ' την ταχύτητα αν πρόκειται για αρνητικό φορτίο, οπότε ο μέσος δείχνει τότε τη φορά της δύναμης. Όταν ένα φορτισμένο σωματίδιο κινείται με ταχύτητα v , μέσα σε μαγνητικό πεδίο, η δύναμη που του ασκεί το πεδίο μπορεί να μεταβάλει την κατεύθυνση αλλά όχι και το μέτρο της ταχύτητάς του. Εφόσον η δύναμη είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητα του σωματιδίου, είναι κάθετη σε κάθε στοιχειώδη μετατόπισή του. Επομένως το έργο της σε κάθε τέτοια στοιχειώδη μετατόπιση είναι μηδέν. Συνδυάζοντας το συμπέρασμα αυτό με το θεώρημα έργου - ενέργειας συμπεραίνουμε ότι η δύναμη αυτή δεν μπορεί να μεταβάλει την κινητική ενέργεια του φορτισμένου σωματιδίου.

Θ5.9) Ποιο είναι το είδος της κίνησης που εκτελεί ένα φορτισμένο σωματίδιο που εκτοξεύεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο παράλληλα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου;

Επειδή $\varphi = 0^\circ$ ή $\varphi = 180^\circ$ η δύναμη Lorentz που ασκεί το μαγνητικό πεδίο στο σωματίδιο είναι μηδέν και επομένως αυτό θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Θ5.10) Ποιο είναι το είδος της κίνησης που εκτελεί ένα φορτισμένο σωματίδιο που εκτοξεύεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές του πεδίου; Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της κίνησης αυτής;

Επειδή $\varphi = 90^\circ$ το μέτρο της δύναμης Lorentz θα είναι: $F_L = qvB$.

Η δύναμη αυτή έχει σταθερό μέτρο και είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητα του σωματιδίου, επομένως θα έχει τον ρόλο κεντρομόλου δύναμης. Το σωματίδιο μάζας m και φορτίου q θα εκτελέσει ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας R και περιόδου T . Αφού η δύναμη Lorentz δρα ως κεντρομόλος, για την ακτίνα R της κυκλικής τροχιάς έχουμε:

$$F_L = F_c \Rightarrow Bv|q| = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{B|q|} \quad (1)$$

Κάνοντας χρήση του τύπου υπολογισμού του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας (v) με την οποία κινείται το φορτισμένο σωματίδιο κατά τη διάρκεια της κυκλικής του τροχιάς, υπολογίζουμε την περίοδο T . Ισχύει:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi R}{v} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} T = \frac{2\pi \cdot \frac{mv}{B|q|}}{v} \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{B|q|} \quad (2)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που θα εκτελέσει το φορτισμένο σωματίδιο είναι ανάλογη με το μέτρο της ταχύτητάς του και εξαρτάται από το είδος του φορτισμένου σωματιδίου (μάζα και φορτίο του), ενώ από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η περίοδος περιστροφής του φορτισμένου σωματιδίου εξαρτάται μόνο από το είδος του φορτισμένου σωματιδίου και όχι από την ταχύτητά του. Έτσι αν από ένα σημείο (Λ) ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου εκτοξεύσουμε ταυτόχρονα όμοια φορτισμένα σωματίδια με διαφορετικές ταχύτητες κάθετα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου, τότε αυτά ταυτόχρονα θα επιστρέψουν στο σημείο (Λ) διαγράφοντας όμως κύκλους διαφορετικών ακτινών.

Θ5.11) Ποιο είναι το είδος της κίνησης που εκτελεί ένα φορτισμένο σωματίδιο που εκτοξεύεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με ταχύτητα που σχηματίζει τυχαία γωνία τις δυναμικές γραμμές του πεδίου; Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της κίνησης αυτής;

Έστω ένα σωματίδιο που εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο και η κατεύθυνση της ταχύτητάς του σχηματίζει με τις δυναμικές γραμμές γωνία $0 < \varphi < 90^\circ$. Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{v}$ του σωματιδίου σε δύο κάθετες συνιστώσες, μια συνιστώσα $\vec{v}_{//}$ παράλληλη στις δυναμικές γραμμές και μια συνιστώσα $\vec{v}_{\perp}$ κάθετη. Το σωματίδιο θα εκτελέσει ελικοειδή κίνηση. Η ακτίνα της έλικας είναι $R = \frac{mv_{\perp}}{B|q|}$ και η περίοδος της έλικας είναι $T = \frac{2\pi m}{B|q|}$. Βήμα της έλικας ονομάζουμε την απόσταση που διανύει το σωματίδιο στον χρόνο κάθε περιόδου και υπολογίζεται από τον τύπο $\beta = v_{\perp} \frac{2\pi m}{B|q|}$.

Θ5.12) Πώς λειτουργεί ο επιλογέας ταχυτήτων;

Έστω θετικά φορτισμένο σωματίδιο μάζας m και φορτίου $+q$ το οποίο εισέρχεται με ταχύτητα μέτρου v σε μια περιοχή όπου συνυπάρχουν ομογενές ηλεκτρικό και ομογενές μαγνητικό πεδίο. Οι δυναμικές γραμμές των δύο πεδίων είναι κάθετες μεταξύ τους και ταυτόχρονα η διεύθυνση της ταχύτητας του φορτισμένου σωματιδίου είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές και των δύο πεδίων. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι κατακόρυφο προς τα κάτω ενώ το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, με φορά προς τα μέσα όπως φαίνεται στο σχήμα. Το φορτισμένο σωματίδιο δέχεται δύο δυνάμεις μια από κάθε πεδίο οι οποίες έχουν αντίθετη φορά. Δέχεται δύναμη $\vec{F}_{\eta\lambda.}$ από το ηλεκτρικό πεδίο, η οποία είναι ομόρροπη στις δυναμικές του γραμμές (αφού είναι θετικό) και μέτρου:

$$F_{\eta\lambda.} = E \cdot |q|$$

Από το μαγνητικό πεδίο δέχεται δύναμη $\vec{F}_L$ αντίρροπη της δύναμης $\vec{F}_{\eta\lambda.}$ από το ηλεκτρικό πεδίο και μέτρου:

$$F_L = Bv|q|\sin 90^\circ \Rightarrow F_L = Bv|q|$$

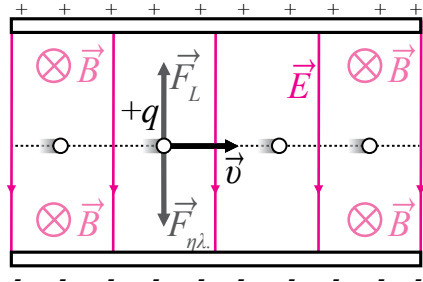
Εάν επιλέξουμε τις εντάσεις των δύο πεδίων με τέτοιο τρόπο, ώστε η δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο να εξισορροπείται από τη δύναμη από το μαγνητικό πεδίο, το φορτισμένο σωματίδιο θα συνεχίσει ανεπηρέαστο την πορεία του εκτελώντας Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με την εισερχόμενη ταχύτητα v . Εξισώνοντας τη μαγνητική με την ηλεκτρική δύναμη, βρίσκουμε την εν λόγω ταχύτητα v :

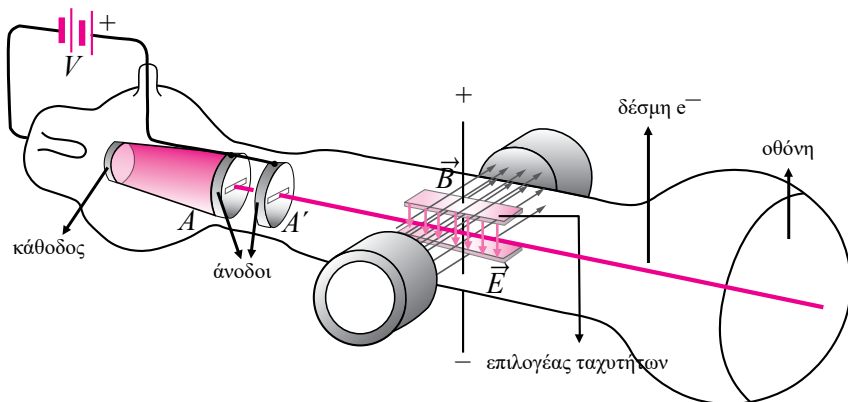
$$F_{\eta\lambda.} = F_L \Rightarrow E \cdot |q| = Bv|q| \Rightarrow v = \frac{E}{B}$$

Αν όλα τα φορτισμένα σωματίδια μιας δέσμης έχουν ταχύτητα μέτρου $v = \frac{E}{B}$, τότε δεν εκτρέπονται από το σύνθετο πεδίο. Αν όμως η δέσμη αποτελείται από φορτισμένα σωματίδια με διαφορετικές ταχύτητες, τότε μόνο αυτά που έχουν ταχύτητα $v = \frac{E}{B}$ θα συνεχίσουν την ευθύγραμμη πορεία τους. Μια τέτοια διάταξη ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου επιτρέπει να απομονώσουμε τα σωματίδια ορισμένης ταχύτητας και γι' αυτό λέγεται «επιλογέας ταχυτήτων» ή «φίλτρο ταχυτήτων».

Θ5.13) Τι γνωρίζετε για το πείραμα του Thomson που οδήγησε στη μέτρηση του ειδικού φορτίου του ηλεκτρονίου;

Ο Thomson απέδειξε πειραματικά την ύπαρξη του ηλεκτρονίου. Το πείραμά του έγινε με μια συσκευή όπως αυτή του ακόλουθου σχήματος.





Μέσα σε ένα γυάλινο δοχείο, στο οποίο επικρατεί υψηλό κενό, ηλεκτρόνια που προέρχονται από μια πυρακτωμένη κάθοδο, επιταχύνονται από τη διαφορά δυναμικού V ανάμεσα στην κάθοδο και τις ανόδους A και A' και σχηματίζουν μια δέσμη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Έργου - Ενέργειας για να υπολογίσουμε την ταχύτητα που θα αποκτήσουν τα ηλεκτρόνια (θεωρούμε ότι αυτά ξεκινούν από την ηρεμία).

$$\Theta.Μ.Κ.Ε.: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow K_{\text{τελ.}} - K_{\text{αρχ.}} = W_{F_{\text{ηλ.}}} \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = |q_e| V \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2|q_e|V}{m}} \quad (1)$$

Η δέσμη των ηλεκτρονίων εισέρχεται σε έναν επιλογέα (φίλτρο) ταχυτήτων και στη συνέχεια πέφτει σε μια οθόνη, στο άκρο του σωλήνα, η οποία είναι καλυμμένη με υλικό που φθορίζει (εκπέμπει ορατό φως). Στο σημείο που τα ηλεκτρόνια πέφτουν πάνω στην οθόνη το φθορίζον υλικό φωτοβολεί. Τα ηλεκτρόνια διέρχονται χωρίς απόκλιση από τον επιλογέα ταχυτήτων μόνο όταν η ταχύτητά τους είναι:

$$v = \frac{E}{B} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

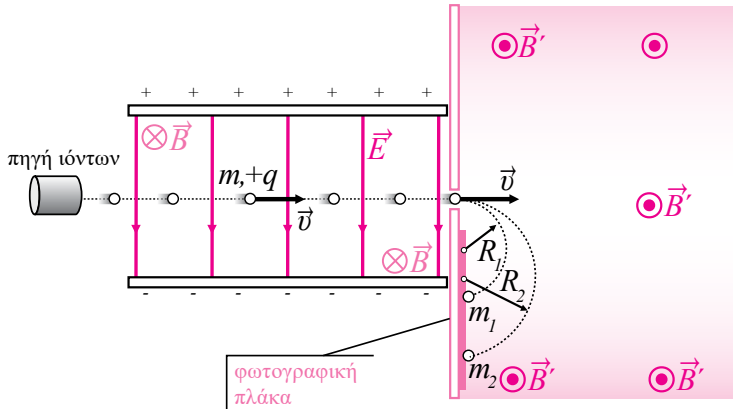
$$\frac{E}{B} = \sqrt{\frac{2|q_e|V}{m}} \Rightarrow \frac{|q_e|}{m} = \frac{E^2}{2VB^2}$$

Οι ποσότητες E , V και B μπορούν να μετρηθούν και έτσι να προσδιοριστεί το πηλίκο $\frac{|q_e|}{m}$ το οποίο ονομάζεται ειδικό φορτίο του ηλεκτρονίου. Με αυτήν τη μέθοδο δεν είναι δυνατό να μετρηθούν το φορτίο και η μάζα του ηλεκτρονίου χωριστά παρά μόνο το πηλίκο τους. Ο Thomson βρήκε ότι το πηλίκο αυτό έχει πάντοτε την ίδια τιμή, ανεξάρτητα από το υλικό της καθόδου ή οποιαδήποτε άλλη συνθήκη του πειράματος. Το γεγονός αυτό έδειξε ότι τα σωματίδια της δέσμης, τα οποία τώρα πια ονομάζονται ηλεκτρόνια, είναι κοινό συστατικό όλης της ύλης. Έτσι, στον Thomson αποδίδεται η ανακάλυψη του πρώτου υποατομικού σωματιδίου, του ηλεκτρονίου. Μια αποδεκτή σήμερα τιμή του πηλίκου αυτού είναι $\frac{|q_e|}{m} = 1,75881962 \text{ C/kg}$. Ο Thomson απέδωσε τη μεγάλη τιμή του πηλίκου στη «μικρότητα της μάζας m ή στο μεγάλο φορτίο $|q_e|$, ή σε ένα συνδυασμό και των δύο». Δεκαπέντε χρόνια αργότερα ο Millikan υπολόγισε το στοιχειώδες ηλεκτρικό

φορτίο. Η τιμή του $|q_e|$ και η τιμή του πηλίκου που υπολόγισε ο Thomson έκαναν δυνατό τον προσδιορισμό της μάζας του ηλεκτρονίου. Μια αποδεκτή σήμερα τιμή της μάζας του ηλεκτρονίου είναι $m_e = 9,1093897 \text{ kg}$.

Θ5.14) Τι γνωρίζετε για τον φασματογράφο μάζας;

Ο φασματογράφος μάζας είναι ένα όργανο που διαχωρίζει ιόντα που έχουν διαφορετικό πηλίκο μάζας προς φορτίο.



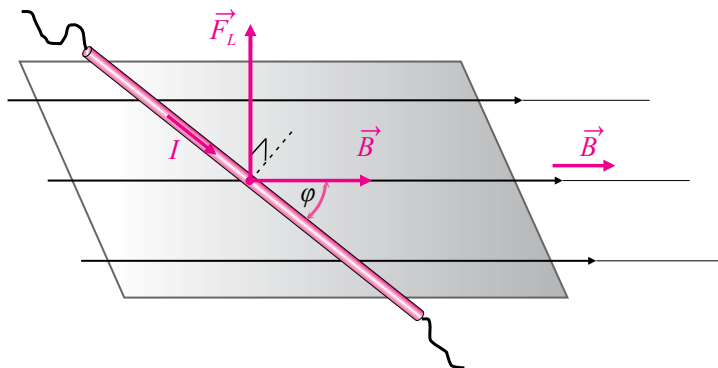
Η αρχή λειτουργίας του είναι η εξής: Μια πηγή ιόντων παράγει κινούμενα ιόντα σχηματίζοντας μια λεπτή δέσμη τα οποία στη συνέχεια περνούν μέσα από έναν επιλογέα (φίλτρο) ταχυτήτων του οποίου οι εντάσεις του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου είναι $\vec{E}$ και $\vec{B}$ αντίστοιχα. Από τον επιλογέα ταχυτήτων διέρχονται μόνο εκείνα που έχουν ταχύτητα $v = \frac{E}{B}$ (1). Έπειτα τα ιόντα που διέρχονται από τον επιλογέα ταχυτήτων εισέρχονται σε μια περιοχή όπου υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}'$, του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι κάθετες στην ταχύτητά τους. Το μαγνητικό πεδίο αναγκάζει τα ιόντα να κινηθούν σε ημικυκλική τροχιά, ακτίνας R , μέχρι να πέσουν πάνω σε μια φωτογραφική πλάκα. Για την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς μέσα στο μαγνητικό πεδίο ισχύει $R = \frac{mv}{B'|q|}$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{m}{|q|} = \frac{RBB'}{E} \quad (3)$$

Από το ίχνος που αφήνουν στη φωτογραφική πλάκα μπορεί να υπολογιστεί η ακτίνα R της τροχιάς που διέγραψαν τα ιόντα ενώ τα μέτρα των εντάσεων των πεδίων E, B και B' είναι γνωστά. Δύο σωματίδια με ίδιο φορτίο αλλά με διαφορετική μάζα θα αφήσουν στη φωτογραφική πλάκα διαφορετικά ίχνη. Άτομα των οποίων οι πυρήνες έχουν τον ίδιο αριθμό πρωτονίων (ατομικός αριθμός) αλλά διαφορετικό μαζικό αριθμό (αριθμό πρωτονίων και νετρονίων), ονομάζονται ισότοπα. Με τη σχέση (3), μετράμε τις μάζες των διαφόρων ισωτόπων ενός δεδομένου ιόντος με γνωστό φορτίο. Επίσης, μπορούμε να μετρήσουμε και τους λόγους των μαζών, ακόμη και εάν δε γνωρίζουμε το φορτίο. Τέλος από τη σχέση (3) προκύπτει ότι ιόντα με μεγαλύτερη μάζα κινούνται σε τροχιές με μεγαλύτερη ακτίνα.

Θ5.15) Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της δύναμης Laplace που ασκείται σε ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο;

$$F_L = BIl\eta\mu\varphi$$



Ένα μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου B ασκεί σε ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό που βρίσκεται μέσα σ' αυτόν δύναμη Laplace μέτρου:

$$F_L = BIl \cdot \eta\mu\varphi \quad (1)$$

όπου φ η γωνία που σχηματίζει η διεύθυνση του αγωγού με τις δυναμικές γραμμές, l το μήκος του αγωγού και I η ένταση του ρεύματος που τον διαρρέει. Η δύναμη Laplace είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τον αγωγό και τις δυναμικές γραμμές και η φορά της καθορίζεται από τον κανόνα των 3 δαχτύλων του δεξιού χεριού. Σχηματίζουμε τρισορθογώνιο σύστημα με τα τρία δάκτυλα (αντίχειρας, δείκτης, μέσος) του δεξιού χεριού. Αν ο αντίχειρας δείχνει τη φορά του ρεύματος και ο δείκτης τη φορά του πεδίου, ο μέσος θα δείχνει τη φορά της δύναμης. Το σημείο εφαρμογής της είναι στο μέσο του τμήματος του αγωγού που βρίσκεται μέσα στο πεδίο.

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι εάν ο ρευματοφόρος αγωγός είναι παράλληλος στο μαγνητικό πεδίο ($\varphi = 0^\circ$ ή $\varphi = 180^\circ$) δεν δέχεται δύναμη από αυτό, ενώ αν είναι κάθετος στο μαγνητικό πεδίο ($\varphi = 90^\circ$) η δύναμη που δέχεται από το πεδίο παίρνει τη μέγιστη τιμή της $F = BIl$. Αν ο αγωγός δεν είναι ευθύγραμμος, τον χωρίζουμε σε μικρά τμήματα, μήκους Δl , τόσο μικρά ώστε το καθένα από αυτά να μπορεί να θεωρηθεί ευθύγραμμο και υπολογίζουμε τη δύναμη που ασκείται σε κάθε ένα από αυτά. Η δύναμη που δέχεται ο αγωγός είναι η συνισταμένη αυτών των δυνάμεων.

Θ5.16) Πώς ορίζεται το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου με τη βοήθεια της έννοιας της δύναμης Laplace;

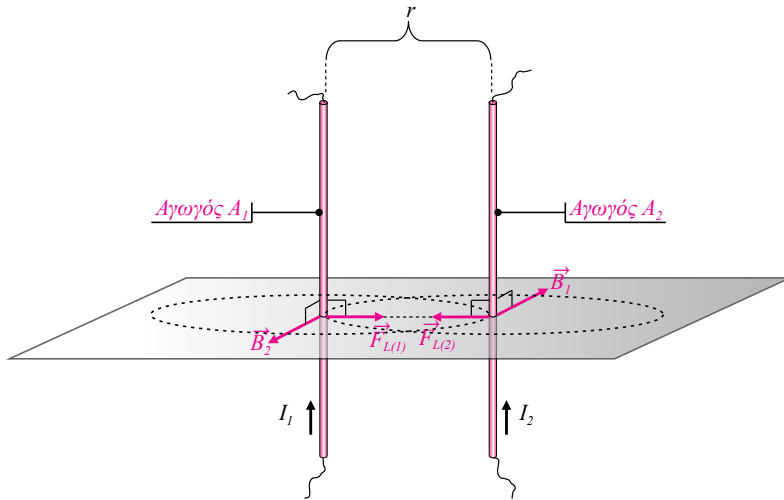
Η μονάδα μέτρησης της έντασης $\vec{B}$ του μαγνητικού πεδίου στο διεθνές σύστημα μονάδων (S.I.) είναι το 1 Tesla (1 T) και ορίζεται ως εξής:

Ένα Tesla είναι η ένταση του ομογενούς μαγνητικού πεδίου το οποίο ασκεί δύναμη 1 N σε ευθύγραμμο αγωγό, που έχει μήκος 1 m, όταν διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως 1 A και τέμνει κάθετα τις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Ισχύει: $1\text{ T} = 1\text{ N}/(\text{A} \cdot \text{m})$.

Θ5.17) Πώς υπολογίζεται η μαγνητική δύναμη Laplace ανάμεσα σε δύο ρευματοφόρους αγωγούς;

Θεωρούμε δύο κατακόρυφους, ευθύγραμμους ρευματοφόρους αγωγούς (1) και (2) που διαρρέονται από ρεύματα έντασης I_1 και I_2 αντίστοιχα, έχουν μήκος l και απέχουν μεταξύ τους απόσταση r .

i) Ομόρροπα ρεύματα



Ο αγωγός (1) διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα οπότε δημιουργεί γύρω του ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο τον αγωγό (1). Στα σημεία που βρίσκεται ο αγωγός (2) η ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ο αγωγός (1) θα έχει μέτρο:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{r} \quad (1)$$

διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των αγωγών και φορά όπως φαίνεται στο σχήμα (κανόνας δεξιού χεριού).

Επειδή ο αγωγός (2) βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο-αυτό που δημιουργείται από τον αγωγό (1)-και διαρρέεται από ρεύμα έντασης I_2 δέχεται δύναμη Laplace που έχει μέτρο:

$$F_{L(2)} = B_1 I_2 l \Rightarrow F_{L(2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2 l}{r}$$

με διεύθυνση κάθετη στον αγωγό και φορά όπως φαίνεται στο σχήμα. Μπορούμε να εκφράσουμε το αποτέλεσμα αυτό και ως δύναμη ανά μονάδα μήκους:

$$\frac{F_{L(2)}}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2}{r}$$

Με την ίδια ακριβώς λογική ο αγωγός (2) διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα, δημιουργεί γύρω του ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο τον αγωγό. Στα σημεία που βρίσκεται ο αγωγός (1) η ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ο αγωγός (2) θα έχει μέτρο:

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{r} \quad (2)$$

με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο των αγωγών και φορά όπως φαίνεται στο σχήμα (κανόνας δεξιού χεριού).

Επειδή, ο αγωγός (1) βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο -αυτό που δημιουργείται από τον αγωγό (2)- και διαρρέεται από ρεύμα έντασης I_1 , δέχεται δύναμη Laplace που έχει μέτρο:

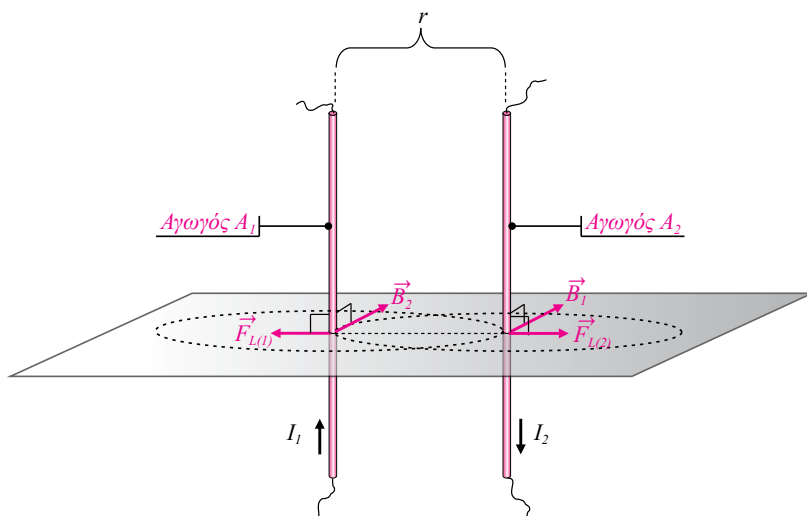
$$F_{L(1)} = B_2 I_1 l \Rightarrow F_{L(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2 l}{r}$$

με διεύθυνση κάθετη στον αγωγό και φορά όπως φαίνεται στο σχήμα.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι δυνάμεις $F_{L(1)}$ και $F_{L(2)}$ έχουν ίσα μέτρα και αντίθετες κατευθύνσεις. Ισχύει:

$$\vec{F}_{L(1)} = -\vec{F}_{L(2)}$$

ii) Αντίρροπα ρεύματα



Στην περίπτωση που τα δύο ρεύματα που διαρρέουν τους δύο κατακόρυφους ευθύγραμμους ρευματοφόρους αγωγούς είναι αντίρροπα, οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε ένα από τους δύο αγωγούς αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο ότι έχουν τα ίδια μέτρα:

$$F_{L(1)} = F_{L(2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2 l}{r}$$

διεύθυνση κάθετη σε κάθε ένα από τους δύο αγωγούς και αντίθετες κατευθύνσεις.

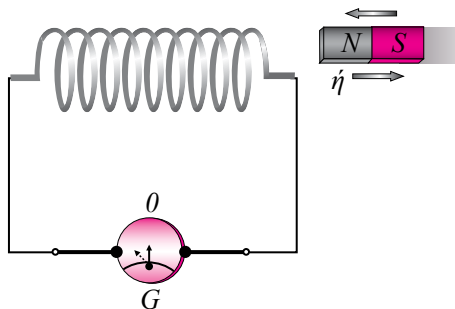
Προκύπτει ότι παράλληλοι αγωγοί που διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα έλκονται ενώ εάν διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα απωθούνται.

Θ5.18) Πώς μπορούμε να ορίσουμε τη μονάδα μέτρησης της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος στο S.I.;

1 A είναι το ρεύμα που όταν διαρρέει καθέναν από δύο παράλληλους αγωγούς που βρίσκονται σε απόσταση 1 m μεταξύ τους, ο ένας αγωγός ασκεί σε κάθε μέτρο του άλλου δύναμη $F = 2 \cdot 10^{-7}$ N.

Θ5.19) Πώς ορίζεται το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής; Πώς μπορεί να αποδειχθεί πειραματικά;

Φαινόμενο ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής είναι το φαινόμενο κατά το οποίο οποτεδήποτε μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από ένα πηνίο ή γενικότερα από ένα πλαίσιο, αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη στο πηνίο ή στο πλαίσιο που διαρκεί όσο χρόνο διαρκεί η μεταβολή της μαγνητικής ροής.



Μπορούμε να παρατηρήσουμε το φαινόμενο με 2 πειράματα.

Πείραμα 1

Πλησιάζουμε στο πηνίο έναν ραβδόμορφο μαγνήτη, έτσι ώστε ο άξονάς του να ταυτίζεται με τον άξονα του πηνίου. Κατά τη διάρκεια της κίνησης του μαγνήτη το γαλβανόμετρο δείχνει ότι το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα, αν και δεν έχουμε καμιά πηγή. Όταν ο μαγνήτης σταματήσει να κινείται το ρεύμα μηδενίζεται. Αν απομακρύνουμε το μαγνήτη το γαλβανόμετρο δείχνει ότι πάλι το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα, αντίθετης φοράς τώρα σε σχέση με πριν. Μια ακόμη παρατήρηση είναι ότι η απόκλιση του γαλβανομέτρου, άρα η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος, εξαρτάται από το πόσο γρήγορα πλησιάζουμε ή απομακρύνουμε το μαγνήτη.

Πείραμα 2

Συνδέουμε τα άκρα αγωγίμου πλαισίου σε γαλβανόμετρο έτσι ώστε να δημιουργείται κλειστό κύκλωμα. Εισάγουμε το πλαίσιο στον χώρο ενός ισχυρού ομογενούς μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται ανάμεσα στους πόλους ενός ηλεκτρομαγνήτη. Κατά τη διάρκεια της εισόδου (αν το επίπεδο του πλαισίου δεν είναι παράλληλο στις δυναμικές γραμμές), το γαλβανόμετρο δείχνει ρεύμα. Όταν το πλαίσιο βρεθεί να κινείται εξολοκλήρου εντός του πεδίου το ρεύμα μηδενίζεται. Κατά τη διάρκεια της εξόδου του πλαισίου από το πεδίο εμφανίζεται πάλι ρεύμα στο πλαίσιο αντίθετης φοράς από πριν. Και εδώ η ένταση του ρεύματος είναι μεγαλύτερη αν η είσοδος και η έξοδος γίνουν γρηγορότερα. Αυτό που συνέβη στη διάρκεια των δυο αυτών πειραμάτων ήταν ότι μεταβλήθηκε η μαγνητική ροή από την επιφάνεια που ορίζεται από τις σπείρες του πηνίου στην πρώτη περίπτωση, από τις σπείρες του πλαισίου στη δεύτερη. Σε αυτή τη μεταβολή πρέπει να αναζητήσουμε την αιτία της δημιουργίας του ηλεκτρικού ρεύματος. Αν σε κάποια από τις προηγούμενες περιπτώσεις το κύκλωμα ήταν ανοιχτό, δε θα υπήρχε ρεύμα. Ωστόσο, κατά τη διάρκεια μεταβολής της μαγνητικής ροής, στα ανοιχτά άκρα του κυκλώματος

-του πηνίου ή του πλαισίου- θα εμφανιζόταν τάση. Η τάση αυτή ονομάζεται τάση από επαγωγή. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι για την εμφάνιση αυτής της τάσης δεν είναι αναγκαίο να υπάρχει πηνίο ή πλαίσιο πολλών σπειρών. Αρκεί να μεταβληθεί η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια που ορίζει ο αγωγός. Τότε, κατά τη διάρκεια της μεταβολής, εμφανίζεται στα άκρα του αγωγού τάση από επαγωγή.

Θ5.20) Πώς διατυπώνεται ο νόμος της επαγωγής του Faraday;

Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται σε ένα κύκλωμα είναι ίση με τον ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής που διέρχεται από την επιφάνεια που ορίζει το κύκλωμα. Ισχύει:

$$E_{\text{επ}} = N \cdot \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} \quad (1)$$

Παρατήρηση 1: Η ηλεκτρεγερτική αυτή δύναμη όπως εκφράστηκε, είναι μέση τιμή γιατί αντιστοιχεί στη συνολική μεταβολή της ροής στο θεωρούμενο χρονικό διάστημα. Για να υπολογίσουμε την ηλεκτρεγερτική δύναμη, στο κύκλωμα, κάποια στιγμή t πρέπει ο χρόνος Δt να είναι απειροστά μικρός.

Παρατήρηση 2: Αν ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής είναι σταθερός και η $E_{\text{επ}}$ θα έχει σταθερή τιμή στο χρονικό διάστημα Δt .

Παρατήρηση 3: Το πηνίο ή το πλαίσιο που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα, έγιναν ηλεκτρικές πηγές. Επομένως, η τάση στα άκρα τους θα εξαρτάται από το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα. Η σχέση (1) δίνει την ηλεκτρεγερτική δύναμη αυτής της πηγής, δηλαδή την τάση στα άκρα του αγωγού όταν δεν διαρρέεται από ρεύμα. Αν ο αγωγός συνδεθεί σε κλειστό κύκλωμα, η τάση στα άκρα του δεν είναι ίση με την ηλεκτρεγερτική δύναμη αλλά είναι μειωμένη κατά τον παράγοντα IR , όπου R η αντίστασή του.

Θ5.21) Πώς διατυπώνεται ο νόμος του Neumann;

Η δημιουργία επαγωγικού ρεύματος σ' ένα κύκλωμα έχει σαν συνέπεια την εμφάνιση επαγωγικού φορτίου που περνάει από μια διατομή του κυκλώματος. Ισχύει:

$$Q_{\text{επ}} = I_{\text{επ}} \cdot \Delta t \xrightarrow{I_{\text{επ}} = \frac{N \cdot \Delta\Phi}{R_{\text{ολ}} \cdot \Delta t}} Q_{\text{επ}} = \frac{N \cdot \Delta\Phi}{R_{\text{ολ}} \cdot \Delta t} \cdot \Delta t \Rightarrow Q_{\text{επ}} = \frac{N \cdot \Delta\Phi}{R_{\text{ολ}}}$$

Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι το ηλεκτρικό φορτίο που μετατοπίζεται σε ορισμένη μεταβολή μαγνητικής ροής είναι ανεξάρτητο από τον χρόνο που διαρκεί η μεταβολή αυτή.

Θ5.22) Πώς υπολογίζεται η ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται σε ευθύγραμμο αγωγό κινούμενο σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με βάση τη δύναμη Lorentz που δέχονται τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού;

Ευθύγραμμος αγωγός ΚΛ μήκους l κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου v κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $\vec{B}$ όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού, συμμετέχοντας στην κίνησή του, κινούνται και αυτά με ταχύτητα μέτρου v κάθετα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο (e^-) επειδή κινείται με ταχύτητα v μέσα σε μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές του γραμμές θα δεχτεί δύναμη Lorentz μέτρου:

$$F_L = Bv|q|$$

και φοράς που φαίνεται στο σχήμα. Η δύναμη αυτή αναγκάζει τα ελεύθερα ηλεκτρόνια να κινηθούν προς το άκρο Λ του αγωγού. Έτσι δημιουργείται συσσώρευση αρνητικού φορτίου στο άκρο Λ , και επομένως πλεόνασμα θετικού φορτίου στο άκρο K .

Τα φορτία αυτά δημιουργούν στο χώρο του αγωγού ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\vec{E}$ με φορά από το K προς το Λ . Έτσι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια δέχονται ακόμη μια δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο που έχει μέτρο:

$$F_{\eta\lambda} = E|q|$$

αλλά αντίθετης φοράς από τη μαγνητική. Όσο η δύναμη Lorentz είναι μεγαλύτερη από την ηλεκτρική, η συσσώρευση φορτίων συνεχίζεται, με ολοένα και μικρότερο ρυθμό με αποτέλεσμα η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου διαρκώς να αυξάνεται. Κάποια χρονική στιγμή τα μέτρα των δυο δυνάμεων θα γίνουν ίσα, δηλαδή θα ισχύει:

$$F_L = F_{\eta\lambda} \Rightarrow Bv|q| = E|q| \Rightarrow E = Bv$$

Από το σημείο αυτό και μετά σταματάει η μετακίνηση φορτίου και το σημείο K βρίσκεται σε υψηλότερο δυναμικό από το Λ . Για τη διαφορά δυναμικού $V_{K\Lambda}$ μεταξύ των άκρων του αγωγού K και Λ και της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου E ισχύει:

$$E = \frac{V_{K\Lambda}}{l}$$

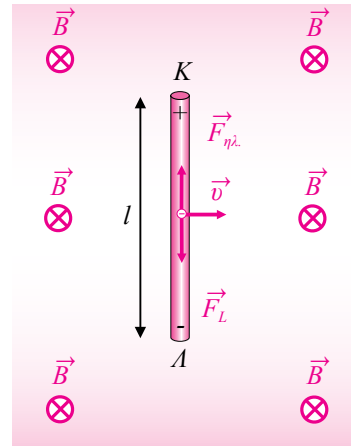
Συνδυάζοντας τις τελευταίες δύο σχέσεις τελικά παίρνουμε:

$$V_{K\Lambda} = Bvl$$

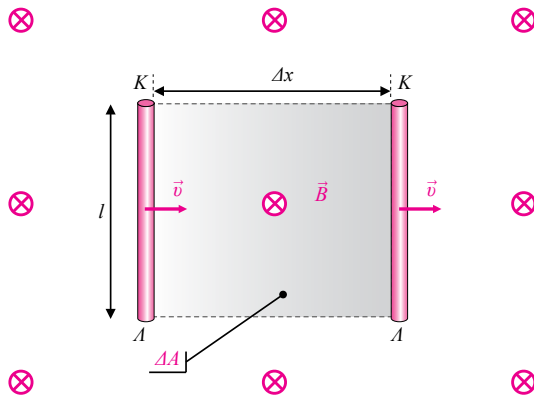
Αυτή η διαφορά δυναμικού οφείλεται στη δράση του μαγνητικού πεδίου (επάγεται από το μαγνητικό πεδίο). Έτσι προκύπτει ότι:

Αν ένας ευθύγραμμος αγωγός κινείται με ταχύτητα v , μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, έτσι ώστε ο αγωγός, η ταχύτητα και το μαγνητικό πεδίο να είναι κάθετα ανά δύο μεταξύ τους, στον αγωγό αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή:

$$E_{\varepsilon\pi} = Bvl$$



Θ5.23) Πώς υπολογίζεται η ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται σε ευθύγραμμο αγωγό κινούμενο σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με βάση τον νόμο του Faraday;



Έστω ευθύγραμμος αγωγός ΚΛ μήκους l ο οποίος κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}$ κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $\vec{B}$. Σε χρονικό διάστημα Δt ο αγωγός μετακινείται κατά Δx σαρώνοντας εμβαδόν ΔA όσο και η αύξηση του εμβαδού του πλαισίου. Έτσι σύμφωνα με τον νόμο του Faraday στο πλαίσιο θα αναπτυχθεί ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή:

$$E_{\text{επ}} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow E_{\text{επ}} = \frac{\Delta(BA)}{\Delta t} \Rightarrow E_{\text{επ}} = \frac{B(\Delta A)}{\Delta t} \Rightarrow E_{\text{επ}} = \frac{Bl \cdot \Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{v = \frac{\Delta x}{\Delta t}} E_{\text{επ}} = Bvl$$

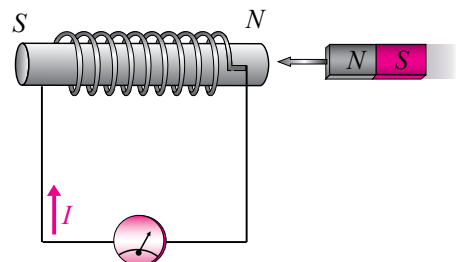
Θ5.24) Ποια είναι η διατύπωση του κανόνα του Lenz; Σε ποια αρχή της Φυσικής βασίζεται;

Σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz τα επαγωγικά ρεύματα έχουν τέτοια φορά ώστε να αντιτίθενται στο αίτιο που τα προκαλεί. Ο κανόνας αυτός αποτελεί συνέπεια της αρχής διατήρησης της ενέργειας.

Θ5.25) Να αναφέρετε δύο παραδείγματα εφαρμογής του κανόνα του Lenz.

Παράδειγμα 1

Πλησιάζουμε στο πηνίο του διπλανού σχήματος τον βόρειο πόλο ενός ευθύγραμμου μαγνήτη. Καθώς πλησιάζει ο μαγνήτης, η μαγνητική ροή που περνάει από τις σπείρες του πηνίου αυξάνεται και το πηνίο συμπεριφέρεται ως πηγή. Επειδή τα άκρα του είναι ενωμένα, το κύκλωμα είναι κλειστό και έτσι το πηνίο

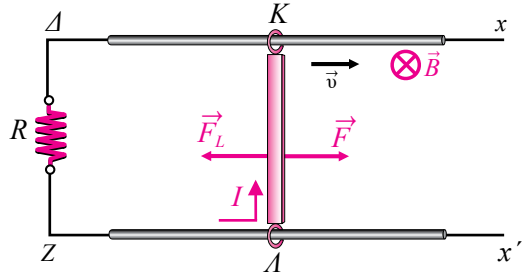


διαρρέεται από ρεύμα. Η φορά αυτού του ρεύματος σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz, θα είναι τέτοια ώστε να αντιτίθεται στην αιτία που το προκάλεσε, να εμποδίζει δηλαδή τον βόρειο πόλο του μαγνήτη να πλησιάσει. Αυτό σημαίνει ότι η άκρη του πηνίου που είναι προς το μέρος του βόρειου πόλου του μαγνήτη που πλησιάζει θα συμπεριφέρεται

ως βόρειος πόλος. Για να υπερνικηθεί η άπωση που δέχεται ο μαγνήτης από το πηνίο δαπανάται ενέργεια, που μετατρέπεται σε θερμότητα στους αγωγούς. Αν το πηνίο διαρρεόταν από ρεύμα αντίθετης φοράς, απέναντι από τον βόρειο πόλο του μαγνήτη θα δημιουργούσε νότιο μαγνητικό πόλο. Ο νότιος μαγνητικός πόλος θα ασκούσε ελκτική δύναμη στο μαγνήτη με αποτέλεσμα να μην απαιτείται καμιά προσπάθεια για να πλησιάσει. Αυτό όμως είναι αντίθετο με την αρχή διατήρησης της ενέργειας, γιατί χωρίς καμιά προσπάθεια, χωρίς να δαπανάται ενέργεια, στο πηνίο θα παραγόταν ηλεκτρική ενέργεια λόγω του φαινομένου της επαγωγής.

Παράδειγμα 2

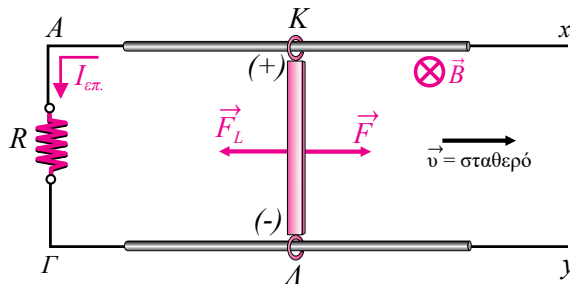
Έστω αγωγός ΚΛ που κινείται, μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο B με σταθερή ταχύτητα v , μένοντας σε επαφή με τους ακίνητους αγωγούς Αx και Ζx', όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Λόγω του φαινομένου της επαγωγής ο αγωγός ΚΛ συμπεριφέρεται ως πηγή και, επειδή το κύκλωμα είναι κλειστό, διαρρέεται από ρεύμα. Ο αγωγός δέχεται από το μαγνη-



τικό πεδίο δύναμη Laplace. Σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz η φορά του ρεύματος πρέπει να είναι τέτοια ώστε να αντιτίθεται στην αιτία που το προκάλεσε, δηλαδή στην κίνηση του αγωγού ΚΛ. Το ρεύμα πρέπει να έχει τέτοια φορά ώστε η δύναμη Laplace που ασκείται στον αγωγό να αντιτίθεται στην κίνησή του.

Για να διατηρείται η κίνηση του αγωγού ισοταχής, είναι αναγκαίο να ασκείται σε αυτόν δύναμη $\vec{F}$, αντίθετη με τη δύναμη Laplace. Μέσω της δύναμης αυτής προσφέρεται στο κύκλωμα ενέργεια. Αν το ρεύμα είχε αντίθετη φορά, το μαγνητικό πεδίο θα ασκούσε στον αγωγό δύναμη ίδιας κατεύθυνσης με την ταχύτητά του. Στην περίπτωση αυτή δεν απαιτείται ενέργεια για να διατηρηθεί η κίνηση του αγωγού και στο κύκλωμα θα παραγόταν διαρκώς ηλεκτρική ενέργεια που θα μετατρέποταν σε θερμότητα στην αντίσταση R . Όμως, σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας είναι αδύνατη η παραγωγή μιας μορφής ενέργειας χωρίς αντίστοιχη δαπάνη άλλης μορφής ενέργειας.

Θ5.26) Πώς εφαρμόζεται η αρχή διατήρησης της ενέργειας στο φαινόμενο της επαγωγής (περίπτωση ευθύγραμμου αγωγού που κινείται με σταθερή ταχύτητα μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο);



Ο αγωγός ΚΛ, του παραπάνω σχήματος, μήκους l κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}$ μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$ μένοντας διαρκώς σε επαφή με τους οριζόντιους αγωγούς Αx και Γy. Θεωρούμε ότι ανάμεσα στον αγωγό ΚΛ και τους οριζόντιους αγωγούς Αx και Γy δεν εμφανίζονται τριβές.

Στα άκρα του αγωγού ΚΛ αναπτύσσεται τάση από επαγωγή η οποία θα δίνεται από τη σχέση:

$$E_{\text{επ.}} = Bvl \quad (1)$$

Το κλειστό κύκλωμα ΚΑΓΛΚ θα διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα έντασης:

$$I_{\text{επ.}} = \frac{E_{\text{επ.}}}{R} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} I_{\text{επ.}} = \frac{Bvl}{R} \quad (2)$$

όπου R η συνολική αντίσταση του κυκλώματος.

Η δύναμη Laplace $\vec{F}_L$ που ασκείται στον αγωγό ΚΛ έχει τη φορά που φαίνεται στο σχήμα σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz. Επειδή θεωρούμε ότι ο αγωγός κινείται με σταθερή ταχύτητα θα πρέπει να ασκούμε μια σταθερή εξωτερική δύναμη $\vec{F}$ η οποία να είναι διαρκώς αντίθετη της δύναμης Laplace. Ισχύει:

$$\vec{v} = \text{σταθερή} \Rightarrow \Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = -\vec{F}_L \Rightarrow F = F_L = BI_{\text{επ.}} l \stackrel{(2)}{\Rightarrow} F = \frac{B^2 l^2 v}{R} \quad (3)$$

Σε χρονικό διάστημα Δt ο αγωγός μετατοπίζεται κατά $\Delta x = v\Delta t$ (4) και η εξωτερική δύναμη $\vec{F}$ προσφέρει στον αγωγό, μέσω του έργου της, ενέργεια ίση με:

$$W_F = F \cdot \Delta x \stackrel{(3),(4)}{\Rightarrow} W_F = \frac{B^2 l^2 v}{R} \cdot v\Delta t \Rightarrow W_F = \frac{B^2 l^2 v^2}{R} \cdot \Delta t \quad (5)$$

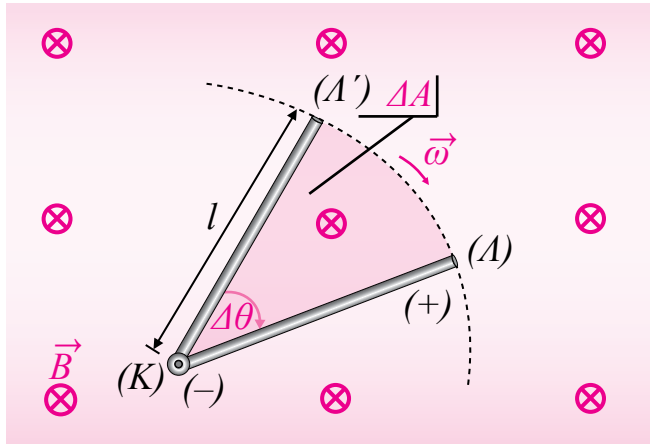
Στο ίδιο χρονικό διάστημα Δt , το ρεύμα, λόγω φαινομένου Joule, θα αποδώσει στο περιβάλλον θερμότητα:

$$Q = I_{\text{επ.}}^2 R \Delta t \stackrel{(2)}{\Rightarrow} Q = \frac{B^2 l^2 v^2}{R} \cdot \Delta t \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) παρατηρούμε ότι χρειάστηκε να προσφέρουμε ενέργεια στον αγωγό ΚΛ ίση με τη θερμότητα που παράχθηκε λόγω φαινομένου Joule, άρα ισχύει η Διατήρηση της Ενέργειας.

Θ5.27) Πώς υπολογίζεται η ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται σε έναν στρεφόμενο αγωγό μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο;

Έστω ευθύγραμμος αγωγός (ΚΛ) μήκους l ο οποίος στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από άξονα που διέρχεται από το ένα του άκρο (Κ). Το επίπεδο περιστροφής του αγωγού είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $\vec{B}$. Το μαγνητικό πεδίο ασκεί δύναμη Lorentz στα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού (ΚΛ) που κινούνται μαζί με αυτόν, με αποτέλεσμα να συσσωρεύεται θετικό φορτίο στο (Λ) (έλλειμμα ηλεκτρονίων) και αρνητικό στο (Κ) (πλεόνασμα ηλεκτρονίων). Ο αγωγός μετατρέπεται σε πηγή.



Σε χρονικό διάστημα Δt ο αγωγός στρέφεται κατά γωνία $\Delta\theta$ σαρώνοντας εμβαδόν ΔA όσο και η αύξηση του εμβαδού του κυκλικού τομέα (γραμμοσκιασμένη επιφάνεια). Έτσι σύμφωνα με τον νόμο του Faraday, στον αγωγό (ΚΛ) θα αναπτυχθεί ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή της οποίας το μέτρο θα είναι:

$$E_{\text{επ}} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow E_{\text{επ}} = \frac{\Delta(BA)}{\Delta t} \Rightarrow E_{\text{επ}} = \frac{B(\Delta A)}{\Delta t} \quad (1)$$

Αν ο αγωγός (ΚΛ) στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω τότε σε χρόνο $\Delta t = T$ σαρώνει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν όλου του κύκλου: $\Delta S = \pi l^2$.

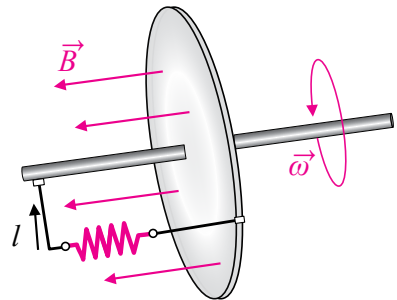
$$(1) \Rightarrow E_{\text{επ}} = \frac{B(\Delta A)}{\Delta t} = \frac{B \cdot \pi l^2}{T} \stackrel{T = \frac{2\pi}{\omega}}{\Longrightarrow} E_{\text{επ}} = \frac{B \cdot \pi l^2}{\frac{2\pi}{\omega}} \Rightarrow E_{\text{επ}} = \frac{1}{2} B\omega l^2$$

Θ5.28) Πώς υπολογίζεται η ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται σε έναν αγωγίμο στρεφόμενο δίσκο μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο;

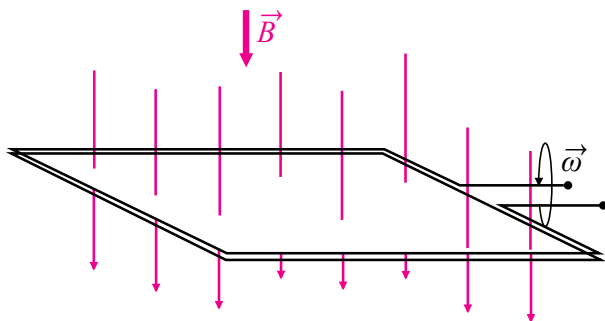
Θεωρούμε αγωγίμο δίσκο με ακτίνα r , του οποίου το επίπεδο είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου. Στρέφουμε το δίσκο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα που περνάει από το κέντρο του και είναι παράλληλος στις δυναμικές γραμμές. Αν θεωρήσουμε ότι ο δίσκος αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό αγωγών, τότε ανάμεσα στο κέντρο και σε οποιοδήποτε σημείο της περιφέρειας θα αναπτύσσεται τάση από επαγωγή:

$$E_{\text{επ}} = \frac{1}{2} B\omega r^2$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη συσκευή ως πηγή σταθερής τάσης αν τη συμπληρώσουμε με ολισθαίνουσες επαφές (ψήκτρες) όπως στο σχήμα. Η πολικότητα της ΗΕΔ που αναπτύσσεται από επαγωγή εξαρτάται από τη φορά περιστροφής του δίσκου. Στην περίπτωση του σχήματος τα σημεία της περιφέρειας του δίσκου βρίσκονται σε υψηλότερο δυναμικό από το κέντρο. Η συσκευή ονομάζεται δίσκος του Faraday.



Θ5.29) Πώς υπολογίζεται η ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται σε στρεφόμενο πλαίσιο μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο;



Έστω αγωγίμο πλαίσιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, εμβαδού A , το οποίο στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$. Το αγωγίμο πλαίσιο στρέφεται γύρω από άξονα ο οποίος είναι κάθετος στις δυναμικές γραμμές του πλαισίου και βρίσκεται στο επίπεδο του πλαισίου. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το επίπεδο του πλαισίου είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου. Κάποια χρονική στιγμή t το πλαίσιο έχει στραφεί κατά γωνία $\theta = \omega t$. Η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια του πλαισίου θα είναι:

$$\Phi = B \cdot A \sin \omega t$$

Καθώς το πλαίσιο στρέφεται η μαγνητική ροή μεταβάλλεται, οπότε στα άκρα του αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή. Με βάση τον νόμο του Faraday έχουμε:

$$E_{\text{επ}} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d(B \cdot A \sin \omega t)}{dt}$$

από όπου τελικά προκύπτει (μετά από παραγώγιση):

$$E_{\text{επ}} = \omega \cdot B \cdot A \eta \mu \omega t$$

Αν το πλαίσιο έχει N σπείρες τότε θα ισχύει:

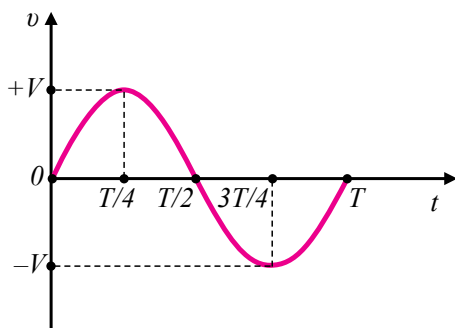
$$E_{\text{επ}} = N \cdot \omega \cdot B \cdot A \eta \mu \omega t$$

Θ5.30) Πώς ορίζεται η αρμονικά εναλλασσόμενη τάση;

Θέτουμε στην σχέση $E_{\text{επ}} = N \cdot \omega \cdot B \cdot A \eta \mu \omega t$ όπου $V = N \cdot \omega \cdot B \cdot A$ και όπου $v = E_{\text{επ}}$ οπότε η τελική μορφή αυτής της τάσης είναι:

$$v = V \eta \mu \omega t \quad (1)$$

Από την παραπάνω σχέση (1) βλέπουμε ότι η στιγμιαία τιμή της τάσης είναι ημιτονοειδής (αρμονική) συνάρτηση του χρόνου και ονομάζεται εναλλασσόμενη τάση (ac) γιατί η πολικότητά της εναλλάσσεται, με τον χρόνο περιστροφής του πλαισίου. Το διάγραμμα της εναλλασσόμενης τάσης συναρτήσει του χρόνου για μια περίοδο περιστροφής του πλαισίου παριστάνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Θ5.31) Πώς ορίζεται το πλάτος, η φάση και η γωνιακή συχνότητα μιας εναλλασσόμενης τάσης; Ποιες τιμές έχει το πλάτος και η συχνότητα της εναλλασσόμενης τάσης στην Ελλάδα;

Το v είναι η στιγμιαία τιμή της τάσης (τη στιγμή t) και μετριέται σε Volt (V).

Το V είναι η μεγαλύτερη τιμή της τάσης και λέγεται πλάτος και μετριέται σε Volt (V).

Το γινόμενο $\omega t = \phi$ λέγεται φάση της τάσης και μετριέται σε rad.

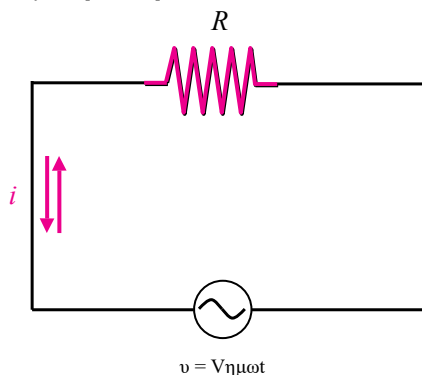
Το ω λέγεται γωνιακή συχνότητα, μετριέται σε rad/s και είναι ίσο με τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του πλαισίου. Ισχύουν επίσης οι σχέσεις: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ και $\omega = 2\pi f$, όπου T η περίοδος της τάσης (περίοδος περιστροφής πλαισίου) που μετριέται σε sec και f η συχνότητα της τάσης σε Hertz (Hz) που δηλώνει τον αριθμό των πλήρων εναλλαγών της τάσης στη μονάδα του χρόνου. Επίσης ισχύει και η σχέση $f = \frac{1}{T}$. Στην Ελλάδα (και σε όλη την Ευρώπη), στα δίκτυα της ΔΕΗ, το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης είναι $V = 220\sqrt{2}$ V και η συχνότητα είναι $f = 50\text{Hz}$.

Θ5.32) Πώς βρίσκουμε την ένταση του ρεύματος που διαρρέει έναν αντιστάτη εάν στα άκρα του εφαρμόσουμε αρμονικά εναλλασσόμενη τάση;

Αν στα άκρα ενός στρεφόμενου πλαισίου μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, συνδέσουμε αντιστάτη αντίστασης R , τότε αυτός θα διαρρέεται από ρεύμα το οποίο θα λέγεται εναλλασσόμενο. Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια εκτελούν εξαναγκασμένη ταλάντωση με τη συχνότητα της εναλλασσόμενης τάσης. Η ένταση του ρεύματος υπολογίζεται σύμφωνα με τον νόμο του Ohm εξής:

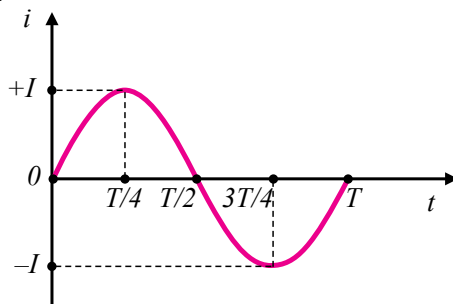
$$i = \frac{v}{R} = \frac{V\eta\mu\omega t}{R} \Rightarrow i = I\eta\mu\omega t$$

όπου i η στιγμιαία τιμή της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος και $I = \frac{V}{R}$ το πλάτος (μέγιστη τιμή) της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος. Η φορά του εναλλασσόμενου ρεύματος μεταβάλλεται περιοδικά



με τον χρόνο. Το διάγραμμα του εναλλασσόμενου ρεύματος συναρτήσει του χρόνου για μια περίοδο παριστάνεται στο ακόλουθο σχήμα:

Η εναλλασσόμενη τάση που εφαρμόσαμε στα άκρα του αντιστάτη και το ρεύμα παίρνουν ταυτόχρονα τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή. Λέμε ότι τα δύο μεγέθη βρίσκονται σε φάση (ή ότι η διαφορά φάσης τους είναι μηδέν).



Θ5.33) Πώς ορίζεται η ενεργός ένταση ενός εναλλασσόμενου ρεύματος;

Ενεργός ένταση I_{ev} ενός εναλλασσόμενου ρεύματος ονομάζεται η ένταση ενός συνεχούς ρεύματος το οποίο προκαλεί το ίδιο θερμικό αποτέλεσμα με το εναλλασσόμενο ρεύμα, όταν διαρρέει τον ίδιο αντιστάτη, στον ίδιο χρόνο. Αποδεικνύεται ότι η ενεργός ένταση και το πλάτος της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος συνδέονται με την παρακάτω σχέση:

$$I_{\text{ev}} = \frac{I}{\sqrt{2}}$$

Θ5.34) Πώς ορίζεται η ενεργός τάση μιας εναλλασσόμενης τάσης;

Ενεργός τάση V_{ev} μιας εναλλασσόμενης τάσης ονομάζεται η συνεχής εκείνη τάση που όταν εφαρμόζεται στα άκρα του ίδιου αντιστάτη (που εφαρμόζεται και η εναλλασσόμενη) προκαλεί συνεχές ρεύμα έντασης ίσης με την ενεργό ένταση του εναλλασσόμενου ρεύματος που προκαλεί η εναλλασσόμενη τάση. Αποδεικνύεται ότι η ενεργός τάση και το πλάτος της τάσης του εναλλασσόμενου ρεύματος συνδέονται με την παρακάτω σχέση:

$$V_{\text{ev}} = \frac{V}{\sqrt{2}}$$

Θ5.35) Πώς γράφεται ο νόμος του Joule στο εναλλασσόμενο ρεύμα;

Καθώς οι φορείς του ηλεκτρικού φορτίου μέσα στους αγωγούς του κυκλώματος ταλαντώνονται, προσκρούουν στα ιόντα του πλέγματος και χάνουν την ενέργεια που τους παρέχει για την κίνησή τους η πηγή. Η ενέργεια αυτή αποδίδεται υπό μορφή θερμότητας στο περιβάλλον. Παρουσιάζεται επομένως και στα κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος, όπως και στα κυκλώματα συνεχούς ρεύματος, το φαινόμενο Joule.

Ο νόμος του Joule για το εναλλασσόμενο ρεύμα γράφεται:

$$Q = I_{\text{ev}}^2 R t$$

Θ5.36) Πώς ορίζεται η στιγμιαία και πώς η μέση ισχύς του εναλλασσόμενου ρεύματος;

Η στιγμιαία ισχύς δηλαδή ο ρυθμός με τον οποίο το εναλλασσόμενο ρεύμα μεταφέρει ενέργεια στο κύκλωμα κάθε στιγμή δίνεται απ' τη σχέση:

$$P = v \cdot i$$

Αν το κύκλωμα περιλαμβάνει αντιστάτη τότε επειδή ισχύει $v = iR$ προκύπτει:

$$P = i^2 R$$

Αυτή η ισχύς μεταβάλλεται με τον χρόνο και δεν έχει πρακτική σημασία. Στην πράξη χρησιμοποιούμε τη μέση ισχύ που μένει σταθερή με τον χρόνο και είναι η ισχύς που καταναλώνεται κατά μέσο όρο στο κύκλωμα.

Μέση ισχύς είναι το πηλίκο της ενέργειας που μεταφέρει το ηλεκτρικό ρεύμα στο κύκλωμα σε χρόνο μιας περιόδου προς τον χρόνο αυτό:

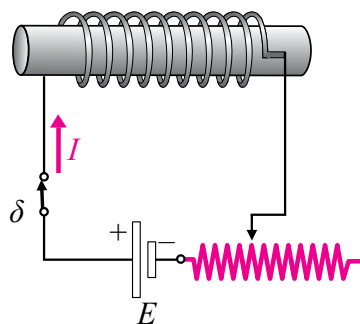
$$\bar{P} = \frac{W}{T}$$

Για έναν αντιστάτη αποδεικνύεται ότι:

$$\bar{P} = V_{\text{ev}} I_{\text{ev}} \quad \text{ή} \quad \bar{P} = I_{\text{ev}}^2 R \quad \text{ή} \quad \bar{P} = \frac{V_{\text{ev}}^2}{R}$$

Θ5.37) Τι γνωρίζετε για το φαινόμενο της αυτεπαγωγής;

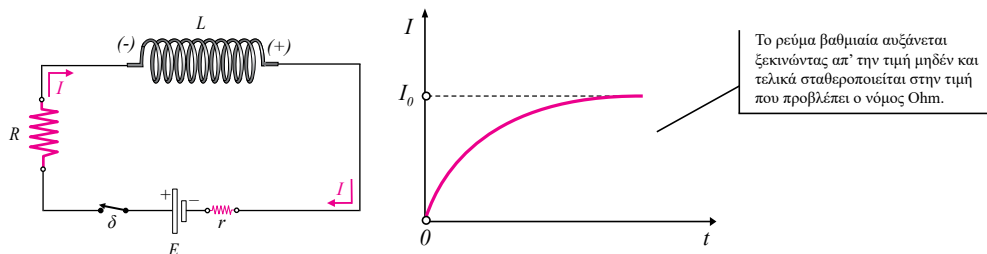
Έστω κύκλωμα που περιλαμβάνει πηγή με Η.Ε.Δ. E , ρυθμιστική αντίσταση, πηνίο και διακόπτη δ . Αρχικά το κύκλωμα διαρρέεται από σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα έντασης I . Μετακινούμε τον δρομέα στη ρυθμιστική αντίσταση ώστε ο λαμπτήρας μόλις να φωτοβολεί. Αν ανοίξουμε τον διακόπτη δ του κυκλώματος θα παρατηρήσουμε ότι για λίγο ο λαμπτήρας συνεχίζει να φωτοβολεί και μάλιστα, αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη, πιο έντονα από πριν. Αυτό συμβαίνει γιατί η απότομη μείωση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο προκαλεί αντίστοιχη ελάττωση του μαγνητικού του πεδίου, επομένως και της μαγνητικής ροής που διέρχεται από τις σπείρες του. Η μεταβολή της μαγνητικής ροής στο πηνίο έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ηλεκτρεγερτικής δύναμης από επαγωγή στο πηνίο. Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που δημιουργείται στο πηνίο όταν ανοίξουμε το διακόπτη, προκαλεί ρεύμα στο κύκλωμα πηνίο - λαμπτήρας και αναγκάζει τον λαμπτήρα να φωτοβολήσει για λίγο. Ηλεκτρεγερτική δύναμη δημιουργείται στο πηνίο και κάθε φορά που στο κύκλωμα (όσο ο διακόπτης είναι κλειστός) μεταβάλλουμε το ρεύμα που το διαρρέει. Ηλεκτρεγερτική δύναμη επαγωγικής προέλευσης δημιουργείται σε κάθε κύκλωμα στο οποίο μεταβάλλεται η ένταση του ρεύματος, συνήθως όμως τη μελετάμε στα πηνία γιατί εκεί το φαινόμενο είναι εντονότερο. Το φαινόμενο ονομάζεται αυτεπαγωγή. Αυτεπαγωγή ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο δημιουργείται ηλεκτρεγερτική δύναμη σε ένα κύκλωμα, όταν μεταβάλλεται το ρεύμα που το διαρρέει. Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που δημιουργείται ονομάζεται ηλεκτρεγερτική δύναμη από αυτεπαγωγή και συμβολίζεται με $E_{\text{αυτ}}$. Αν το ρεύμα που διαρρέει ένα πηνίο αυξάνεται, σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz, στο πηνίο δημιουργείται ηλεκτρεγερτική δύναμη που παρεμποδίζει την αύξηση του ρεύματος. Αν το ρεύμα στο πηνίο μειώνεται, η ηλεκτρεγερτική δύναμη που δημιουργείται έχει την τάση να το διατηρήσει σταθερό. Το πηνίο αντιδρά σε κάθε μεταβολή της έντασης του ρεύματος που το διαρρέει. Η αυτεπαγωγή είναι ιδιότητα των κυκλωμάτων αντίστοιχη με την αδράνεια των σωμάτων. Τα σώματα αντιστέκονται στη μεταβολή της ταχύτητάς τους. Τα κυκλώματα αντιστέκονται στη μεταβολή του ρεύματος που τα διαρρέει. Μέτρο



της αδράνειας των σωμάτων είναι η μάζα τους. Μέτρο της αδράνειας των κυκλωμάτων είναι ο συντελεστής αυτεπαγωγής τους.

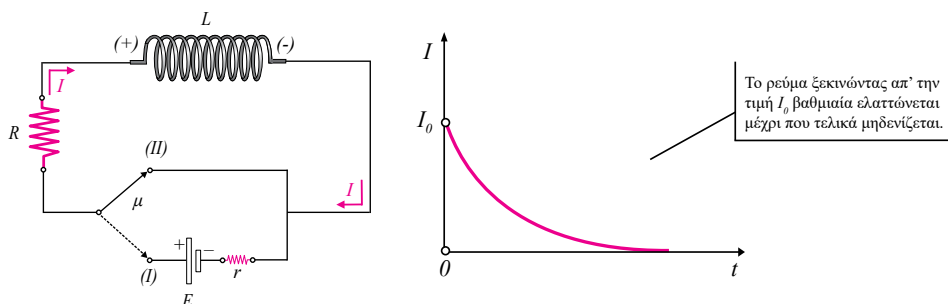
Θ5.38) Να αναφέρετε δύο παραδείγματα μελέτης του φαινομένου της αυτεπαγωγής σε κύκλωμα με πηνίο.

1η περίπτωση.



Στο παραπάνω σχήμα το κύκλωμα περιλαμβάνει πηγή, διακόπτη, αντιστάτη και πηνίο. Όταν κλείσουμε το διακόπτη, το κύκλωμα αρχίζει να διαρρέεται από ρεύμα. Επειδή με βάση το φαινόμενο της αυτεπαγωγής το πηνίο αντιδρά στην αύξηση του ρεύματος, το ρεύμα καθυστερεί να πάρει την τελική του τιμή I_0 . Γι' αυτό το ρεύμα δεν παίρνει ακαριαία αυτή την τιμή όπως θα περιμέναμε μετά το κλείσιμο του διακόπτη δ.

2η περίπτωση.



Στο παραπάνω σχήμα ο μεταγωγός μ είναι αρχικά στη θέση (I) και το κύκλωμα διαρρέεται από σταθερό ρεύμα έντασης I_0 . Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ο μεταγωγός μετακινείται από τη θέση (I) στη θέση (II). Το κύκλωμα συνεχίζει για λίγο χρόνο ακόμα να διαρρέεται από ρεύμα. Το πηνίο, αντιδρώντας στη μείωση του ρεύματος δημιουργεί ηλεκτρεγερτική δύναμη ($E_{επ}$) που δίνει για μικρό χρονικό διάστημα ρεύμα ίδιας φοράς με το αρχικό ρεύμα. Γι' αυτό το ρεύμα δεν μηδενίζεται ακαριαία όπως θα περιμέναμε κατά τη μετακίνηση του μεταγωγού από τη θέση (I) στη θέση (II).

Θ5.39) Τι γνωρίζετε για τον νόμο της αυτεπαγωγής;

Το φαινόμενο της αυτεπαγωγής αποτελεί μια ειδική περίπτωση του φαινομένου της επαγωγής. Λέγεται έτσι γιατί προκαλείται από το μαγνητικό πεδίο του ίδιου του πηνίου. Ο νόμος της επαγωγής $E_{επ} = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ γίνεται στην περίπτωση της αυτεπαγωγής:

$$E_{αυτ} = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (1)$$

Όπως προκύπτει από τη σχέση (1) η ηλεκτρεγερτική δύναμη από αυτεπαγωγή που δημιουργείται στα άκρα ενός κυκλώματος είναι ανάλογη του ρυθμού μεταβολής της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος που το διαρρέει. Ο συντελεστής αναλογίας L ονομάζεται συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου και μετριέται στο S.I. σε Henry (H).

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής ενός πηνίου εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του και από τη μαγνητική διαπερατότητα του υλικού που βρίσκεται στο εσωτερικό του.

Θ5.40) Πώς υπολογίζεται η ενέργεια μαγνητικού πεδίου που είναι αποθηκευμένη σε ένα πηνίο;

Αποδεικνύεται ότι όταν ένα πηνίο διαρρέεται από ρεύμα έντασης I , τότε αποθηκεύεται σε αυτό ενέργεια μαγνητικού πεδίου που θα δίνεται από τη σχέση:

$$U = \frac{1}{2} LI^2$$

Θ5.41) Πώς υπολογίζεται ο συντελεστής αυτεπαγωγής πηνίου;

Έστω πηνίο μήκους l που αποτελείται από N σπείρες που η καθεμία έχει εμβαδόν διατομής A . Θεωρούμε ότι στο εσωτερικό του πηνίου υπάρχει κενό. Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του πηνίου το οποίο θεωρούμε ότι είναι ομογενές έχει ένταση μέτρου:

$$B = \mu_0 \cdot I \cdot \frac{N}{l} \quad (1)$$

όπου μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα του κενού ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$).

Από κάθε σπείρα του πηνίου περνάει μαγνητική ροή:

$$\Phi = B \cdot A \cdot \sin 0^\circ = B \cdot A \xrightarrow{(1)} \Phi = \mu_0 \cdot I \cdot \frac{N}{l} \cdot A \quad (2)$$

Η ηλεκτρεγερτική δύναμη από αυτεπαγωγή στο πηνίο θα είναι:

$$\begin{aligned} E_{\text{αυτ}} &= -N \cdot \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \xrightarrow{(2)} E_{\text{αυτ}} = -N \cdot \frac{\Delta \left(\mu_0 \cdot I \cdot \frac{N}{l} \cdot A \right)}{\Delta t} = -N \cdot \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot A \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow \\ E_{\text{αυτ}} &= -\mu_0 \cdot \frac{N^2}{l} \cdot A \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \end{aligned}$$

Ο σταθερός όρος $\mu_0 \cdot \frac{N^2}{l} \cdot A$ θα αποτελεί το συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου, δηλαδή:

$$L = \mu_0 \cdot \frac{N^2}{l} \cdot A \quad (3)$$

ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Θ6.1) Τι προβλέπει η κλασική θεωρία για την ενέργεια που μπορεί να μεταφέρει η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία και ποια φαινόμενα δεν μπόρεσε να ερμηνεύσει;

Ο Maxwell με την ενοποιημένη θεωρία του για τον ηλεκτρομαγνητισμό (1864), είχε προβλέψει την ύπαρξη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων ως μηχανισμού διάδοσης της ενέργειας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στον χώρο. Το 1886, και ενώ ο Maxwell είχε πεθάνει, ο Γερμανός Heinrich Hertz παρήγαγε ηλεκτρομαγνητικά κύματα με ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα και απέδειξε ότι αυτά διαδίδονται στον χώρο με την ταχύτητα του φωτός. Έτσι άνοιξε ο δρόμος για τη διερεύνηση της αλληλεπίδρασης ακτινοβολίας και ύλης. Ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα μπορούσε να μεταφέρει ενέργεια σ' ένα άτομο θέτοντάς το σε εξαναγκασμένη ταλάντωση αλλά και αντίστροφα ένα άτομο σε ταλάντωση, παρήγαγε ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Η κλασική θεωρία προβλέπει ότι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία μπορεί να μεταφέρει οποιοδήποτε ποσό ενέργειας, ανάλογα με τη συχνότητά της. Όμως μια σειρά από φαινόμενα (ακτινοβολία μέλανος σώματος, φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, γραμμικά φάσματα εκπομπής, φαινόμενο Compton) δεν μπορούσαν να ερμηνευτούν με την κλασική θεωρία.

Θ6.2) Ποια ήταν η υπόθεση του Planck η οποία αποτέλεσε και το θεμέλιο της κβαντικής θεωρίας;

Το 1900 ο Γερμανός Φυσικός Max Planck κάνει την πολύ ριζοσπαστική υπόθεση ότι η ενέργεια εκπέμπεται ή απορροφάται από ένα αντικείμενο κατά διακριτές ποσότητες (κατά κβάντα) ή απλούστερα κατά μικρά πακέτα. Επομένως, η συνολική ενέργεια δεν μπορεί παρά να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του κβάντου ενέργειας. Με την υπόθεση αυτή αντιμετωπίστηκαν όλα τα αδιέξοδα στα οποία είχε οδηγηθεί η κλασική θεωρία. Βέβαια, η κβάντωση ενός μεγέθους δεν μας είναι μια άγνωστη υπόθεση. Για παράδειγμα το ηλεκτρικό φορτίο είναι κβαντισμένο μέγεθος με κβάντο το φορτίο του ηλεκτρονίου. Οποιαδήποτε ποσότητα φορτίου είναι πάντα ακέραιο πολλαπλάσιο του φορτίου του ηλεκτρονίου. Η υπόθεση του Planck ήταν το θεμέλιο μιας νέας θεωρίας, της κβαντικής θεωρίας η οποία προέβλεπε κβάντωση και άλλων μεγεθών όπως η ορμή και η στροφορμή.

Θ6.3) Ποια φαινόμενα ερμηνεύει η κβαντική θεωρία; Πότε τα συμπεράσματά της ταυτίζονται με αυτά της κλασικής;

Η κβαντική θεωρία ερμηνεύει φαινόμενα σε ατομικό επίπεδο τα οποία δεν μπορεί να ερμηνεύσει η κλασική θεωρία. Όταν εξετάζουμε φαινόμενα του μακρόκοσμου η κβάντωση των μεγεθών γίνεται δυσδιάκριτη και τότε τα συμπεράσματα της κβαντικής θεωρίας ταυτίζονται με αυτά της κλασικής.

Θ6.4) Τι γνωρίζετε για τη διαδικασία με την οποία καθορίζεται το χρώμα που αποδίδεται σε ένα σώμα;

Ένα οποιοδήποτε σώμα δε φαίνεται στο σκοτάδι ενώ αν του ρίξουμε φως, τότε το βλέπουμε. Αυτό συμβαίνει γιατί όλο ή ένα μέρος από το φως που πέφτει στο σώμα επανεκπέμπεται (διαχέεται) στο περιβάλλον με αποτέλεσμα κάποιες από τις επανεκπεμπόμενες φωτεινές ακτίνες να φτάνουν στα μάτια μας. Έτσι, καθορίζεται και το χρώμα που αποδίδουμε στο σώμα. Ειδικότερα, αν φωτίσουμε ένα σώμα με λευκό φως εν γένει απορροφά κάποια μήκη κύματος ενώ άλλα τα επανεκπέμπει. Από τα επανεκπεμπόμενα μήκη κύματος καθορίζεται το χρώμα του σώματος το οποίο βλέπουμε. Στην ειδική περίπτωση που επανεκπέμπονται όλα τα μήκη κύματος του λευκού φωτός το σώμα φαίνεται λευκό. Αντίθετα, όταν το σώμα απορροφά όλα τα μήκη κύματος τότε αυτό φαίνεται μαύρο.

Θ6.5) Ποια ακτινοβολία ονομάζεται θερμική;

Κάθε σώμα σε οποιαδήποτε θερμοκρασία και αν βρίσκεται εκπέμπει ενέργεια με μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Την ακτινοβολία αυτή την ονομάζουμε θερμική ακτινοβολία.

Θ6.6) Πώς ορίζεται η ένταση της ακτινοβολίας;

Το μέγεθος που εκφράζει την ενέργεια που εκπέμπεται από τη μονάδα της επιφανείας ενός σώματος στη μονάδα του χρόνου, ονομάζεται ένταση της ακτινοβολίας, με σύμβολο το I και μονάδα μέτρησης στο S.I. το J/m^2s ή W/m^2 .

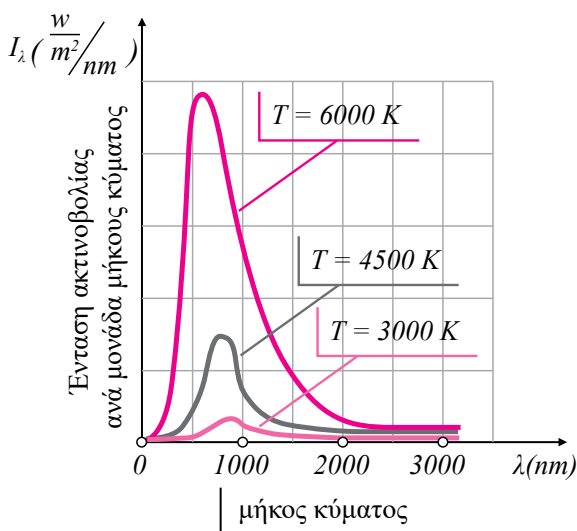
Η ένταση της ακτινοβολίας που εκπέμπει ένα σώμα εξαρτάται από τη θερμοκρασία του.

Θ6.7) Πώς ορίζεται το μέλαν σώμα στη φυσική;

Μέλαν σώμα στη φυσική θεωρείται το σώμα που απορροφά την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που προσπίπτει σε αυτό, σε όλο το φάσμα της (σε όλες τις συχνότητες). Πρακτικά, μέλαν σώμα μπορεί να θεωρηθεί ένα οποιοδήποτε αντικείμενο με αιθαλωμένη την επιφάνειά του.

Θ6.8) Τι γνωρίζετε για την ακτινοβολία του μέλανος σώματος; Τι αναφέρει ο νόμος του Wien;

Το μέλαν σώμα σε οποιαδήποτε θερμοκρασία και αν βρίσκεται εκπέμπει ενέργεια με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σε όλο το φάσμα της. Το μεγαλύτερο τμήμα της ενέργειας που εκπέμπεται μ' αυτόν τον τρόπο περιορίζεται σε μια στενή περιοχή, με αιχμή κάποιο μήκος κύματος ($\lambda_{\max}$) το οποίο είναι διαφορετικό για κάθε θερμοκρασία. Σε θερμοκρασίες γύρω στους 1000 K το μέλαν σώμα εκπέμπει κυρίως στην υπέρυθη περιοχή, ενώ σε πιο υψηλές θερμοκρασίες το $\lambda_{\max}$ μετατοπίζεται σε μικρότερα μήκη κύματος (μεγαλύτερες συχνότητες) στην περιοχή του ορατού, όπως φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



Η σχέση που συνδέει την απόλυτη θερμοκρασία T του μέλανος σώματος με το μήκος κύματος αιχμής ($\lambda_{\max}$) είναι:

$$\lambda_{\max} T = \text{σταθερό (νόμος μετατόπισης του Wien)}$$

Θ6.9) Ποια ήταν η ερμηνεία της κλασικής φυσικής για την ακτινοβολία του μέλανος σώματος;

Για να ερμηνεύσουν τα πειραματικά δεδομένα οι ερευνητές δέχτηκαν ότι τα άτομα των σωμάτων ταλαντώνονται. Το πλάτος ταλάντωσης των σωμάτων είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας στην οποία βρίσκονται. Αποτέλεσμα της ταλάντωσης αυτής των ατόμων, που μπορούμε να τα δούμε ως στοιχειώδη ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα, είναι η εκπομπή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Η υπόθεση αυτή όμως δεν ήταν σε θέση να ερμηνεύσει ικανοποιητικά τα πειραματικά αποτελέσματα.

Θ6.10) Ποιες ήταν οι δύο υποθέσεις που διατύπωσε ο Planck και με τις οποίες ερμηνεύτηκε η ακτινοβολία του μέλανος σώματος;

Οι δύο υποθέσεις που διατύπωσε ο Planck ήταν οι εξής:

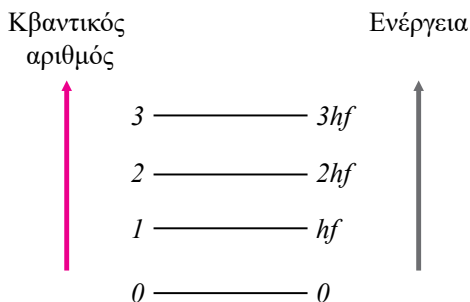
1. Η ενέργεια των ταλαντούμενων ατόμων δε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Μπορεί να πάρει μόνο διακριτές (κβαντισμένες) τιμές. Οι τιμές της ενέργειας που μπορεί να έχει το ταλαντούμενο άτομο είναι:

$$E_n = nhf$$

όπου n ένας θετικός ακέραιος αριθμός που ονομάζεται κβαντικός αριθμός, f η συχνότητα ταλάντωσης του ατόμου και h μια σταθερά που αργότερα έπαιξε πολύ σημαντικό ρόλο στη φυσική και ονομάστηκε σταθερά δράσης του Planck. Η τιμή της βρέθηκε:

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

2. Το ποσό της ενέργειας, που μπορεί να απορροφήσει ή να εκπέμψει ένα άτομο, υπό μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας μπορεί να πάρει μόνο διακριτές τιμές. Στο ακόλουθο σχήμα παριστάνεται μια εικόνα των ενεργειακών σταθμών στις οποίες μπορεί να βρεθεί το άτομο.

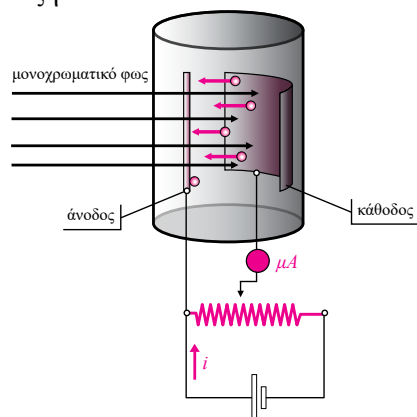


Στην περίπτωση που το άτομο απορροφήσει ένα κβάντο ενέργειας, δηλαδή ενέργεια, $E = hf$, αυξάνει την ενέργειά του κατά ένα σκαλοπάτι στην κλίμακα των ενεργειακών σταθμών. Αν πάλι το άτομο εκπέμψει ένα κβάντο ενέργειας υπό μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας τότε κατεβαίνει ένα σκαλοπάτι στην ίδια κλίμακα. Τα άτομα, επομένως, απορροφούν ή εκπέμπουν ενέργεια όχι συνεχώς αλλά κάνοντας ενεργειακά άλματα.

Θ6.11) Ποιο φαινόμενο ονομάζεται φωτοηλεκτρικό; Να περιγράψετε την πειραματική διάταξη με την οποία μπορούμε να περιγράψουμε το φαινόμενο αυτό.

Φωτοηλεκτρικό ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο μια μεταλλική επιφάνεια απελευθερώνει ηλεκτρόνια στο περιβάλλον όταν πάνω σε αυτήν προσπίπτει φως. Τα ηλεκτρόνια που υπάρχουν στο εσωτερικό ενός αγωγού περιορίζονται στον χώρο που καταλαμβάνει ο αγωγός από δυνάμεις που εμποδίζουν τη διάχυσή τους στο περιβάλλον. Όταν μια δέσμη φωτός προσπίπτει πάνω στην επιφάνεια του αγωγού κάποια ηλεκτρόνια απορροφούν ενέργεια αρκετή για να μπορούν να υπερνικήσουν τις δυνάμεις αυτές και εξέρχονται από το μέταλλο (φωτοηλεκτρόνια). Για να μελετήσουμε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη διάταξη.

Μέσα σε ένα σωλήνα υψηλού κενού ($\approx 10^{-7}$) atm) τοποθετούμε δύο ηλεκτρόδια. Το πρώτο, που χρησιμεύει ως κάθοδος, έχει μεγάλη επιφάνεια, φέρει επιστρωση από αλκαλιμέταλλο (Κάλιο K ή Καίσιο Cs) και όταν φωτίζεται εκπέμψει ηλεκτρόνια. Τα ηλεκτρόνια αυτά συλλέγονται από το δεύτερο ηλεκτρόδιο την άνοδο. Με τη βοήθεια μιας ποτενσιομετρικής διάταξης μπορούμε να μεταβάλλουμε την τάση που εφαρμόζεται στα ηλεκτρόδια. Τέλος, με τη χρήση ενός μικροαμπερομέτρου που παρεμβάλλεται στο κύκλωμα



μπορούμε να μετρήσουμε την ένταση του ρεύματος που οφείλεται στα ηλεκτρόνια που εκπέμπει η φωτιζόμενη κάθοδος. Όταν η κάθοδος φωτίζεται, εκπέμπει ηλεκτρόνια (φωτοηλεκτρόνια) τα οποία επιταχύνονται από το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των ηλεκτροδίων και καταλήγουν στην άνοδο.

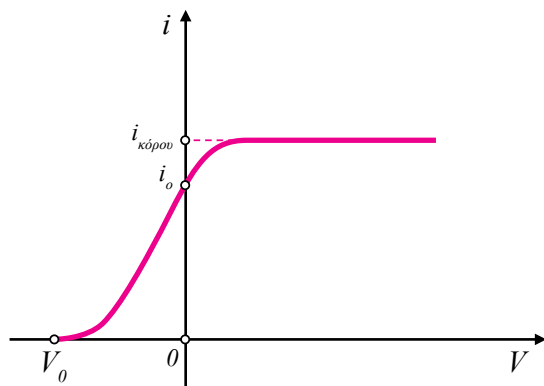
Θ6.12) Τι διαπιστώνεται από την πειραματική μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου;

Πειραματικά διαπιστώνουμε ότι:

1. Εκπομπή φωτοηλεκτρονίων έχουμε μόνο όταν η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη ή ίση μιας ορισμένης συχνότητας η οποία είναι χαρακτηριστική για το μέταλλο και αυτήν την οριακή συχνότητα την ονομάζουμε συχνότητα κατωφλίου (f_0).
2. Ο αριθμός των ηλεκτρονίων που αποσπώνται από το μέταλλο ανά μονάδα χρόνου είναι ανάλογος της έντασης της φωτεινής ακτινοβολίας που προσπίπτει στο μέταλλο.
3. Η ταχύτητα με την οποία τα ηλεκτρόνια βγαίνουν από το μέταλλο δεν εξαρτάται από την ένταση της φωτεινής ακτινοβολίας αλλά μόνο από τη συχνότητά της και αυξάνεται όταν η συχνότητα της ακτινοβολίας μεγαλώνει.

Θ6.13) Ποιο είναι το διάγραμμα της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με την τάση μεταξύ ανόδου-καθόδου σε ένα πείραμα μελέτης του φωτοηλεκτρικού φαινομένου;

Το ακόλουθο διάγραμμα παριστάνει την ένταση του ρεύματος σε συνάρτηση με την τάση μεταξύ ανόδου και καθόδου στο κύκλωμα με το οποίο μελετούμε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο.



Παρατηρούμε για τάση μηδέν έχουμε ρεύμα και αυτό σημαίνει ότι τα φωτοηλεκτρόνια εξέρχονται από την κάθοδο με κινητική ενέργεια που τους επιτρέπει να κινηθούν μέχρι την άνοδο. Ρεύμα όμως έχουμε και για τάσεις λίγο μικρότερες από το μηδέν. Τάση αρνητική, εδώ, σημαίνει ότι η άνοδος έχει μικρότερο δυναμικό από την κάθοδο. Σ' αυτήν την περίπτωση το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ ανόδου και καθόδου παρεμποδίζει τα ηλεκτρόνια που εξέρχονται από την κάθοδο να φτάσουν στην άνοδο.

Θ6.14) Πώς ορίζεται η τάση αποκοπής και πώς το έργο εξαγωγής;

Εφόσον για κάποιες αρνητικές τιμές της τάσης έχουμε ρεύμα, η κινητική ενέργεια ορισμένων ηλεκτρονίων, όταν εξέρχονται από την κάθοδο, είναι αρκετά μεγάλη ώστε να υπερνικήσουν το αντιτιθέμενο ηλεκτρικό πεδίο και να φτάσουν στην άνοδο. Η τάση (V_0) στην οποία διακόπτεται το ρεύμα ονομάζεται τάση αποκοπής. Για να υπερνικήσει τις δυνάμεις που το συγκρατούν στο μέταλλο ένα ηλεκτρόνιο θα πρέπει να προσλάβει ένα ελάχιστο ποσό ενέργειας. Η ενέργεια αυτή ονομάζεται έργο εξαγωγής και συμβολίζεται με ϕ . Το έργο εξαγωγής ποικίλει από μέταλλο σε μέταλλο.

Θ6.15) Σε ποια σημεία απέτυχε η κλασική θεωρία να ερμηνεύσει το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο;

Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο δε μπορεί να εξηγηθεί μόνο από το γεγονός ότι το φως είναι ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Για να υπερνικήσει τις δυνάμεις που το συγκρατούν στο μέταλλο ένα ηλεκτρόνιο θα πρέπει να προσλάβει ένα ελάχιστο ποσό ενέργειας (έργο εξαγωγής). Το φως, ως ηλεκτρομαγνητικό κύμα, μεταφέρει ενέργεια, επομένως, είναι αναμενόμενο ότι τα ηλεκτρόνια κάποιου μετάλλου μπορούν να απορροφήσουν ενέργεια από το φως και να εξέλθουν από το μέταλλο. Η κλασική όμως θεωρία δεν μπόρεσε να ερμηνεύσει το γεγονός ότι η εξαγωγή μερικών ηλεκτρονίων από το μέταλλο και η κινητική ενέργεια με την οποία εξέρχονται εξαρτάται από τη συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και όχι από την ενέργεια που μεταφέρει η φωτεινή δέσμη που προσπίπτει στο μέταλλο, δηλαδή από την ένταση της ακτινοβολίας.

Θ6.16) Με ποια υπόθεση ο Einstein ερμήνευσε τα πειραματικά δεδομένα του φωτοηλεκτρικού φαινομένου;

Το φαινόμενο ερμηνεύτηκε το 1905 από τον Einstein ο οποίος, επεκτείνοντας τις απόψεις του Planck, υπέθεσε ότι:

«το φως αποτελείται από μικρά πακέτα ενέργειας, που ονομάζονται κβάντα φωτός ή φωτόνια».

Η ενέργεια κάθε φωτονίου είναι:

$$E = hf$$

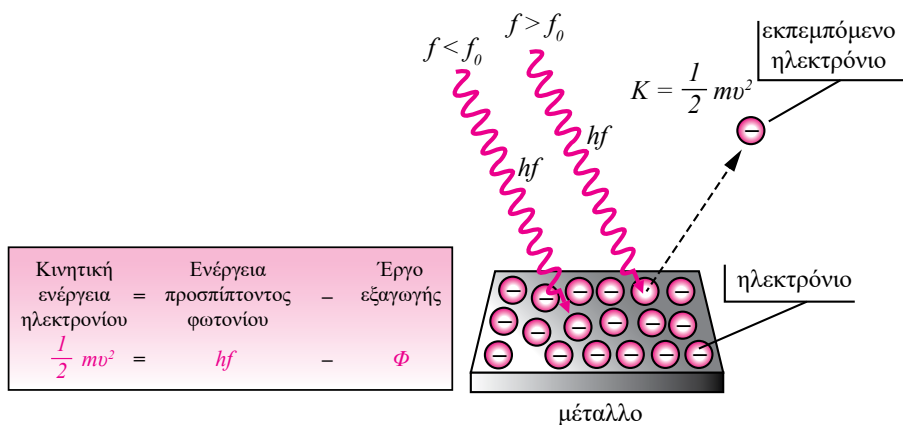
όπου f η συχνότητά του και h η σταθερά του Planck.

Θ6.17) Τι γνωρίζετε για τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein; Πώς ορίζεται η συχνότητα κατωφλίου;

Σύμφωνα με τον Einstein, κάθε φωτόνιο της δέσμης που φωτίζει την κάθοδο μεταδίδει όλη του την ενέργειά hf σε ένα μόνο από τα ηλεκτρόνια του μετάλλου. Εάν η ενέργεια hf του φωτονίου είναι μικρότερη από το έργο εξαγωγής, το ηλεκτρόνιο δε μπορεί να εγκαταλείψει το μέταλλο. Στην περίπτωση που είναι μεγαλύτερη ή ίση με το έργο εξαγωγής ϕ το ηλεκτρόνιο εγκαταλείπει το μέταλλο με κινητική ενέργεια που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$K = hf - \phi \text{ (Φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein)}$$

Παρακάτω φαίνεται μια σχηματική αναπαράσταση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου:



Η φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein ερμηνεύει όλα τα πειραματικά δεδομένα.

Για να εξέλθει ένα ηλεκτρόνιο από το μέταλλο πρέπει να ισχύει:

$$hf - \phi \geq 0$$

δηλαδή η ενέργεια του προσπίπτοντος φωτονίου να είναι μεγαλύτερη ή οριακά ίση με το έργο εξαγωγής $hf \geq \phi$ ή $f \geq \frac{\phi}{h}$. Η συχνότητα $f_0 = \frac{\phi}{h}$ ονομάζεται συχνότητα κατωφλίου. Εάν η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα κατωφλίου η αύξηση της έντασης της προσπίπτουσας ακτινοβολίας συνεπάγεται αύξηση του αριθμού των φωτονίων που πέφτουν στην κάθοδο ανά μονάδα χρόνου άρα και αύξηση του αριθμού των φωτοηλεκτρονίων που εξέρχονται από το μέταλλο στον ίδιο χρόνο. Τέλος, όπως φαίνεται από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση, η κινητική ενέργεια με την οποία εξέρχονται τα ηλεκτρόνια από κάποιο μέταλλο εξαρτάται μόνο από τη συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.

Θ6.18) Με ποια σχέση συνδέεται η ορμή ενός φωτονίου μιας ακτινοβολίας με το μήκος κύματος της ακτινοβολίας;

Γνωρίζουμε ότι ένα σωματίο με μηδενική μάζα ηρεμίας (τέτοιο είναι το φωτόνιο) έχει ενέργεια $E = pc$. Όμως είδαμε ότι η ενέργεια ενός φωτονίου είναι $E = hf$. Προκύπτει επομένως ότι $p = \frac{hf}{c}$. Αν λάβουμε υπόψη ότι $c = \lambda f$ καταλήγουμε στη σχέση υπολογισμού της ορμής του φωτονίου με τη μορφή:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Το φως στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο συμπεριφέρεται σαν ένα ρεύμα σωματιδίων (φωτονίων). Σε άλλες περιπτώσεις όμως το φως συμπεριφέρεται σαν κύμα (για παράδειγμα δίνει φαινόμενα συμβολής). Η παραπάνω σχέση υπολογισμού της ορμής του φωτονίου είναι πολύ σημαντική γιατί φωτίζει τη δυαδική φύση του φωτός. Συνδέει μια καθαρά σωματιδιακή ιδιότητα, όπως η ορμή, με μια καθαρά κυματική, όπως το μήκος κύματος. Ο σύνδεσμος μεταξύ τους είναι η σταθερά του Planck.

Θ6.19) Τι γνωρίζετε για τις ακτίνες X;

Οι ακτίνες X ή ακτίνες Ρέντγκεν χρησιμοποιούνται καθημερινά σήμερα για τη λήψη κοινών ακτινογραφιών. Έχουν μήκη κύματος από 0,001nm έως 1 nm. Ο μηχανισμός με το οποίο παράγονται οι ακτίνες X είναι ακριβώς ο αντίστροφος από αυτόν του φωτοηλεκτρικού φαινομένου. Στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο μια μεταλλική επιφάνεια «βομβαρδίζεται» με ηλεκτρομαγνητικό κύμα και εκπέμπει ηλεκτρόνια. Στις ακτίνες X η μεταλλική επιφάνεια «βομβαρδίζεται» με ηλεκτρόνια και εκπέμπει ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Όταν τα ηλεκτρόνια της δέσμης φτάνουν στην επιφάνεια του μετάλλου επιβραδύνονται απότομα. Η επιβράδυνση αυτή συνοδεύεται και από μια εκπομπή ακτινοβολίας, το φωτόνιο της οποίας θα έχει ενέργεια μικρότερη ή ίση με την ενέργεια του ηλεκτρονίου στο οποίο οφείλεται η εκπομπή του. Όμως, υπάρχει και άλλη αιτία για την οποία εκπέμπεται ακτινοβολία από τη μεταλλική επιφάνεια. Καθώς τα ηλεκτρόνια συγκρούονται με τα άτομα της επιφάνειας του μετάλλου τους μεταφέρουν ενέργεια. Τα άτομα διεγείρονται και τα ηλεκτρόνά τους μεταφέρονται σε στιβάδες με μεγαλύτερη ενέργεια. Όταν αποδιεγείρονται, όταν δηλαδή τα ηλεκτρόνια θα επιστρέψουν στην αρχική τους στιβάδα, εκπέμπουν στο περιβάλλον ενέργεια με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.

Θ6.20) Να περιγράψετε τη σκέδαση Compton.

Η ύπαρξη φωτονίων επιβεβαιώθηκε πειραματικά το 1924 από τον Αμερικανό Φυσικό Compton ο οποίος παρατήρησε ότι όταν ακτίνες X προσπίπτουν σε μια υλική επιφάνεια ένα μέρος τους εκτρέπεται από τα σωματίδια της ύλης (σκεδάζεται). Επίσης, διαπίστωσε ότι το σκεδαζόμενο τμήμα της ακτινοβολίας έχει μήκος κύματος μεγαλύτερο από το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας (μικρότερη συχνότητα). Οι μετρήσεις του Compton έδειξαν ότι η μεταβολή του μήκους κύματος ανάμεσα στην προσπίπτουσα και τη σκεδαζόμενη δέσμη εξαρτάται μόνο από τη γωνία ανάμεσα στις δύο δέσμες ικανοποιώντας τη σχέση:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\phi)$$

όπου λ' το μήκος κύματος της σκεδαζόμενης δέσμης, λ το μήκος κύματος της προσπίπτουσας δέσμης, m η μάζα του ηλεκτρονίου και ϕ η γωνία μεταξύ προσπίπτουσας και ανακλώμενης δέσμης.

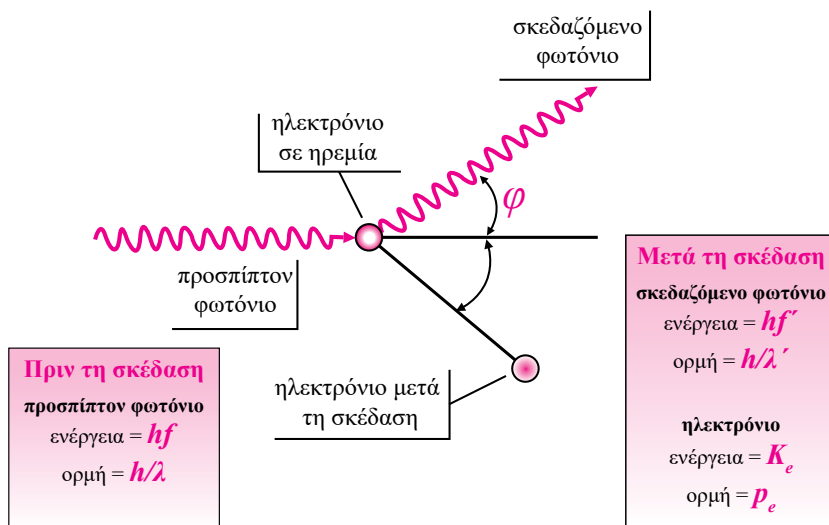
Θ6.21) Γιατί απέτυχε η κλασική θεωρία να εξηγήσει το φαινόμενο Compton;

Σύμφωνα με την κλασική θεωρία ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα συχνότητας f που προσπίπτει σ' ένα υλικό αναγκάζει τα ηλεκτρόνια του υλικού να ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα και, επακόλουθα, να παράγουν με τη σειρά τους σαν μικρές κεραίες, ηλεκτρομαγνητικό κύμα της ίδιας συχνότητας f .

Θ6.22) Με ποιον τρόπο εξηγείται το φαινόμενο Compton;

Τα πράγματα ξεκαθαρίζουν αν κοιτάξουμε την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία ως ρεύμα φωτονίων, δηλαδή σωματιδίων με μηδενική μάζα ηρεμίας που μεταφέρουν ενέργεια και ορμή. Σε αυτή την περίπτωση το πρόβλημα σκέδασης της ακτινοβολίας μετατρέπεται σε πρόβλημα κρούσης ανάμεσα σε ένα φωτόνιο και ένα ηλεκτρόνιο.

Ας υποθέσουμε ότι ένα φωτόνιο μήκους κύματος λ συγκρούεται μ' ένα πρακτικά ακίνητο ηλεκτρόνιο όπως φαίνεται και στο ακόλουθο σχήμα.



Μετά τη σκέδαση το φωτόνιο κινείται σχηματίζοντας γωνία ϕ με την αρχική διεύθυνση κίνησης και έχοντας χάσει τμήμα της αρχικής του ενέργειας αφού ένα μέρος της αρχικής του ενέργειας θα μεταφερθεί στο ηλεκτρόνιο. Το σκεδαζόμενο φωτόνιο μετατρέπεται σε φωτόνιο μήκους κύματος λ' με $\lambda' > \lambda$. Κατά τη διάρκεια της σκέδασης πρέπει να διατηρείται η ενέργεια και η ορμή του συστήματος. Το φωτόνιο έχει πριν την σκέδαση ενέργεια $E = hf = \frac{hc}{\lambda}$ και μετά την σκέδαση $E' = \frac{hc}{\lambda'}$. Επομένως θα πρέπει να ισχύει:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + K_e$$

όπου K_e η κινητική ενέργεια του ανακρουόμενου ηλεκτρονίου.

Θ6.23) Ποιο ήταν το αξίωμα που έθεσε ο de Broglie για την κυματική φύση της ύλης; Πώς επαληθεύτηκε πειραματικά;

Το 1924 (20 περίπου χρόνια μετά την υπόθεση του Einstein ότι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα, όπως το φως, έχει σωματιδιακή υπόσταση), ο Γάλλος Φυσικός Louis de Broglie πιστεύοντας στη συμμετρία της φύσης έθεσε το αξίωμα ότι οποιοδήποτε σωματίο ορμής p είναι συνδεδεμένο μ' ένα κύμα μήκους κύματος λ που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Η υπόθεση de Broglie σύντομα επαληθεύτηκε. Το 1927, στην Αμερική, οι Davisson και Germer διαπίστωσαν ότι μια δέσμη ηλεκτρονίων που κινούνται με μεγάλη ταχύτητα περιθλάται με τρόπο ανάλογο με αυτόν που περιθλάται μια δέσμη ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, π.χ μια δέσμη ακτίνων X. Σύντομα τα νέα πειράματα έδειξαν ότι κυματική συμπεριφορά παρουσιάζουν και δέσμες σωματιδίων α και δέσμες νετρονίων. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν ήταν τέτοια που δεν άφηναν κανένα περιθώριο να αμφισβητηθεί ότι τα σωματίδια έχουν και κυματική φύση.

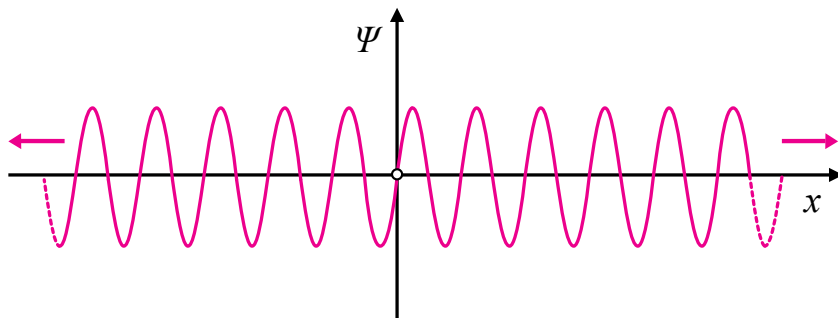
Θ6.24) Για τι είδους σωματία έχει εφαρμογή η υπόθεση de Broglie;

Η υπόθεση de Broglie για την κυματική φύση της ύλης έχει ουσιαστικά εφαρμογή μόνο για σωματία ατομικής και υποατομικής κλίμακας.

Θ6.25) Τι γνωρίζετε για την αδυναμία μας να προσδιορίσουμε επακριβώς ταυτόχρονα τη θέση και την ορμή ενός σωματιδίου; Γιατί η κβαντική θεώρηση για την διπλή οντότητα της ύλης (κυματική-σωματιδιακή) εισάγει την αβεβαιότητα αυτήν;

Παρατηρήσαμε ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα συμπεριφέρονται άλλοτε ως κύματα και άλλοτε ως δέσμες σωματίων. Επίσης δέσμες κλασικών σωματιδίων όπως τα ηλεκτρόνια, έχουν και κυματική συμπεριφορά. Μπορούμε να πούμε ότι η ύλη, με την ευρύτερη έννοια (εάν συμπεριλάβουμε και την ενέργεια) έχει διπλή οντότητα (σωματιδιακή και κυματική). Αυτό το συμπέρασμα έχει πολύ καλά θεμελιωθεί πειραματικά. Υπό αυτήν όμως τη θεώρηση προκύπτει ένα πρόβλημα. Ένα σωματίδιο όπως το αντιλαμβάνονται οι κλασικοί φυσικοί, είναι κάτι του οποίου η θέση στον χώρο ήταν αυστηρά προσδιορισμένη. Αντίθετα, ένα κύμα εκτείνεται στο χώρο. Ένα σωματίδιο με κυματική συμπεριφορά όμως που βρίσκεται;

Σύμφωνα με την κβαντική θεωρία: «δεν μπορούμε να γνωρίζουμε ακριβώς που βρίσκεται.» Θεωρούμε ένα σωματίδιο που έχει μια ορισμένη χρονική στιγμή ορμή p παράλληλη στον άξονα των x . Σύμφωνα με την υπόθεση de Broglie και τη σχέση $\lambda = \frac{h}{p}$, εάν γνωρίζουμε επακριβώς την ορμή του σωματιδίου τότε αυτό θα συνδέεται με ένα κύμα με επακριβώς ίδιο μήκος κύματος λ . Η εξίσωση που περιγράφει το στιγμιότυπο ενός τέτοιου κύματος στο χώρο τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $\Psi = A \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Το στιγμιότυπο εκτείνεται από το $-\infty$ μέχρι το $+\infty$. Το σώμα που είναι συνδεδεμένο με αυτό το κύμα μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε. Για να μην, όμως, καταστρέψουμε εντελώς τη σωματιδιακή εικόνα χρειαζόμαστε κύματα περιορισμένα στον χώρο. Αυτά τα κύματα ονομάζονται κυματοπακέτα. Μπορούμε να φτιάξουμε και να περιγράψουμε μαθηματικά οποιαδήποτε κυματομορφή με τη μέθοδο της υπέρθεσης συνδυάζοντας κατάλληλα διάφορα κύματα με επιλεγμένα μήκη κύματος πλάτη και φάσεις. Υπάρχει όμως ένας περιορισμός. Όσο πιο εντοπισμένο στο χώρο (πιο σωματιδιακό) θέλουμε να είναι το κυματοπακέτο τόσο περισσότερα και πιο διασκορπισμένα μήκη κύματος πρέπει να χρησιμοποιήσουμε. Πληρώνουμε επομένως τον εντοπισμό της θέσης του σωματιδίου-

κύματος με απροσδιοριστία στο μήκος κύματος που του αντιστοιχούμε και κατ' επέκταση και στην ορμή του. Η αδυναμία μας να προσδιορίσουμε επακριβώς ταυτόχρονα τη θέση και την ορμή ενός σωματιδίου δεν οφείλεται σε πειραματικές ατέλειες αλλά είναι σύμφυτη με την ίδια την κβαντική δομή της ύλης.

Θ6.26) Ποιες είναι οι δύο διατυπώσεις της αρχής αβεβαιότητας του Heisenberg;

Ο Γερμανός Φυσικός Βέρνερ Χάιζενμπεργκ το 1927 κωδικοποίησε τα παραπάνω και διατύπωσε την αρχή της αβεβαιότητας (ή απροσδιοριστίας) με τη σχέση:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$$

Δεν είναι δυνατόν να μετρήσουμε ταυτόχρονα και τη θέση και την ορμή ενός σωματιδίου με απεριόριστη ακρίβεια.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι τα σύμβολα Δp_x , Δx δε σημαίνουν τη μεταβολή των μεγεθών αλλά το εύρος της αβεβαιότητας με την οποία γνωρίζουμε τα μεγέθη. Ανάλογες σχέσεις ισχύουν και για τις άλλες διευθύνσεις:

$$\left(\Delta p_y \cdot \Delta y \geq \frac{h}{2\pi}, \Delta p_z \cdot \Delta z \geq \frac{h}{2\pi} \right)$$

Μια άλλη διατύπωση της αρχής της αβεβαιότητας του Χάιζενμπεργκ είναι η:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$$

Η αβεβαιότητα στη μέτρηση της ενέργειας μιας κατάστασης ενός συστήματος είναι αντιστρόφως ανάλογη με τον χρόνο που το σύστημα παραμένει σ' αυτή την κατάσταση. Με άλλο λόγια όλες οι μετρήσεις περιέχουν μια αβεβαιότητα, εκτός και αν διαθέτουμε για τη μέτρηση άπειρο χρόνο. Σ' ένα διεγερμένο άτομο ένα ή περισσότερα ηλεκτρόνια δε βρίσκονται στη θεμελιώδη τους κατάσταση, αλλά σε μια κατάσταση υψηλότερης ενέργειας. Όταν ένα τέτοιο ηλεκτρόνιο μεταπηδήσει στη θεμελιώδη του κατάσταση, εκπέμπει ένα φωτόνιο ενέργειας hf , ίσης με τη διαφορά ενέργειας των δύο καταστάσεων στις οποίες βρέθηκε.

Θ6.27) Με ποιον τρόπο μπορεί να ερμηνευτεί το εύρος των φασματικών γραμμών με τη βοήθεια της αρχής αβεβαιότητας του Heisenberg;

Ένα διεγερμένο άτομο εκπέμπει ακτινοβολία όταν ένα ή περισσότερα ηλεκτρόνια που δεν βρίσκονται στη θεμελιώδη κατάσταση γυρίσουν πίσω σε αυτή. Σε κάθε τέτοιο «κβαντικό άλμα» εκπέμπεται ένα φωτόνιο. Η μελέτη των φασμάτων εκπομπής δείχνει ότι οι φασματικές γραμμές δεν είναι αυστηρά καθορισμένες αλλά η κάθε μια εμφανίζει ένα φυσικό εύρος. Το εύρος αυτό μπορεί να εξηγηθεί με την αρχή της αβεβαιότητας. Ένα διεγερμένο άτομο μπορεί να εκπέμπει ένα φωτόνιο οποιαδήποτε χρονική στιγμή στο χρονικό διάστημα από μηδέν μέχρι και άπειρο. Ο μέσος χρόνος στον οποίο ένας μεγάλος αριθμός διεγερμένων ατόμων εκπέμπει ακτινοβολία είναι της τάξης του 10^{-8} s.

Από τη σχέση $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$ και επειδή $\Delta E = h \cdot \Delta f$ προκύπτει:

$$h \cdot \Delta f \geq \frac{h}{2\pi \cdot \Delta t} \text{ και } \Delta f \geq \frac{1}{2\pi \cdot \Delta t}$$

Θέτοντας στην παραπάνω σχέση όπου $\Delta t = 10^{-8}$ s έχουμε: $\Delta f \geq 1,6 \cdot 10^7$ Hz
 όπου $1,6 \cdot 10^7$ Hz είναι το ελάχιστο εύρος της φασματικής γραμμής.

¶6.28) Τι γνωρίζετε για την κυματοσυνάρτηση; Ποια ήταν η πρόταση του Max Born σχετικά με την ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης;

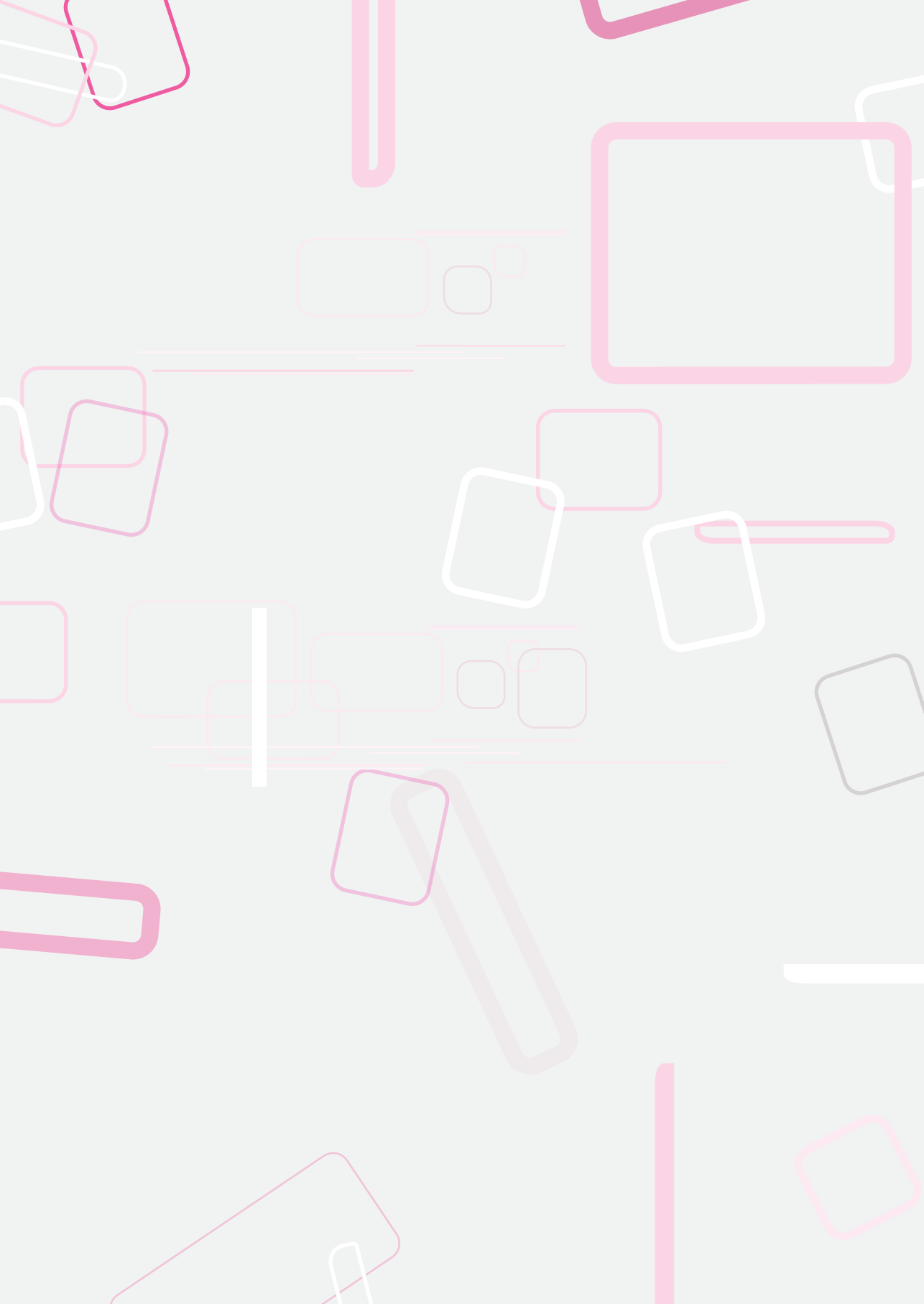
Είδαμε ότι ένα υποατομικό σωματίδιο (π.χ ηλεκτρόνιο), δεν μπορεί να περιγραφεί ως ένα υλικό σημείο, με τρεις συντεταγμένες στον χώρο. Υπό ορισμένες συνθήκες συμπεριφέρεται σαν κύμα. Για την περιγραφή του χρειαζόμαστε μια κυματοσυνάρτηση σε αναλογία με την εξίσωση κύματος που χρησιμοποιούμε για την περιγραφή ενός μηχανικού ή ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Την κυματοσυνάρτηση αυτή θα τη συμβολίζουμε με Ψ . Η κυματοσυνάρτηση είναι μια συνάρτηση της θέσης και του χρόνου $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$. Στα μηχανικά κύματα η εξίσωση του κύματος μιας δίνει σε κάθε χρονική στιγμή τη θέση κάθε σημείου του υλικού μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα. Στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα οι εξισώσεις κύματος που τα περιγράφουν μας δίνουν κάθε χρονική στιγμή την τιμή της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου μέσα στον οποίο διαδίδεται το κύμα. Η κυματοσυνάρτηση Ψ όμως που περιγράφει ένα σωματίδιο-κύμα δεν σχετίζεται με κάποιο μέσο διάδοσης ούτε με κάποιες ιδιότητες του χώρου. Είναι δύσκολο να αποδοθεί σε αυτήν κάποια φυσική σημασία αλλά μπορούμε μόνο να περιγράψουμε πως σχετίζεται με τα φυσικά παρατηρούμενα φαινόμενα. Για κάποιο συγκεκριμένο σημείο και για μια ορισμένη χρονική στιγμή η κυματοσυνάρτηση θα έχει μια συγκεκριμένη τιμή. Ο φυσικός Max Born πρότεινε να ερμηνεύσουμε το τετράγωνο του μέτρου της κυματοσυνάρτησης ως την πιθανότητα θέσης ανά μονάδα όγκου. Δηλαδή, αν ορίσουμε έναν στοιχειώδη όγκο dV γύρω από ένα συγκεκριμένο σημείο (x, y, z) το γινόμενο $|\Psi|^2 dV$ μας δίνει την πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίο μέσα στον όγκο dV στη δεδομένη χρονική στιγμή.

¶6.29) Ποια είναι η συνθήκη κανονικοποίησης;

Εάν χωρίσουμε το σύνολο του χώρου σε στοιχειώδεις όγκους dV και σε κάθε σημείο του χώρου βρούμε την τιμή της Ψ για κάποια χρονική στιγμή, το άθροισμα $|\Psi|^2 dV$ πρέπει να είναι ίσο με τη μονάδα. Ισχύει:

$$\sum |\Psi|^2 dV = 1$$

Δηλαδή η πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο κάπου στον χώρο είναι ίση με τη μονάδα, άρα κάθε χρονική στιγμή του σωματίου σίγουρα βρίσκεται κάπου. Η παραπάνω σχέση εξάγεται από τη διάσταση που έδωσε ο Born στο $|\Psi|^2$ και ονομάζεται συνθήκη κανονικοποίησης. Για να είναι η κυματοσυνάρτηση σωστή πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη κανονικοποίησης.



The background features a large, solid pink rectangle in the upper half. Below it, the background is a light gray. Scattered throughout are various geometric shapes: rounded rectangles, squares, and lines in shades of pink, white, and gray. Some shapes are solid, while others are outlines. The overall aesthetic is modern and minimalist.

Αναλυτικές Λύσεις

ΟΔΗΓΟΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Θ1.10) γ, Θ1.11) α, Θ1.12) β, Θ1.13) γ, Θ1.14) γ, Θ1.15) β, Θ1.16) α, Θ1.17) δ, Θ1.18) γ, Θ1.19) β, Θ2.17) γ, Θ2.18) α, Θ2.19) α, Θ2.20) γ, Θ2.21) β, Θ2.22) β, Θ2.23) β, Θ2.24) β, Θ2.25) β, Θ2.26) β, Θ3.23) α, Θ3.24) γ, Θ3.25) β, Θ3.26) β, Θ3.27) β, Θ3.28) α, Θ3.29) α, Θ3.30) β, Θ3.31) β, Θ3.32) α, Θ4.30) α, Θ4.31) β, Θ4.32) γ, Θ4.33) β, Θ4.34) β, Θ4.35) β, Θ4.36) β, Θ4.37) δ, Θ4.38) γ, Θ4.39) β, Θ5.42) β, Θ5.43) δ, Θ5.44) β, Θ5.45) δ, Θ5.46) α, Θ5.47) δ, Θ5.48) β, Θ5.49) β, Θ5.50) α, Θ5.51) γ, Θ6.30) β, Θ6.31) β, Θ6.32) α, Θ6.33) β, Θ6.34) α, Θ6.35) γ, Θ6.36) β, Θ6.37) δ, Θ6.38) γ, Θ6.39) β.

Πρόβλημα 1

α) Ισχύει:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow v_1' = +0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v_2' = +1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Η αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής του σώματος Σ₁ κατά την κρούση, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta p_1 = p_{1,\text{τελ}} - p_{1,\text{αρχ}} \Rightarrow \Delta p_1 = m_1 v_1' - m_1 v_1 \Rightarrow$$

$$\Delta p_1 = -3 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής του σώματος Σ₂ κατά την κρούση, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta p_2 = p_{2,\text{τελ}} - p_{2,\text{αρχ}} \Rightarrow \Delta p_2 = m_2 v_2' - m_2 v_2 \Rightarrow$$

$$\Delta p_2 = +3 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ₁ κατά την κρούση, είναι:

$$\Delta K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow \Delta K_1 = -3,75 \text{ J}$$

δ) Το ποσοστό επί τοις εκατό της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ₂ εξαιτίας της κρούσης, υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Pi(\%) = \frac{K_2' - K_2}{K_2} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} \cdot 100\%$$

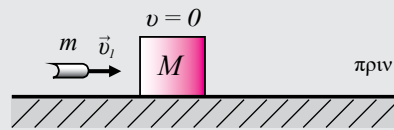
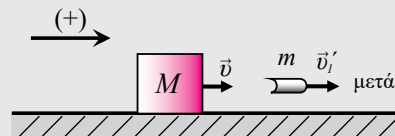
$$\Rightarrow \Pi(\%) = 125\%$$

ε) Η μέση δύναμη F που ασκήθηκε στο σώμα Σ₁ από το σώμα Σ₂ υπολογίζεται με τη βοήθεια της σχέσης:

$$\Sigma \vec{F} = \Delta \vec{p}_1 / \Delta t \Rightarrow \vec{F} = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} \Rightarrow |\vec{F}| = 30 \text{ N}$$

Πρόβλημα 2

α)



Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ο. προκύπτει:

$$mv_1 + 0 = mv_1' + Mv \Rightarrow v = \frac{mv_1 - mv_1'}{M} \Rightarrow v = 1 \text{ m/s}$$

β) Η θερμότητα που εκλύθηκε κατά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Q = \frac{1}{2} mv_1^2 - \left(\frac{1}{2} mv_1'^2 + \frac{1}{2} Mv^2 \right) \Rightarrow Q = 490,5 \text{ J}$$

γ) Η δυναμική ενέργεια του βλήματος κατά την κρούση δεν μεταβάλλεται, επομένως η οποιαδήποτε μεταβολή στη μηχανική του ενέργεια οφείλεται στη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας.

Το ζητούμενο ποσοστό επί τοις εκατό είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = -99\%$$

δ) Το ποσοστό επί τοις εκατό της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Pi'(\%) = \frac{Q}{K_{\text{ολ,αρχ}}} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi'(\%) = \frac{Q}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0} \cdot 100\% \Rightarrow$$

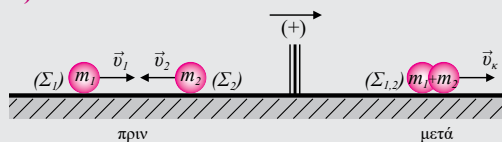
$$\Rightarrow \Pi'(\%) = \frac{490,5}{500} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi'(\%) = 98,1\%$$

ε) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας, για το βλήμα, κατά τη διάρκεια της κρούσης. Ισχύει:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = W_{\Sigma F} \Rightarrow W_{\Sigma F} = -495 \text{ J}$$

Πρόβλημα 3

α)



Από την εφαρμογή της Α.Δ.Ο. για την κρούση, έχουμε:

$$\frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow v_k = 2 \text{ m/s}$$

β) Η μεταβολή της ορμής του Σ_1 , κατά την κρούση, είναι:

$$\Delta p_1 = m_1 v_k - m_1 v_1 \Rightarrow \Delta p_1 = -6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

γ) Η μεταβολή της ορμής του Σ_2 , κατά την κρούση, είναι:

$$\Delta p_2 = m_2 v_k - (-m_2 v_2) \Rightarrow \Delta p_2 = +6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

δ) Η θερμότητα που εκλύθηκε κατά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Q = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_k^2 \Rightarrow Q = 27 \text{ J}$$

ε) Το ποσοστό επί τοις εκατό της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά την κρούση, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Pi(\%) = \frac{Q}{K_{\text{ολ,αρχ}}} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = \frac{Q}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = \frac{900}{11} \%$$

Πρόβλημα 4

α) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη θέση Α μέχρι τη θέση Γ. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 - 0 = m_1 gR + 0 \Rightarrow v = \sqrt{2gR} \Rightarrow v = 2 \text{ m/s}$$

β) Για την κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow N' = B \Rightarrow N' = m_1 g$$

Για την τριβή ισχύει:

$$T = \mu N' \Rightarrow T = \mu m_1 g$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη θέση Γ μέχρι τη θέση Δ. Έχουμε:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v^2 = -\mu m_1 g S_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{v^2 - 2\mu g S_1} \Rightarrow v_1 = 1 \text{ m/s}$$

Από την εφαρμογή της Α.Δ.Ο. για την κρούση, έχουμε:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_k \Rightarrow v_k = 0,4 \text{ m/s}$$

γ) Για τη μεταβολή της ορμής του Σ_2 ισχύει:

$$\Delta p_2 = m_2 v_k - m_2 v_2 \Rightarrow \Delta p_2 = +2,4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Το διάνυσμα $\Delta \vec{p}_2$ θα έχει μέτρο $2,4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ με φορά προς τα δεξιά.

δ) Έχουμε:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F_x \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = -\mu(m_1 + m_2)g \Rightarrow \left| \frac{\Delta p}{\Delta t} \right| = 25 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

ε) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος. Ισχύει:

$$0 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_k^2 = -\mu(m_1 + m_2) g s_{\text{ολ}} \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 0,016 \text{ m}$$

Πρόβλημα 5

α) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 από τη χρονική στιγμή που αφέθηκε ελεύθερο μέχρι τη στιγμή λίγο πριν από την κρούση. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 = m_1 g l \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gl} \Rightarrow v_1 = 4 \text{ m/s}$$

β) Από την αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας και την αρχή διατήρησης της ορμής για την ελαστική κρούση, προκύπτει:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow v_1' = \frac{(2m_2 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2}{2m_2 + m_2} \Rightarrow v_1' = \frac{v_1 + 2v_2}{3} \Rightarrow v_1' = -4 \text{ m/s}$$

γ) Από την αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας και την αρχή διατήρησης της ορμής

για την ελαστική κρούση, προκύπτει:

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v_2' = \frac{(m_2 - 2m_2)v_2 + 2 \cdot 2m_2v_1}{2m_2 + m_2}$$

$$\Rightarrow v_2' = \frac{-v_2 + 4v_1}{3} \Rightarrow v_2' = +8 \text{ m/s}$$

δ) Το ποσοστό επί τοις εκατό της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 , λόγω της κρούσης, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Pi(\%) = \frac{K_2' - K_2}{K_2} \cdot 100\% \Rightarrow \Rightarrow \Pi(\%) = \frac{\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2'^2 - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2}{\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 0$$

ε) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση. Προκύπτει:

$$0 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -m_1 gh \Rightarrow h = 0,8 \text{ m}$$

Πρόβλημα 6

α) Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση. Προκύπτει:

$$0 + m_2 |v_2| = |p_k| \Rightarrow |p_k| = 16 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

β) Υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Έχουμε:

$$|v_k| = \frac{|p_k|}{m_1 + m_2} \Rightarrow |v_k| = 4 \text{ m/s}$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{\Sigma F}$ που ασκούνται στο σώμα στη διεύθυνση του νήματος, αμέσως μετά την κρούση, έχει τον ρόλο κεντρομόλου δύναμης. Ισχύει:

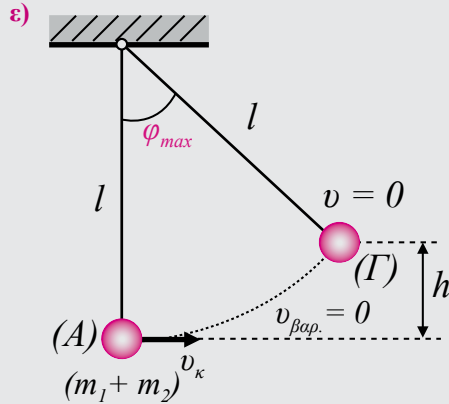
$$|\Sigma F| = F_k \Rightarrow |\Sigma F| = (m_1 + m_2) \frac{v_k^2}{l} \Rightarrow |\Sigma F| = 40 \text{ N}$$

γ) Η απώλεια της κινητικής ενέργειας λόγω της κρούσης είναι:

$$E_{\alpha\kappa} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_k^2 \Rightarrow E_{\alpha\kappa} = 32 \text{ J}$$

δ) Το κλάσμα της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι:

$$\kappa = \frac{Q}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} \Rightarrow \kappa = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_k^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} \Rightarrow \kappa = \frac{1}{2}$$



Ισχύει:

$$\sin \varphi_{\max} = \frac{l-h}{l} \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος, μετά την κρούση, από το σημείο Α μέχρι το σημείο Γ. Προκύπτει:

$$0 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_k^2 = 0 - (m_1 + m_2) gh \Rightarrow h = \frac{v_k^2}{2g} \Rightarrow h = 0,8 \text{ m}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) προκύπτει:

$$\sin \varphi_{\max} = \frac{l-h}{l} \Rightarrow \sin \varphi_{\max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_{\max} = 60^\circ$$

Πρόβλημα 7

α) Με τη βοήθεια των δύο διαγραμμάτων προκύπτει:

$$v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_1 = 8 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_2 = 0$$

β) Με τη βοήθεια των δύο διαγραμμάτων προκύπτει:

$$v_1' = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_1' = -1 \text{ m/s}$$

$$v_2' = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_2' = 3 \text{ m/s}$$

γ) Από την Α.Δ.Ο. έχουμε:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow m_2 = \frac{m_1 v_1' - m_1 v_1}{v_2 - v_2'} \Rightarrow m_2 = 12 \text{ kg}$$

δ) Υπολογίζουμε την κινητική ενέργεια του συστήματος λίγο πριν την κρούση:

$$K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Rightarrow K_{\text{αρχ}} = 128 \text{ J}$$

Υπολογίζουμε την κινητική ενέργεια του συστήματος αμέσως μετά την κρούση:

$$K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Rightarrow K_{\text{τελ}} = 56 \text{ J}$$

Ισχύει: $K_{\text{αρχ}} > K_{\text{τελ}}$ επομένως η κρούση είναι ανελαστική.

ε) Ισχύει:

$$\Pi(\%) = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2} 100\% \\ \Rightarrow \Pi(\%) = -56,25\%$$

Πρόβλημα 8

α) Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα $x'x$. Προκύπτει:

$$m|v_0| \cdot \sin\theta = (m + M)|v_k| \Rightarrow |v_k| = \frac{m|v_0| \cdot \sin\theta}{m + M} \\ \Rightarrow |v_k| = 6 \text{ m/s}$$

β) Η δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων κατά την κρούση δεν μεταβάλλεται και επομένως η οποιαδήποτε μεταβολή στη μηχανική του ενέργεια οφείλεται στη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας. Προκύπτει:

$$E_{\text{απ}} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} (m + M) v_k^2 \Rightarrow E_{\text{απ}} = 482 \text{ J}$$

γ) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος στο οριζόντιο δάπεδο αμέσως μετά την κρούση και μέχρι την ακινητοποίησή του. Προκύπτει:

$$0 - \frac{1}{2} (m + M) v_k^2 = W_T \Rightarrow W_T = -18 \text{ J}$$

δ) Ισχύει:

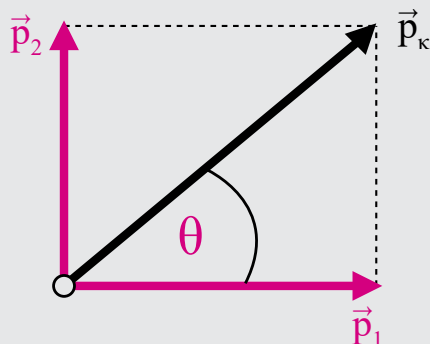
$$W_T = -Ts \Rightarrow \frac{W_T}{T} = -\mu(m + M)gs \Rightarrow s = \frac{-W_T}{-\mu(m + M)g} \Rightarrow s = 18 \text{ m}$$

ε) Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας για όλη τη διάρκεια του φαινομένου (από τη χρονική στιγμή ελάχιστα πριν την κρούση μέχρι τελικά να ακινητοποιηθεί το συσσωμάτωμα), προκύπτει:

$$Q = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow Q = 500 \text{ J}$$

Πρόβλημα 9

α)



Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο.:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_k$$

Το διάνυσμα $\vec{p}_k$ της ορμής του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι ίσο με το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{p}_1$ και $\vec{p}_2$ των ορμών των δύο σωμάτων Σ_1 και Σ_2 , αντίστοιχα, λίγο πριν την κρούση. Για το μέτρο του διανύσματος της ορμής του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση ισχύει:

$$p_k = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \Rightarrow (m_1 + m_2)^2 v_k^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 \\ \Rightarrow (m_1 + m_2)^2 v_k^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2$$

$$\Rightarrow v_k^2 = \frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \Rightarrow v_k = \sqrt{\frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}{(m_1 + m_2)^2}} \Rightarrow v_k = 2 \text{ m/s}$$

Ισχύει:

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{p_2}{p_1} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta = \frac{3}{4}$$

β) Το μέτρο της ορμής του συσσωματώματος είναι:

$$p_k = (m_1 + m_2) v_k \Rightarrow p_k = 5 \text{ kg m/s}$$

γ) Για τη μεταβολή του μέτρου της ορμής του σώματος Σ_1 , έχουμε:

$$\Delta|p_1| = m_1 v_k - m_1 v_1 \Rightarrow \Delta|p_1| = 0$$

δ) Η απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων, κατά την πλαστική κρούση, υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E_{\text{απ}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_k^2 \Rightarrow E_{\text{απ}} = 8 \text{ J}$$

ε) Το ποσοστό επί τοις εκατό της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά την κρούση, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Pi(\%) = \frac{Q}{K_{\text{ολ,αρχ}}} \cdot 100\%$$

$$\Rightarrow \Pi(\%) = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_k^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2} \cdot 100\%$$

$$\Rightarrow \Pi(\%) = \frac{800}{13}\%$$

Πρόβλημα 10

α) Η κρούση είναι ελαστική επομένως ισχύει η αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$\Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + 4v_2'^2 \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον άξονα x'x:

$$\vec{p}'_{2x} = \vec{p}_1 \Rightarrow p'_{2x} = m_1 v_1$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον άξονα y'y:

$$\vec{0} = p'_{2y} - \vec{p}'_1 \Rightarrow \vec{p}'_{2y} = m_1 v_1'$$

Ισχύει:

$$p_2'^2 = p_{2x}'^2 + p_{2y}'^2 \Rightarrow (m_2 v_2')^2 = (m_1 v_1)^2 + (m_1 v_1')^2$$

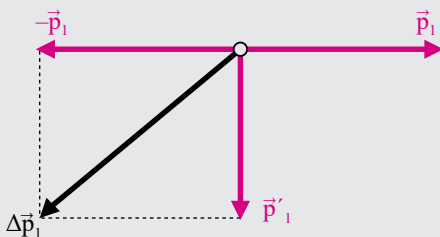
$$\Rightarrow 16v_2'^2 = v_1^2 + v_1'^2 \quad (2)$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1),(2) προκύπτει:

$$v_1' = 0,2\sqrt{15} v_1 \Rightarrow v_1' = \sqrt{15} \text{ m/s}$$

$$v_2' = 0,1\sqrt{10} v_1 \Rightarrow v_2' = 0,5\sqrt{10} \text{ m/s}$$

β)



Για τη μεταβολή της ορμής $\Delta \vec{p}_1$ του σώματος Σ_1 ,κατά την κρούση, ισχύει:

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}'_1 - \vec{p}_1 \Rightarrow \Delta \vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + (-\vec{p}_1)$$

Για το μέτρο της μεταβολής της ορμής $\Delta \vec{p}_1$ του σώματος Σ_1 ,κατά την κρούση, προκύπτει:

$$|\Delta \vec{p}_1| = \sqrt{p_1'^2 + p_1^2} \Rightarrow |\Delta p_1| = \sqrt{(m_1 v_1')^2 + (m_1 v_1)^2}$$

$$\Rightarrow |\Delta p_1| = 2\sqrt{10} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

γ) Για τη μεταβολή του μέτρου της ορμής του σώματος Σ_1 , έχουμε:

$$\Delta |p_1| = |m_1 v_1'| - |m_1 v_1| \Rightarrow \Delta |p_1| = -1,2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

δ) Το ποσοστό επί τοις εκατό της κινητικής ενέργειας που διατήρησε το σώμα Σ_1 ,κατά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

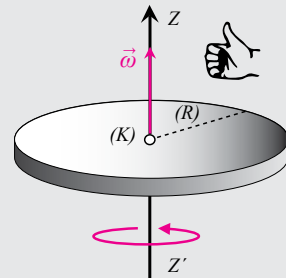
$$\Pi(\%) = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 60\%$$

ε) Το ποσοστό επί τοις εκατό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 που μεταβιβάστηκε στο Σ_2 κατά την κρούση, υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Pi'(\%) = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi'(\%) = 40\%$$

Πρόβλημα 11

α) Εφαρμόζουμε τον κανόνα του δεξιού χεριού και σχεδιάζουμε το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου:



β) Υπολογίζουμε τη γωνία στροφής του δίσκου με τη βοήθεια της σχέσης:

$$N = \frac{\Delta \theta}{2\pi} \Rightarrow \Delta \theta = N \cdot 2\pi \Rightarrow \Delta \theta = 20 \text{ rad}$$

γ) Κάθε σημείο της περιφέρειας του δίσκου εκτελεί κυκλική τροχιά, ακτίνας R, με κέντρο το κέντρο του δίσκου. Για το μέτρο της γραμμικής του ταχύτητας ισχύει:

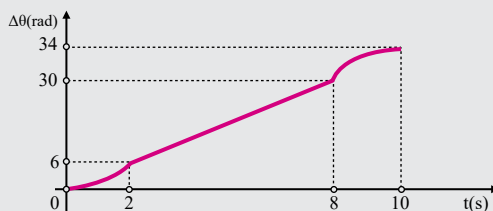
$$v = \omega R \Rightarrow v = 1 \text{ m/s}$$

δ) Υπολογίζουμε το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης ενός σημείου της περιφέρειας του δίσκου. Προκύπτει:

$$\alpha_k = \frac{v^2}{R} \Rightarrow \alpha_k = 10 \text{ m/s}^2$$

ε) Για το διανυόμενο τόξο ισχύει:

$$s = r \cdot \Delta\theta \Rightarrow s = r \cdot \omega \cdot \Delta t' \Rightarrow s = 5 \text{ m}$$



Πρόβλημα 12

α) Υπολογίζουμε τη γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου στα επιμέρους χρονικά διαστήματα. Έχουμε:

$$0 \text{ έως } 2\text{s}: \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = \frac{\omega_{\text{τελ.}} - \omega_{\text{αρχ.}}}{t_{\text{τελ.}} - t_{\text{αρχ.}}} \Rightarrow$$

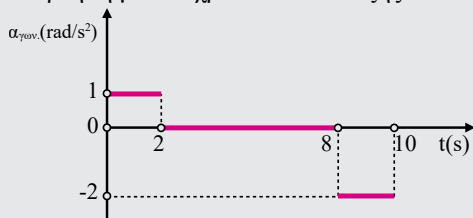
$$\Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = \left(\frac{4-2}{2-0}\right) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = 1 \text{ rad/s}^2$$

$$2\text{s} \text{ έως } 8\text{s}: \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = 0$$

$$8\text{s} \text{ έως } 10\text{s}: \alpha_{\gamma\omega\nu(3)} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu(3)} = \frac{\omega_{\text{τελ.}} - \omega_{\text{αρχ.}}}{t_{\text{τελ.}} - t_{\text{αρχ.}}} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu(3)} = \left(\frac{0-4}{10-8}\right) \text{ rad/s}^2 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu(3)} = -2 \text{ rad/s}^2$$

Το διάγραμμα της γωνιακής επιτάχυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι το εξής:



β) Υπολογίζουμε τη συνολική γωνία στροφής του δίσκου. Ισχύει:

$$0 \text{ έως } 2\text{s}: \Delta\theta_1 = \omega_0 \cdot \Delta t_{0-2} + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} \cdot \Delta t_{0-2}^2 \Rightarrow$$

$$\Delta\theta_1 = \left[2 \cdot (2-0) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (2-0)^2\right] \text{ rad}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta_1 = 6 \text{ rad}$$

$$2\text{s} \text{ έως } 8\text{s}: \Delta\theta_2 = \omega_2 \cdot \Delta t_{2-8} \Rightarrow \Delta\theta_2 =$$

$$= [4 \cdot (8-2)] \text{ rad} \Rightarrow \Delta\theta_2 = 24 \text{ rad}$$

$$8\text{s} \text{ έως } 10\text{s}: \Delta\theta_3 = \omega_8 \cdot \Delta t_{8-10} - \frac{1}{2} |\alpha_{\gamma\omega\nu(3)}| \cdot \Delta t_{8-10}^2 \Rightarrow$$

$$\Delta\theta_3 = [4 \cdot (10-8) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2-0)^2] \text{ rad} \Rightarrow \Delta\theta_3 = 4 \text{ rad}$$

$$\text{Οπότε: } \Delta\theta_{\text{ολ.}} = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 \Rightarrow \Delta\theta_{\text{ολ.}} = 34 \text{ rad}$$

γ) Το διάγραμμα της γωνίας στροφής του δίσκου σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι το εξής:

δ) Ο συνολικός αριθμός των περιστροφών είναι:

$$N = \frac{\Delta\theta_{\text{ολ.}}}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{17}{\pi} \text{ περιστροφές}$$

Πρόβλημα 13

α) Υπολογίζουμε για κάθε χρονική διάρκεια της κίνησης την εξίσωση της τιμής της γωνιακής ταχύτητας του τροχού. Προκύπτει:

0-5s:

Ισχύει:

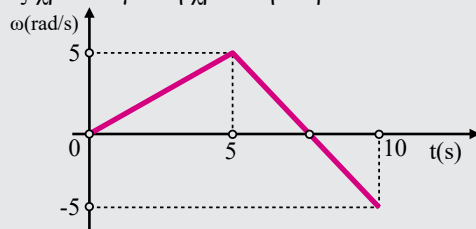
$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu,1} t \Rightarrow \omega = t \text{ (S.I.)}$$

5s-10s:

$$\omega = \omega_{\text{αρχ.}} + \alpha_{\gamma\omega\nu,2} (t - 5) \Rightarrow \omega = 5 - 2(t - 5)$$

$$\Rightarrow \omega = 15 - 2t \text{ (S.I.)}$$

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα γωνιακής ταχύτητας-χρόνου για τη χρονική διάρκεια 0-10s:

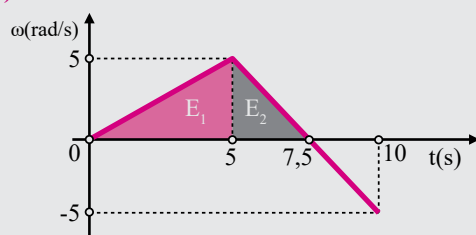


β) Θέλουμε να υπολογίσουμε τη χρονική στιγμή t_1 που ακινητοποιείται ο δίσκος.

Ισχύει:

$$\omega = 15 - 2t \Rightarrow 0 = 15 - 2t_1 \Rightarrow t_1 = 7,5 \text{ s}$$

γ)



Για κάθε χρονική διάρκεια της κίνησης υπολογίζουμε (με εμβοδομέτρηση με τη βοήθεια του διαγράμματος ω - t) τη γωνία στροφής του δίσκου. Προκύπτει:

0-5s:

$$\Delta\theta_1 = E_1 \Rightarrow \Delta\theta_1 = \left(\frac{5 \cdot 5}{2}\right) \text{ rad} \Rightarrow \Delta\theta_1 = 12,5 \text{ rad}$$

5s-7,5s:

$$\Delta\theta_2 = E_2 \Rightarrow \Delta\theta_2 = \left(\frac{2,5 \cdot 5}{2}\right) \text{ rad} \Rightarrow \Delta\theta_2 = 6,25 \text{ rad}$$

Η ζητούμενη γωνία στροφής του δίσκου είναι:

$$\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 \Rightarrow \Delta\theta = \mathbf{18,75 \text{ rad}}$$

δ) Ο συνολικός αριθμός των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος κατά τη χρονική διάρκεια 0-7,5s είναι:

$$N = \frac{\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{9,375}{\pi} \text{ περ.}$$

Πρόβλημα 14

α) Ο τροχός κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει. Επομένως, ισχύει:

$$v_{cm} = \omega R \Rightarrow v_{cm} = \mathbf{2 \text{ m/s}}$$

β) Για το ανώτερο σημείο του τροχού προκύπτει:

$$v_{av} = 2v_{cm} \Rightarrow v_{av} = \mathbf{4 \text{ m/s}}$$

Για το κατώτερο σημείο του τροχού προκύπτει:

$$v_{κατ} = \mathbf{0}$$

γ) Το διάστημα που διανύει το κέντρο μάζας του τροχού υπολογίζεται από τη σχέση:

$$s_{cm} = v_{cm} \cdot \Delta t \Rightarrow s_{cm} = \mathbf{8 \text{ m}}$$

δ) Η γωνιακή ταχύτητα του τροχού παραμένει σταθερή οπότε η γωνία στροφής θα δίνεται από τον τύπο:

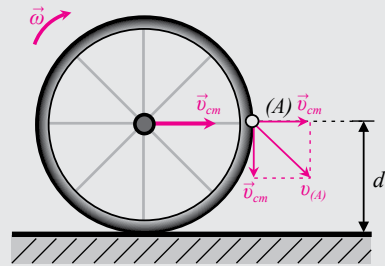
$$\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t'$$

Προκύπτει:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{\omega \cdot \Delta t'}{2\pi} \Rightarrow \Delta t' = \frac{2\pi \cdot N}{\omega} \Rightarrow$$

$$\Delta t' = \mathbf{8 \text{ s}}$$

ε) Ένα σημείο A του τροχού τη χρονική στιγμή t_1 που βρίσκεται στην περιφέρειά του και απέχει από το έδαφος απόσταση ίση με την ακτίνα του, φαίνεται στο σχήμα.



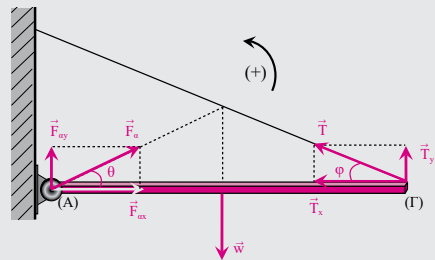
Για τη γραμμική του ταχύτητα ισχύει:

$v_{γρ.(A)} = \omega R = v_{cm} = 2 \text{ m/s}$. Η γραμμική ταχύτητα του σημείου A έχει διεύθυνση κάθετη με την ταχύτητα του κέντρου μάζας, οπότε για το μέτρο της ταχύτητάς του έχουμε:

$$v_A = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{cm}^2} \Rightarrow v_A = v_{cm} \sqrt{2} \Rightarrow v_A = \mathbf{2\sqrt{2} \text{ m/s}}$$

Πρόβλημα 15

α)



Στη ράβδο ασκούνται το βάρος της $\vec{w}$, η δύναμη από την άρθρωση $\vec{F}_a$ και η τάση του νήματος $\vec{T}$. Η αλγεβρική τιμή της ροπής του βάρους της ράβδου ως προς το άκρο της A είναι:

$$\tau_w = -w \frac{L}{2} \Rightarrow \tau_w = -Mg \frac{L}{2} \Rightarrow \tau_w = \mathbf{-20 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

β) Αφού η ράβδος ισορροπεί, η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο είναι μηδέν ως προς οποιοδήποτε σημείο της ράβδου. Έχουμε:

$$\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow \tau_T + \tau_w = 0 \Rightarrow \tau_T = -\tau_w \Rightarrow \tau_T = \mathbf{+20 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

γ) Για την ροπή της τάσης του νήματος ισχύει:

$$\tau_T = +T_y L \Rightarrow \tau_T = +T \cdot \eta\mu\phi \cdot L \Rightarrow T = \frac{\tau_T}{\eta\mu\phi \cdot L} \Rightarrow$$

$$\mathbf{T = 50 \text{ N}}$$

Από την ισορροπία της ράβδου προκύπτει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{ax} = T_{ax} \Rightarrow F_{ax} = T \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow$$

$$\mathbf{T_{ax} = 30 \text{ N}}$$

Επίσης, έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{ay} + T \cdot \eta\mu\theta = w \Rightarrow F_{ay} = Mg - T \cdot \eta\mu\theta \Rightarrow F_{ay} = 40 \text{ N}$$

Η δύναμη που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση θα έχει μέτρο:

$$F_a = \sqrt{F_{ax}^2 + F_{ay}^2} \Rightarrow F_a = 50 \text{ N}$$

ενώ η κατεύθυνσή της προσδιορίζεται από τη γωνία θ , για την οποία ισχύει:

$$\epsilon\phi\theta = F_{ay}/F_{ax} \Rightarrow \epsilon\phi\theta = \frac{4}{3}$$

Πρόβλημα 16

α) Για το μέτρο της ροπής της δύναμης $\vec{F}_1$ έχουμε:

$$|\tau_{F_1}| = F_1 \cdot R \Rightarrow |\tau_{F_1}| = 0,8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

β) Για το μέτρο της ροπής της δύναμης $\vec{F}_2$ ισχύει:

$$|\tau_{F_2}| = F_2 \cdot R \Rightarrow |\tau_{F_2}| = 0,6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

γ) Για το μέτρο της ροπής της δύναμης $\vec{F}_3$ έχουμε:

$$|\tau_{F_3}| = F_3 \cdot r \Rightarrow |\tau_{F_3}| = 0,3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

δ) Λαμβάνοντας ως θετική την αντιωρολογιακή φορά, για τη συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στο στερεό, ως προς τον άξονα περιστροφής, έχουμε:

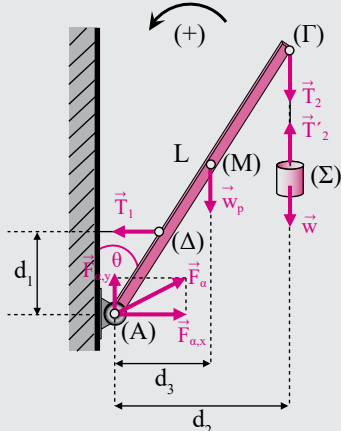
$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow -|\tau_{F_1}| + |\tau_{F_2}| + |\tau_{F_3}| - |\tau_{F_4}| = 0 \Rightarrow$$

$$-|\tau_{F_1}| + |\tau_{F_2}| + |\tau_{F_3}| - F_4 d = 0 \Rightarrow$$

$$d = \frac{-|\tau_{F_1}| + |\tau_{F_2}| + |\tau_{F_3}|}{F_4} \Rightarrow d = 0,05 \text{ m}$$

Πρόβλημα 17

α)



Στη ράβδο ασκούνται το βάρος της $\vec{w}_p$, η τάση

από το νήμα (1) $\vec{T}_1$, η τάση από το νήμα (2) $\vec{T}_2$ καθώς και η δύναμη από την άρθρωση $\vec{F}_a$.

Στο σώμα Σ ασκούνται το βάρος του $\vec{w}$ και η τάση του νήματος (2) $\vec{T}'_2$.

Το νήμα (2) είναι αβαρές, επομένως έχουμε:

$$T'_2 = T_2 = 8 \text{ N}$$

Από την ισορροπία του σώματος Σ, προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow w = T'_2 \Rightarrow T'_2 = mg \Rightarrow$$

$$m = \frac{T'_2}{g} \Rightarrow m = 0,8 \text{ kg}$$

β) Αφού η ράβδος ισορροπεί, η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτήν είναι μηδέν, ως προς οποιοδήποτε σημείο της. Έχουμε:

$$\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow -T_2 L \cdot \eta\mu\theta - w_p \frac{L}{2} \cdot \eta\mu\theta + T_1 \frac{L}{4} \cdot \sigma\upsilon\eta\theta = 0 \Rightarrow$$

$$T_1 = \frac{4T_2 \cdot \eta\mu\theta + 2Mg \cdot \eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\eta\theta} \Rightarrow T_1 = 56 \text{ N}$$

γ) Από την ισορροπία της ράβδου προκύπτει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{ax} = T_1 \Rightarrow F_{ax} = 56 \text{ N}$$

Επίσης, ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{ay} = w_p + T_2 \Rightarrow F_{ay} = 13 \text{ N}$$

Το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση είναι:

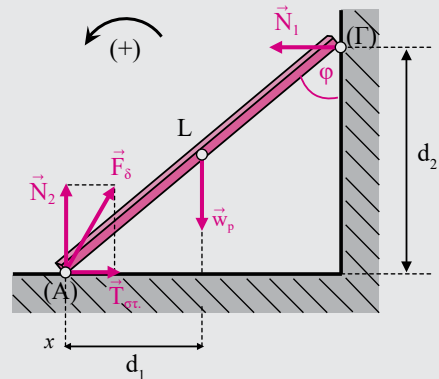
$$F_a = \sqrt{F_{ax}^2 + F_{ay}^2} \Rightarrow F_a = \sqrt{3305} \text{ N}$$

δ) Η κατεύθυνση της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση ορίζεται με τη βοήθεια της σχέσης:

$$\epsilon\phi\theta = \frac{F_{ay}}{F_{ax}} \Rightarrow \epsilon\phi\theta = \frac{13}{56}$$

Πρόβλημα 18

α)



Η ράβδος δέχεται από τον κατακόρυφο τοίχο τη δύναμη $\vec{N}_1$ και από το οριζόντιο δάπεδο τη δύναμη $\vec{F}_\delta$ που αναλύεται σε δύο επιμέρους συνιστώσες τη στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau}$ και την κάθετη δύναμη στήριξης $\vec{N}_2$.

Αφού η ράβδος ισορροπεί, η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο είναι μηδέν ως προς οποιοδήποτε σημείο της ράβδου. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma \tau_A = 0 &\Rightarrow N_1 d_2 - w_p d_1 = 0 \Rightarrow \\ N_1 L \cdot \sin \varphi = w_p \frac{L}{2} \cdot \eta \mu \varphi &\Rightarrow w_p = \frac{2N_1 \cdot \sin \varphi}{\eta \mu \varphi} \\ &\Rightarrow \mathbf{w_p = 24 \text{ N}} \end{aligned}$$

β) Θέλουμε να υπολογίσουμε το μέτρο της στατικής τριβής.

Από την ισορροπία της ράβδου στον οριζόντιο άξονα $x'x$ έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau} = N_1 \Rightarrow \mathbf{T_{\sigma\tau} = 16 \text{ N}}$$

γ) Από την ισορροπία της ράβδου στον κάθετο άξονα $y'y$ έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 = w_p \Rightarrow \mathbf{N_2 = 24 \text{ N}}$$

Για το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από το δάπεδο προκύπτει:

$$F_\delta = \sqrt{T_{\sigma\tau}^2 + N_2^2} \Rightarrow \mathbf{F_\delta = 8\sqrt{13} \text{ N}}$$

δ) Γενικά ισχύει:

$$T_{\sigma\tau} \leq \mu_\sigma N_2 \quad (1)$$

Επειδή η ράβδος είναι έτοιμη να ολισθήσει, η σχέση (1) έχει τη μορφή:

$$T_{\sigma\tau} = \mu_\sigma N_2 \Rightarrow \mu_\sigma = \frac{T_{\sigma\tau}}{N_2} \Rightarrow \mathbf{\mu_\sigma = \frac{2}{3}}$$

Πρόβλημα 19

α) Όταν ο τροχός φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, το κέντρο μάζας του θα έχει μετατοπιστεί κατά Δx_{cm} σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 4 \text{ s}$. Ισχύει:

$$\eta \mu \theta = \frac{h}{\Delta x_{cm}} \Rightarrow \Delta x_{cm} = \frac{h}{\eta \mu \theta} \Rightarrow \Delta x_{cm} = 8 \text{ m}$$

Αφού το κέντρο μάζας του τροχού εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, για το μέτρο της επιτάχυνσής του έχουμε:

$$\Delta x_{cm} = \frac{1}{2} \alpha_{cm} \Delta t^2 \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2 \cdot \Delta x_{cm}}{t_i^2} \Rightarrow \mathbf{\alpha_{cm} = 1 \text{ m/s}^2}$$

β) Για τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού ισχύει:

$$\alpha_{cm} = \alpha_{γων} R \Rightarrow \alpha_{γων} = \frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow \mathbf{\alpha_{γων} = 10 \text{ rad/s}^2}$$

γ) Για τη συνολική γωνία στροφής του τροχού $\Delta \theta$ μέχρι να φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, έχουμε:

$$N = \frac{\Delta \theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{\frac{1}{2} \alpha_{γων} t_i^2}{2\pi} \Rightarrow \mathbf{N = \frac{40}{\pi} \text{ περ.}}$$

δ) Το ανώτερο σημείο του τροχού έχει κάθε χρονική στιγμή διπλάσια ταχύτητα από το κέντρο μάζας του αφού ο τροχός εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. Άρα και η επιτρόχια επιτάχυνση αυτού του σημείου θα είναι διπλάσια από την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του.

$$v_A = 2v_{cm} \Rightarrow a_{\kappa(A)} = 2a_{cm} \Rightarrow \mathbf{a_{\kappa(A)} = 2 \text{ m/s}^2}$$

ε) Κάθε σημείο του τροχού έχει και κεντρομόλο επιτάχυνση κάθετη στην επιτρόχια για την οποία ισχύει:

$$\begin{aligned} a_{\kappa(A)} &= \frac{v_{cm,1}^2}{R} \xrightarrow{v_{cm,1} = \alpha_{cm} t_i} a_{\kappa(A)} = \frac{\alpha_{cm}^2 t_i^2}{R} \Rightarrow \\ &\mathbf{a_{\kappa(A)} = 160 \text{ m/s}^2} \end{aligned}$$

Πρόβλημα 20

α) Για το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος προκύπτει:

$$v = \omega_1 \frac{L}{2} \Rightarrow \omega_1 = \frac{2v}{L} \Rightarrow \mathbf{\omega_1 = 10 \text{ rad/s}}$$

β) Για τη συχνότητα περιστροφής ισχύει:

$$\omega_1 = 2\pi f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \Rightarrow \mathbf{f_1 = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}}$$

γ) Το μέτρο της αρχικής στροφορμής του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned} L_{\text{συσ,αρχ}} &= L_1 + L_2 \Rightarrow L_{\text{συσ,αρχ}} = mv_1 \frac{L}{4} + mv_1 \frac{L}{4} \Rightarrow \\ L_{\text{συσ,αρχ}} &= m\omega_1 \frac{L}{4} \frac{L}{4} + m\omega_1 \frac{L}{4} \frac{L}{4} \\ &\Rightarrow L_{\text{συσ,αρχ}} = 2m\omega_1 \frac{L^2}{16} \Rightarrow \\ &\mathbf{L_{\text{συσ,αρχ}} = 0,16 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}} \end{aligned}$$

δ) Από την εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Στροφορμής, έχουμε:

$$\begin{aligned} L_{\text{συσ,αρχ}} &= L_{\text{συσ,τελ}} \Rightarrow 2m\omega_1 \frac{L^2}{16} = 2m\omega_2 \frac{L^2}{4} \Rightarrow \\ \omega_1 &= 4\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{\omega_1}{4} \Rightarrow \mathbf{\omega_2 = 2,5 \text{ rad/s}} \end{aligned}$$

Το ποσοστό επί τοις εκατό της μεταβολής του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = \frac{\frac{\omega_1}{4} - \omega_1}{\omega_1} \cdot 100\% \\ \Rightarrow \Pi(\%) = -75\%$$

ε) Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$K_{\text{αρχ}} = 2 \cdot \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow K_{\text{αρχ}} = 2 \cdot \frac{1}{2} m \left(\omega_1 \frac{L}{4} \right)^2 \\ \Rightarrow K_{\text{αρχ}} = 0,8 \text{ J}$$

Η τελική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$K_{\text{τελ}} = 2 \cdot \frac{1}{2} m v_2^2 \Rightarrow K_{\text{τελ}} = 2 \cdot \frac{1}{2} m \left(\omega_2 \frac{L}{2} \right)^2 \Rightarrow \\ K_{\text{τελ}} = 0,2 \text{ J}$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι:

$$\Delta K = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \Rightarrow \Delta K = -0,6 \text{ J}$$

Πρόβλημα 21

α) Από την εξίσωση της απομάκρυνσης προκύπτει ότι η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι $\omega = 4 \text{ rad/s}$.

Για την περίοδο T ισχύει:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 0,5\pi \text{ s}$$

Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{2}{\pi} \text{ Hz}$$

β) Από την εξίσωση της απομάκρυνσης προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A = 0,8 \text{ m}$.

Η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$v_{\text{max}} = \omega A \Rightarrow v_{\text{max}} = 3,2 \text{ m/s}$$

Η μέγιστη επιτάχυνση της ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$a_{\text{max}} = \omega^2 A \Rightarrow a_{\text{max}} = 12,8 \text{ m/s}^2$$

γ) Τη χρονική στιγμή t_1 η ταχύτητα του σώματος είναι:

$$v_1 = v_{\text{max}} \sin \omega t_1 \Rightarrow v_1 = 1,6 \text{ m/s}$$

δ) Τη χρονική στιγμή t_2 η επιτάχυνση του σώματος είναι:

$$a_2 = -a_{\text{max}} \sin \omega t_2 \Rightarrow a_2 = -6,4 \text{ m/s}^2$$

ε) Η διαφορά φάσης είναι:

$$\Delta \phi = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta \phi = \omega(t_2 - t_1) \Rightarrow \Delta \phi = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$

Πρόβλημα 22

α) Από την εξίσωση της ταχύτητας έχουμε:

$$v_{\text{max}} = 3 \text{ m/s} \text{ και } \omega = 6 \text{ rad/s}$$

Ισχύει:

$$v_{\text{max}} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{\text{max}}}{\omega} \Rightarrow A = 0,5 \text{ m}$$

β) Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης είναι:

$$D = m\omega^2 \Rightarrow D = 3,6 \text{ N/m}$$

γ) Η απόσταση μεταξύ δύο ακραίων θέσεων της τροχιάς του σώματος είναι:

$$s = 2A \Rightarrow s = 1 \text{ m}$$

δ) Έχουμε:

$$a_1 = -\omega^2 x_1 \Rightarrow a_1 = -18 \text{ m/s}^2$$

ε) Προκύπτει (με απόδειξη):

$$|v_2| = \omega \sqrt{A^2 - x_2^2} \Rightarrow |v_2| = 2,4 \text{ m/s}$$

Πρόβλημα 23

α) Από το διάγραμμα προκύπτει ότι:

$$A = 0,8 \text{ m και } \frac{3T}{4} = 0,3\pi \Rightarrow T = 0,4\pi \text{ s}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 5 \text{ rad/s}$$

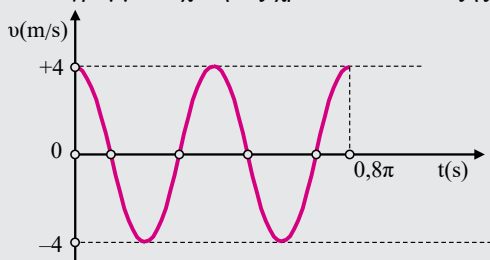
Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας της ταλάντωσης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$v_{\text{max}} = \omega A \Rightarrow v_{\text{max}} = 4 \text{ m/s}$$

β) Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας είναι η:

$$v = v_{\text{max}} \sin \omega t \Rightarrow v = 4 \sin 5t \text{ (S.I.)}$$

Το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου είναι το εξής:



γ) Το κινητό τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται στη θέση:

$$x_1 = 0,8 \cdot \sin 5t_1 \Rightarrow x_1 = \left[0,8 \cdot \sin \left(5 \cdot \frac{\pi}{30} \right) \right] \text{ m} \Rightarrow \\ x_1 = 0,4 \text{ m}$$

Επίσης, το κινητό τη χρονική στιγμή t_2 βρίσκεται στη θέση:

$$x_2 = 0,8 \cdot \eta\mu 5t_2 \Rightarrow x_2 = \left[0,8 \cdot \eta\mu \left(5 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right] \text{ m} \Rightarrow x_2 = +0,8 \text{ m}$$

Η μετατόπιση του κινητού, κατά τη χρονική διάρκεια $t_1 \rightarrow t_2$, θα είναι:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \Delta x = 0,4 \text{ m}$$

δ) Για τη μέγιστη, κατά μέτρο, τιμή της δύναμης επαναφοράς έχουμε:

$$F_{\text{επ,max}} = DA \Rightarrow F_{\text{επ,max}} = m\omega^2 A \Rightarrow F_{\text{επ,max}} = 2 \text{ N}$$

ε) Για τη μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης του κινητού, ισχύει:

$$U_{\text{max}} = \frac{1}{2} DA^2 \Rightarrow U_{\text{max}} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \Rightarrow U_{\text{max}} = 0,8 \text{ J}$$

Πρόβλημα 24

α) Από το διάγραμμα προκύπτει ότι:

$$v_{\text{max}} = 4 \text{ m/s και } \frac{T}{2} = 0,5\pi \text{ s} \Rightarrow T = \pi \text{ s}$$

Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{\pi} \text{ Hz}$$

β) Για τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης έχουμε:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 2 \text{ rad/s}$$

Για το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης ισχύει:

$$v_{\text{max}} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{\text{max}}}{\omega} \Rightarrow A = 2 \text{ m}$$

γ) Από το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου που δίνεται, παρατηρούμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ταχύτητα του σώματος είναι $v = 0$ άρα βρίσκεται σε ακραία θέση της ταλάντωσης του. Επομένως, δεν βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του οπότε η ταλάντωση έχει αρχική φάση. Επιπλέον ισχύει ότι μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ταχύτητα του είναι $v < 0$ οπότε το σώμα βρίσκεται στη θετική ακραία θέση ($x = +A$).

Έτσι, προκύπτει:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{t=0, x=+A} A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi_0 = 1 \xrightarrow{0 \leq \varphi_0 < 2\pi} \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

δ) Για τη μέγιστη επιτάχυνση έχουμε:

$$\alpha_{\text{max}} = \omega^2 A \Rightarrow \alpha_{\text{max}} = 8 \text{ m/s}^2$$

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης του σώματος είναι:

$$a = -\alpha_{\text{max}} \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow a = -8\eta\mu\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

ε) Το σώμα θα περάσει για τρίτη φορά από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή:

$$t_1 = T + \frac{T}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{5T}{4} \Rightarrow t_1 = 1,25\pi \text{ s}$$

Πρόβλημα 25

α) Από το διάγραμμα προκύπτει ότι:

$$\frac{T}{2} = 0,1\pi \text{ s} \Rightarrow T = 0,2\pi \text{ s}$$

Ισχύει:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$$

β) Από το διάγραμμα επίσης έχουμε:

$$F_{\text{επ,max}} = 40 \text{ N}$$

Προκύπτει:

$$F_{\text{επ,max}} = DA \Rightarrow F_{\text{επ,max}} = m\omega^2 A \Rightarrow A = \frac{F_{\text{επ,max}}}{m\omega^2} \Rightarrow A = 0,8 \text{ m}$$

γ) Η απόσταση μεταξύ δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσης του σώματος είναι:

$$d = 2A \Rightarrow d = 1,6 \text{ m}$$

δ) Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$x_1 = A\eta\mu\omega t_1 \Rightarrow x_1 = [0,8\eta\mu(10 \cdot 0,15\pi)] \text{ m} \Rightarrow x_1 = -0,8 \text{ m}$$

Τελικά, προκύπτει:

$$\alpha_1 = -\omega^2 x_1 \Rightarrow \alpha_1 = +80 \text{ m/s}^2$$

ε) Για τη μέγιστη τιμή της κινητικής ενέργειας του σώματος έχουμε:

$$K_{\text{max}} = \frac{1}{2} mv_{\text{max}}^2 \Rightarrow K_{\text{max}} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \Rightarrow K_{\text{max}} = 16 \text{ J}$$

Πρόβλημα 26

α) Οι 10 μεγιστοποιήσεις της κινητικής ενέργειας αντιστοιχούν σε 5 ταλαντώσεις.

Ισχύει:

$$f = \frac{N}{\Delta t} \Rightarrow T = \frac{\Delta t}{N} \Rightarrow T = 0,2\pi \text{ s}$$

β) Έχουμε:

$$N' = \frac{\Delta t'}{T} \Rightarrow N' = 20 \text{ ταλ.}$$

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης μεγιστοποιείται επομένως **$\kappa = 40$ φορές**.

γ) Η χρονική διάρκεια μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης είναι ίση με μισή περίοδο, δηλαδή ίση με $\Delta t_1 = 0,1\pi$ s.

δ) Η ελάχιστη χρονική διάρκεια για να μεταβεί το σώμα από τη μια ακραία θέση στην άλλη είναι ίση με μισή περίοδο, δηλαδή ίση με $\Delta t_2 = 0,1\pi$ s.

ε) Η ενέργεια ταλάντωσης είναι:

$$E_T = \frac{1}{2} DA^2 \Rightarrow E_T = 2 \text{ J}$$

Για τη γωνιακή συχνότητα έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$$

Για τη μάζα του σώματος ισχύει:

$$m = \frac{D}{\omega^2} \Rightarrow m = 1 \text{ kg}$$

Ισχύει:

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow v_{\max} = 2 \text{ m/s}$$

Προκύπτει τελικά:

$$K = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow K = 0,5v^2 \text{ (S.I.)}$$

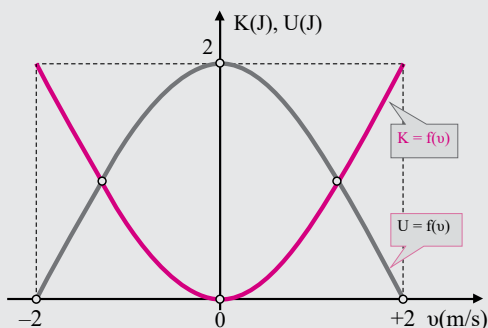
$$\text{για } -2 \text{ m/s} \leq v \leq 2 \text{ m/s}$$

Επίσης, έχουμε:

$$K + U = E_T \Rightarrow U = E_T - K \Rightarrow$$

$$U = 2 - 0,5v^2 \text{ (S.I.) για } -2 \text{ m/s} \leq v \leq 2 \text{ m/s}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το ακόλουθο:



Πρόβλημα 27

α) Ισχύει:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 5 \text{ rad/s}$$

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα βρίσκεται στην ακραία θετική θέση.

Επομένως για το πλάτος ταλάντωσης ισχύει: $A = d = 0,8$ m.

Αντικαθιστώντας, όπου $t_0 = 0, x = +A$, στην εξίσωση της απομάκρυνσης $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ προκύπτει:

$$A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \quad (1)$$

Επειδή $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$ rad προκύπτει ότι:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

Τελικά, έχουμε:

$$x = 0,8\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

β) Ισχύει:

$$K = E_T \sin^2(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow K = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \\ \Rightarrow K = 32 \eta\mu^2 5t \text{ (S.I.)}$$

γ) Τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{2\pi}{15}$ s έχουμε:

$$x_1 = 0,8\eta\mu\left(5t_1 + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x_1 = -0,4 \text{ m}$$

Προκύπτει:

$$U_1 = \frac{1}{2} kx_1^2 \Rightarrow U_1 = 8 \text{ J}$$

δ) Επειδή το ελατήριο είναι οριζόντιο και η θέση ισορροπίας ταυτίζεται με τη Θ.Φ.Μ., για τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θα έχουμε:

$$U_{\text{ελ},1} = U_1 \Rightarrow U_{\text{ελ},1} = 8 \text{ J}$$

ε) Το μέτρο της δύναμης ελατηρίου στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης θα είναι:

$$F_{\text{ελ}} = k \cdot \Delta l \Rightarrow F_{\text{ελ}} = kA \Rightarrow F_{\text{ελ}} = 80 \text{ N}$$

Πρόβλημα 28

α) Στη θέση ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ}} = w \Rightarrow k \cdot \Delta l = mg \Rightarrow \\ \Delta l = mg/k \Rightarrow \Delta l = 0,1 \text{ m}$$

Ισχύει:

$$A = \Delta l = 0,1 \text{ m}$$

Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα βρίσκεται στην ακραία θετική θέση ($x = +A$).

Ισχύει:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = +1 \quad (1)$$

Επειδή: $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ rad από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ rad.

β) Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$$

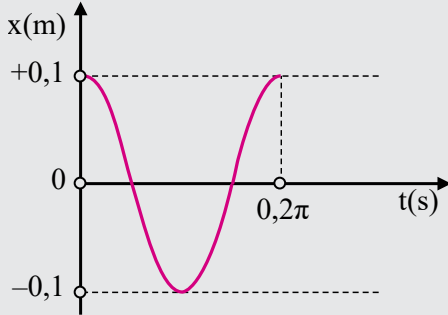
Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x = 0,1\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \\ x = 0,1\sigma\upsilon\nu 10t \text{ (S.I.)}$$

γ) Η περίοδος της ταλάντωσης είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 0,2\pi \text{ s}$$

Το διάγραμμα απομάκρυνσης-χρόνου είναι το εξής:



δ) Η προσφερόμενη ενέργεια κατά τη συγκεκριμένη μετακίνηση είναι:

$$W_{F_{\epsilon}} = E_T \Rightarrow W_{F_{\epsilon}} = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow W_{F_{\epsilon}} = 1 \text{ J}$$

ε) Το μέγιστο μέτρο της δύναμης επαναφοράς είναι:

$$|F_{\epsilon\pi, \max}| = kA \Rightarrow |F_{\epsilon\pi, \max}| = 20 \text{ N}$$

Το μέγιστο μέτρο της δύναμης του ελατηρίου είναι:

$$F_{\epsilon\lambda, \max} = k \cdot \Delta l_{\max} \Rightarrow F_{\epsilon\lambda, \max} = k \cdot (\Delta l + A) \Rightarrow F_{\epsilon\lambda, \max} = 40 \text{ N}$$

Πρόβλημα 29

α) Από το διάγραμμα προκύπτει ότι η μέγιστη ταχύτητα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος είναι $v_{\max} = 4 \text{ m/s}$ και η μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος είναι $U_{\max} = 16 \text{ J}$. Όμως η μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος ισούται με την ολική ενέργεια της ταλάντωσης, άρα:

$$E_T = U_{\max} = 16 \text{ J}$$

Όμως η ολική ενέργεια ισούται και με τη μέγιστη κινητική ενέργεια του σώματος, οπότε έχουμε:

$$E_T = K_{\max} \Rightarrow E_T = \frac{1}{2} mv_{\max}^2 \Rightarrow m = \frac{2E_T}{v_{\max}^2} \Rightarrow m = 2 \text{ kg}$$

β) Η δυναμική ενέργεια του σώματος μεγιστοποιείται στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του, πράγμα το οποίο συμβαίνει κάθε $\frac{T}{2}$.

$$\text{Άρα } \frac{T}{2} = 0,1\pi \text{ s} \Rightarrow T = 0,2\pi \text{ s.}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$$

Για το πλάτος της ταλάντωσης έχουμε:

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{\max}}{\omega} \Rightarrow A = 0,4 \text{ m}$$

γ) Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης είναι:

$$D = m\omega^2 \Rightarrow D = 200 \text{ N/m}$$

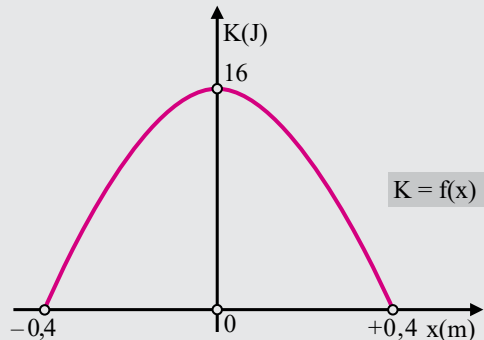
δ) Εφαρμόζουμε την αρχή Διατήρησης της Ενέργειας της Ταλάντωσης:

$$\text{Α.Δ.Ε.Τ.: } E_T = K + U \Rightarrow K = E_T - U \Rightarrow$$

$$K = E_T - \frac{1}{2} Dx^2 \Rightarrow$$

$$K = 16 - 100x^2 \text{ (S.I.) για } -0,4 \text{ m} \leq x \leq +0,4 \text{ m}$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα:



ε) Για την κινητική ενέργεια του σώματος ισχύει:

$$K = 25\%U \Rightarrow K = \frac{U}{4} \Rightarrow U = 4K$$

Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας της Ταλάντωσης:

$$\text{Α.Δ.Ε.Τ.: } E_T = K + U \xrightarrow{U=4K} E_T = 5K \Rightarrow$$

$$E_T = 5 \cdot \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_T}{5m}}$$

$$\Rightarrow |v| = 0,8\sqrt{5} \text{ m/s}$$

Πρόβλημα 30

α) Από το διάγραμμα προκύπτει ότι:

$$\frac{3T}{4} = 1,5\pi \Rightarrow T = 2\pi \text{ s}$$

β) Από το διάγραμμα προκύπτει ότι η μέγιστη κινητική ενέργεια είναι: $K_{\max} = 0,04 \text{ J}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 1 \text{ rad/s}$$

Για τη μέγιστη κινητική ενέργεια της ταλάντωσης έχουμε:

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{2K_{\max}}{m}} \Rightarrow v_{\max} = 0,2 \text{ m/s}$$

Όμως, ισχύει:

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{\max}}{\omega} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

γ) Τη χρονική στιγμή t_1 η κινητική ενέργεια του σώματος είναι μέγιστη άρα το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και κινείται προς τα θετικά αφού έχει θετική ταχύτητα. Όμως η χρονική στιγμή t_1 αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{3T}{4}$. Αυτό σημαίνει ότι το σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσης του. Για την αρχική φάση έχουμε:

$$x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{t=0, x=+A} \Rightarrow +A = A \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = +1$$

Επειδή: $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

δ) Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος είναι:

$$x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x = 0,2 \eta \mu \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (S.I.)}$$

ε) Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του είναι:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F = -kx \xrightarrow{x=0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = 0$$

Πρόβλημα 31

α) Το κομμάτι μάζας m_1 μετά την έκρηξη εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ξεκινώντας από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του, οπότε η ταχύτητα του θα μηδενιστεί στιγμιαία για πρώτη φορά μετά από χρόνο $\frac{T}{4}$, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης που εκτελεί. Ισχύει:

$$\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow T = 4\Delta t \Rightarrow T = 0,2\pi \text{ s}$$

Όμως: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow m_1 = \frac{T^2 k}{4\pi^2} \Rightarrow m_1 = 1 \text{ kg}$

Για τη μάζα του κομματιού m_2 ισχύει:

$$m_2 = 3m_1 \Rightarrow m_2 = 3 \text{ kg.}$$

Τελικά η μάζα του σώματος είναι:

$$m = m_1 + m_2 \Rightarrow m = 4 \text{ kg.}$$

β) Για τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$$

Η ταχύτητα που αποκτά το κομμάτι μάζας m_1 αμέσως μετά την έκρηξη αποτελεί τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης που θα εκτελέσει. Ισχύει:

$$v_1 = v_{\max} \Rightarrow v_1 = \omega A \Rightarrow v_1 = 3 \text{ m/s}$$

Κατά τη διάρκεια της έκρηξης η ορμή του συστήματος διατηρείται γιατί το σύστημα είναι μονωμένο. Θεωρούμε θετική φορά ορμών τη φορά της ταχύτητας που αποκτά το κομμάτι μάζας m_1 . Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. Προκύπτει:

$$0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \xrightarrow{m_2 = 3m_1} m_1 v_1 = 3m_1 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{v_1}{3} \Rightarrow v_2 = 1 \text{ m/s}$$

γ) Το ποσό ενέργειας που απελευθερώθηκε κατά την έκρηξη είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος. Έχουμε:

$$\Delta E = \Delta K = K_{\text{ολ. (μετά)}} - K_{\text{ολ. (πριν)}} \Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - 0 \Rightarrow \Delta E = 6 \text{ J}$$

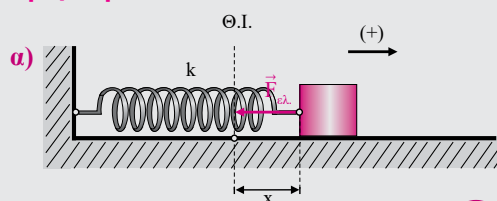
δ) Το κομμάτι m_1 ακινητοποιείται στιγμιαία για τρίτη φορά μετά την έκρηξη τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{5T}{4} = 0,25\pi \text{ s}$ και βρίσκεται στην αριστερή ακραία θέση της ταλάντωσης του. Εκείνη τη χρονική στιγμή το κομμάτι μάζας m_2 (το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα μέτρου $v_2 = 1 \text{ m/s}$) έχει μετατοπιστεί κατά:

$$\Delta x = v_2 t_1 \Rightarrow \Delta x = 0,25\pi \text{ m} \Rightarrow \Delta x = 0,785 \text{ m}$$

Η απόσταση που απέχουν μεταξύ τους τα δύο κομμάτια εκείνη τη χρονική στιγμή είναι:

$$d = \Delta x + A \Rightarrow d = 1,085 \text{ m}$$

Πρόβλημα 32



Σε μια τυχαία θέση ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_{ελ} \Rightarrow \Sigma F = -F_{ελ} \Rightarrow \Sigma F = -kx \quad (1)$$

Επειδή η σχέση (1) είναι της μορφής $\Sigma F = -Dx$ προκύπτει ότι το σύστημα μάζας-ελατηρίου θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$.

β) Το σώμα τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και η ταχύτητά του είναι θετική, επομένως η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι: $\phi_0 = 0$.

γ) Υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης. Έχουμε:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 5 \text{ rad/s}$$

Το σώμα εκτοξεύεται από τη θέση ισορροπίας του, επομένως η ταχύτητα εκτόξευσης είναι ίση με τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης. Προκύπτει:

$$v_{εκ} = v_{max} \Rightarrow v_{εκ} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{εκ}}{\omega} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι:

$$x = A \eta \mu \omega t \Rightarrow x = 0,2 \cdot \eta \mu 5t \text{ (S.I.)}$$

δ) Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται στη θέση:

$$x_1 = 0,2 \cdot \eta \mu 5t_1 \Rightarrow x_1 = 0,1 \text{ m}$$

Η δύναμη επαναφοράς θα έχει τιμή:

$$F_{επ,1} = -kx_1 \Rightarrow F_{επ,1} = -20 \text{ N}$$

ε) Ο λόγος της κινητικής προς τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης θα είναι:

$$\frac{K}{U} = \frac{E_T - U}{U} \Rightarrow \frac{K}{U} = \frac{\frac{1}{2} k A^2 - \frac{1}{2} k x_2^2}{\frac{1}{2} k x_2^2} \Rightarrow \frac{K}{U} = 1$$

Πρόβλημα 33

α) Υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης. Ισχύει:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$$

Η ταχύτητα εκτόξευσης είναι ίση με τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης. Βρίσκουμε το πλάτος της ταλάντωσης με τη βοήθεια της σχέσης:

$$v_{εκ} = v_{max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{εκ}}{\omega} \Rightarrow A = 0,05 \text{ m}$$

β) Το σώμα τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = 0$ με θετική ταχύτητα. Προκύπτει:

$$x = A \eta \mu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow \eta \mu \phi_0 = 0 \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) λαμβάνοντας υπόψη ότι $0 \leq \phi_0 < 2\pi \text{ rad}$ και ότι $v > 0$ προκύπτει ότι η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\phi_0 = 0$.

Επομένως, η χρονική εξίσωση της ταλάντωσης θα έχει τη μορφή:

$$x = 0,05 \eta \mu 10t \text{ (S.I.)}$$

γ) Στη θέση ισορροπίας του σώματος, έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow w = F_{ελ} \Rightarrow mg = k \cdot \Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} \Rightarrow \Delta l = 0,1 \text{ m}$$

δ) Η ελάχιστη τιμή του μέτρου της δύναμης του ελατηρίου θα είναι:

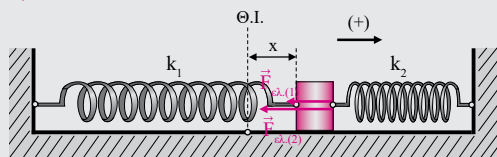
$$F_{ελ,min} = k \cdot \Delta l_{min} \Rightarrow F_{ελ,min} = k(\Delta l - A) \Rightarrow F_{ελ,min} = 5 \text{ N}$$

ε) Η μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης του ελατηρίου θα είναι:

$$F_{ελ,max} = k \cdot \Delta l_{max} \Rightarrow F_{ελ,max} = k(\Delta l + A) \Rightarrow F_{ελ,max} = 15 \text{ N}$$

Πρόβλημα 34

α)



Σε μια τυχαία θέση ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_{ελ,1} + \vec{F}_{ελ,2} \Rightarrow \Sigma F = -k_1 x - k_2 x \Rightarrow \Sigma F = -(k_1 + k_2)x \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι το σύστημα σώμα-ελατήρια θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς:

$$D = k_1 + k_2 \Rightarrow D = 400 \text{ N/m}$$

β) Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα βρίσκεται στην ακραία θετική θέση. Επομένως:

$$A = d = 0,4 \text{ m.}$$

Αντικαθιστώντας όπου $t_0 = 0, x = +A$ στην εξίσωση της απομάκρυνσης $x = A \eta \mu(\omega t + \phi_0)$ προκύπτει:

$$A = A \eta \mu \phi_0 \Rightarrow \eta \mu \phi_0 = 1 \quad (1)$$

Επειδή $0 \leq \phi_0 < 2\pi \text{ rad}$ προκύπτει ότι:

$$\phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

γ) Υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης είναι η εξής:

$$x = 0,4\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

δ) Ισχύει:

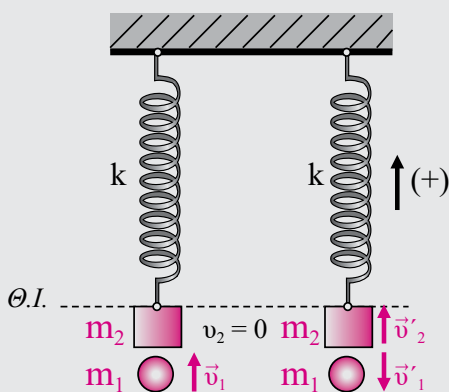
$$F_{\epsilon\lambda,1} = k_1 |x| \Rightarrow |x| = \frac{F_{\epsilon\lambda,1}}{k_1} \Rightarrow |x| = 0,2 \text{ m}$$

Με τη βοήθεια της αρχής διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης υπολογίζουμε την κινητική ενέργεια του σώματος. Προκύπτει:

$$K + U = E_T \Rightarrow K = E_T - U \Rightarrow K = \frac{1}{2} D \Delta x^2 - \frac{1}{2} D x^2 \\ \Rightarrow K = 24 \text{ J}$$

Πρόβλημα 35

α)



Από την εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$m_1 v_1 + 0 = -m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \Rightarrow \\ v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_1 v'_1}{m_2} \Rightarrow v'_2 = 8 \text{ m/s}$$

β) Υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα (2) μετά την κρούση. Ισχύει:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$$

Η κρούση γίνεται στη θέση ισορροπίας του σώματος (2), επομένως η ταχύτητα που αποκτάει μετά την κρούση είναι ίση κατά μέτρο με τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης. Βρίσκουμε το πλάτος της ταλάντωσης με τη βοή-

θεια της σχέσης:

$$v'_2 = v_{\max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v'_2}{\omega} \Rightarrow A = 0,8 \text{ m}$$

γ) Το σώμα (2) τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = 0$ με θετική ταχύτητα, επομένως η αρχική φάση της ταλάντωσης του είναι ίση με μηδέν. Προκύπτει:

$$x = A \eta\mu\omega t \Rightarrow x = 0,8\eta\mu 10t \text{ (S.I.)}$$

δ) Η ορμή του σώματος (2), όταν αυτό διέρχεται για πρώτη φορά από τη Θ.Ι (μετά την $t_0 = 0$), θα είναι:

$$p_2 = -m_2 v_{\max} \Rightarrow p_2 = -16 \text{ kg m/s}$$

Πρόβλημα 36

α) Η ταχύτητα του συσσωματώματος $\vec{v}_k$ μπορεί να υπολογιστεί από την αρχή διατήρησης της ορμής. Ισχύει:

$$m v_0 = (m + M) v_k \Rightarrow v_k = \frac{m v_0}{m + M} \Rightarrow v_k = 10 \text{ m/s}$$

Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος είναι ίσο με **10m/s με κατεύθυνση προς τα αριστερά.**

β) Για τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης έχουμε:

$$k = (m + M) \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m + M}} \Rightarrow \omega = 5 \text{ rad/s}$$

Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος ταυτίζεται με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Επειδή κρούση γίνεται στη θέση ισορροπίας του, η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά τη κρούση θα είναι και η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης που θα εκτελέσει. Έτσι έχουμε:

$$v_{\max} = v_k \Rightarrow \omega \cdot A = v_k \Rightarrow A = \frac{v_k}{\omega} \Rightarrow A = 2 \text{ m}$$

γ) Για την περίοδο της ταλάντωσης του συσσωματώματος έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 0,4\pi \text{ s}$$

Το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται στιγμιαία για δεύτερη φορά μετά την κρούση τη χρονική στιγμή: $t = \frac{3T}{4} \Rightarrow t = 0,3\pi \text{ s}$

δ) Το συσσωμάτωμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και στη συνέχεια κινείται προς τα θετικά οπότε η ταλάντωση δεν έχει αρχική φάση. Για τη χρονική

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t_{1/2}} \Rightarrow \Lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \Rightarrow \Lambda = 0,25 \cdot \ln 2 \text{ s}^{-1}$$

β) Υπολογίζουμε τη πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$. Προκύπτει:

$$E_0 = \frac{1}{2} DA_0^2 \Rightarrow A_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{D}} \Rightarrow A_0 = 0,4 \text{ m}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το ακόλουθο:



γ) Το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t = 8 \text{ s}$ είναι:

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow A = 0,4 e^{-0,25 \cdot \ln 2 \cdot 8} \Rightarrow A = 0,1 \text{ m}$$

Υπολογίζουμε τη θερμότητα που εκλύεται από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 8 \text{ s}$. Προκύπτει:

$$Q = E_0 - E \Rightarrow Q = E_0 - \frac{1}{2} DA^2 \Rightarrow Q = 7,5 \text{ J}$$

Πρόβλημα 39

α) Για το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_1 = 1 \text{ T}$ ισχύει:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow A_1 = \sqrt{A_0 A_2} \Rightarrow A_1 = 0,32 \text{ m}$$

β) Για το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_3 = 3 \text{ T}$ ισχύει:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} \Rightarrow A_3 = \frac{A_2^2}{A_1} \Rightarrow A_3 = 0,08 \text{ m}$$

γ) Το ζητούμενο, επί τοις εκατό, ποσοστό είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{A_1 - A_2}{A_1} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 50\%$$

δ) Το ζητούμενο, επί τοις εκατό, ποσοστό είναι:

$$\begin{aligned} \Pi'(\%) &= \frac{E_0 - E_1}{E_0} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi'(\%) = \\ &= \frac{\frac{1}{2} DA_0^2 - \frac{1}{2} DA_1^2}{\frac{1}{2} DA_0^2} \cdot 100\% \Rightarrow \\ \Pi'(\%) &= \frac{4A_1^2 - A_1^2}{4A_1^2} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi'(\%) = 75\% \end{aligned}$$

Πρόβλημα 40

α) Για τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης ισχύει:

$$\omega = \omega_s \Rightarrow \omega = 2\pi f_s \Rightarrow \omega = 8 \text{ rad/s}$$

Την $t = 0, x = 0$ με $v > 0$ άρα $\varphi_0 = 0$.

Για τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης προκύπτει:

$$x = A \eta \mu \omega t \Rightarrow x = 0,5 \eta \mu 8t \text{ (S.I.)}$$

β) Η μέγιστη τιμή της κινητικής ενέργειας της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \Rightarrow K_{\max} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \Rightarrow K_{\max} = 16 \text{ J}$$

γ) Η μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$U_{\max} = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow U_{\max} = 25 \text{ J}$$

δ) Για την ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης έχουμε:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f_0 = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}$$

Το ζητούμενο επί τοις εκατό ποσοστό είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{f_0 - f_s}{f_s} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 25\%$$

Πρόβλημα 41

α) Η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης ταυτίζεται με τη συχνότητα της ταλάντωσης. Ισχύει επομένως:

$$f_s = f \Rightarrow f_s = \frac{6}{\pi} \text{ Hz}$$

β) Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 12 \text{ rad/s}$$

Για την εξίσωση της απομάκρυνσης έχουμε:

$$x = A \eta \mu \omega t \Rightarrow x = 0,4 \eta \mu 12t \text{ (S.I.)}$$

γ) Υπολογίζουμε την ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Έχουμε:

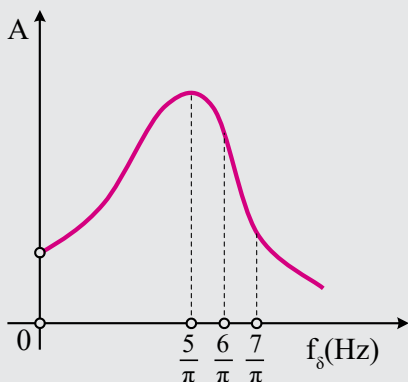
$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f_0 = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}$$

Παρατηρούμε ότι $f_0 \neq f_s$ επομένως **δεν έχουμε συντονισμό**.

δ) Η νέα συχνότητα του διεγέρτη θα είναι:

$$f'_s = f_s + \frac{1}{\pi} \text{ Hz} \Rightarrow f'_s = \frac{7}{\pi} \text{ Hz}$$

Σχεδιάζουμε ποιοτικά το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης σε συνάρτηση με τη συχνότητα του διεγέρτη:



Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης **μειώνεται**.

Πρόβλημα 42

α) Η γενική μορφή της εξίσωσης του κύματος είναι η:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση του κύματος με αυτήν που δίνεται στην εκφώνηση, για την περίοδο προκύπτει:

$$\frac{t}{T} = 2t \Rightarrow T = 0,5 \text{ s}$$

Ενώ για το μήκος κύματος έχουμε:

$$\frac{x}{\lambda} = 0,2x \Rightarrow \lambda = 5 \text{ m}$$

β) Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 10 \text{ m/s}$$

γ) Θέτοντας στην εξίσωση του κύματος όπου $x = 0$, προκύπτει:

$$y_0 = 0,8 \cdot \eta\mu 4\pi t \text{ (S.I.)}$$

δ) Το σημείο Κ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση τη χρονική στιγμή:

$$t_k = \frac{x_k}{v_\delta} \Rightarrow t_k = 0,5 \text{ s}$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,4 \text{ s}$ το κύμα δεν θα έχει φτάσει στο Κ και επομένως η ταχύτητά του θα είναι ίση με **μηδέν**.

ε) Τη χρονική στιγμή t_2 το κύμα θα έχει φτάσει στο Κ, άρα θα ισχύει:

$$y_k = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_k}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y_k = 0,8 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{0,625}{T} - \frac{x_k}{\lambda} \right) \Rightarrow y_k = 0,8 \text{ m}$$

Πρόβλημα 43

α) Για τη φάση του κύματος, τη χρονική στιγμή t_1 , ισχύει:

$$\varphi_{t_1} = \frac{2\pi t_1}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (1)$$

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι για $x = 0$ και $t_1 = 1 \text{ s}$ έχουμε: $\varphi_{t_1} = 8\pi \text{ rad}$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) έχουμε:

$$8\pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 0,25 \text{ s}$$

Επίσης, από το διάγραμμα προκύπτει ότι για $x = 2 \text{ m}$ και $t_1 = 1 \text{ s}$ έχουμε $\varphi_{t_1} = 0$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) έχουμε:

$$0 = \frac{2\pi}{0,25} - \frac{4\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 0,5 \text{ m}$$

β) Για την ταχύτητα διάδοσης ισχύει:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 2 \text{ m/s}$$

γ) Η εξίσωση του κύματος είναι η:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi (4t - 2x) \text{ (S.I.)}$$

δ) Ισχύει:

$$\varphi_{M_{t_2}} = 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_{M_{t_2}}}{\lambda} \right) \Rightarrow 12\pi = 2\pi \left(\frac{2}{0,25} - \frac{x_{M_{t_2}}}{0,5} \right)$$

$$\Rightarrow x_{M_{t_2}} = 1 \text{ m}$$

Το σημείο Μ αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση τη χρονική στιγμή:

$$t_M = \frac{x_M}{v_\delta} \Rightarrow t_M = 0,5 \text{ s}$$

ε) Τη χρονική στιγμή $t_3 = 0,4 \text{ s}$ το κύμα δεν θα έχει φτάσει στο Μ και επομένως η επιτάχυνσή του θα είναι ίση με **μηδέν**.

Πρόβλημα 44

α) Η γενική μορφή της εξίσωσης του κύματος είναι η:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow y = A \cdot \eta\mu \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \quad (1)$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση (1) του κύματος με αυτήν που δίνεται στην εκφώνηση, για το μήκος κύματος προκύπτει:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pi x \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Ενώ για την περίοδο έχουμε:

$$\frac{2\pi t}{T} = \pi t \Rightarrow T = 2 \text{ s}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 1 \text{ m/s}$$

β) Επειδή $\varphi_{\Sigma} > \varphi_P$, προκύπτει ότι το σημείο Σ κινείται για περισσότερο χρόνο από το Ρ, άρα **το κύμα διαδίδεται από το σημείο Σ στο Ρ.**

γ) Ισχύει:

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot \frac{P\Sigma}{\lambda} \Rightarrow P\Sigma = \frac{\Delta\varphi \cdot \lambda}{2\pi} \Rightarrow P\Sigma = 4 \text{ m}$$

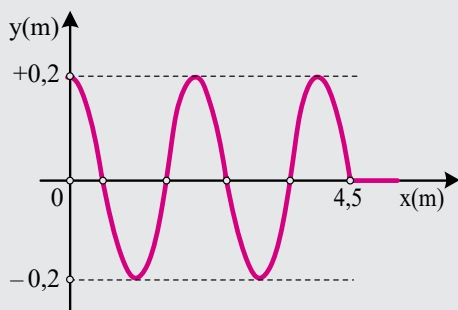
δ) Υπολογίζουμε το σημείο όπου έχει φτάσει το κύμα τη χρονική στιγμή $t_2 = 4,5$ s:

$$x_2 = v_{\delta} t_2 \Rightarrow x_2 = 4,5 \text{ m}$$

Βρίσκουμε πόσα μήκη κύματος αντιστοιχούν στην απόσταση αυτή. Προκύπτει ότι:

$$\frac{x_2}{\lambda} = \frac{4,5}{2} \Rightarrow x_2 = 2,25\lambda$$

Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο του κύματος ξεκινώντας από το πιο απομακρυσμένο σημείο που βρίσκεται το κύμα τη χρονική στιγμή t_2 :



Πρόβλημα 45

α) Η γενική μορφή της φάσης του κύματος είναι:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (1)$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση (1), για τη φάση του κύματος, με αυτήν που δίνεται στην εκφώνηση, προκύπτει:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = 0,5\pi x \Rightarrow \lambda = 4 \text{ m}$$

β) i) Προκύπτει:

$$\Delta x = \kappa \lambda \Rightarrow x - x_0 = \kappa \lambda \Rightarrow x = \kappa \lambda$$

Επίσης, έχουμε:

$$x_{\kappa} < x < x_{\Lambda} \Rightarrow 4 < 4\kappa < 16 \Rightarrow 1 < \kappa < 4 \text{ άρα } \kappa = 2,3 \text{ (2 σημεία)}$$

ii) Προκύπτει:

$$\Delta x = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{2} \Rightarrow x - x_0 = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{2} \Rightarrow x = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{2}$$

Τελικά ισχύει:

$$x_{\kappa} < x < x_{\Lambda} \Rightarrow 4 < (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{2} < 16 \Rightarrow 4 < (2\kappa + 1) \frac{4}{2} < 16$$

$$\Rightarrow 0,5 < \kappa < 3,5 \text{ άρα } \kappa = 1,2,3 \text{ (3 σημεία)}$$

γ) Η φάση του κύματος, τη χρονική στιγμή t_1 , θα έχει τη μορφή:

$$\varphi_{t_1} = 4\pi t_1 - 0,5\pi x \Rightarrow \varphi_{t_1} = 8\pi - 0,5\pi x \quad (\text{S.I.}) \quad (2)$$

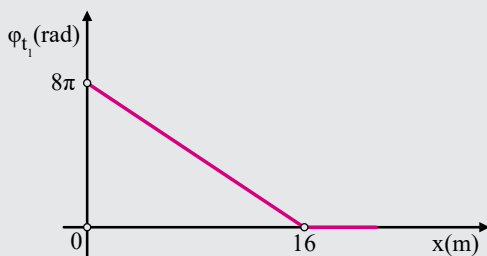
Θέτουμε στη σχέση (2) όπου $x = 0$.

Προκύπτει: $\varphi_{t_1} = 8\pi \text{ rad}$

Ισχύει:

$$\varphi_{t_1} = 0 \Rightarrow 8\pi - 0,5\pi x = 0 \Rightarrow x = 16 \text{ m}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



Πρόβλημα 46

α) Ισχύει:

$$x_M = v_{\delta} t_M \Rightarrow x_M = 4 \text{ m}$$

β) Από το διάγραμμα προκύπτει:

$$\frac{T}{2} = 0,5\text{s} \Rightarrow T = 1 \text{ s}$$

Για το μήκος κύματος προκύπτει:

$$\lambda = v_{\delta} T \Rightarrow \lambda = 8 \text{ m}$$

Για την εξίσωση του κύματος, ισχύει:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{8} \right) \quad (\text{S.I.})$$

γ) Προκύπτει:

$$v_{M,t_1} = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$v_{M,t_1} = \left[2\pi \cdot 0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{4,5}{1} - \frac{4}{8} \right) \right] \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow v_{M,t_1} = 0,4\pi \text{ m/s}$$

Τελικά, έχουμε:

$$p_{M,t_1} = m v_{M,t_1} \Rightarrow p_{M,t_1} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

δ) Ισχύει:

$$\varphi_K = 2\pi \left(t - \frac{x_K}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi_K = 2\pi t - 2\pi \quad (\text{S.I.})$$

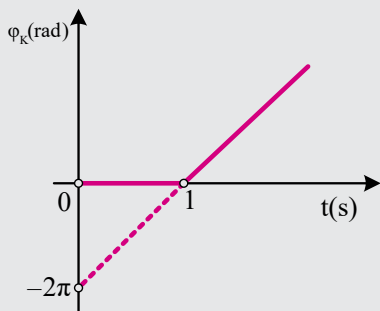
Θέτουμε στην παραπάνω εξίσωση της φάσης, όπου $t = 0$, και προκύπτει:

$$\varphi_K = -2\pi \text{ rad}$$

Ισχύει:

$$\varphi_K = 0 \Rightarrow 2\pi t - 2\pi = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ s}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



Πρόβλημα 47

α) Για τη φάση του κύματος του σημείου Z ισχύει:

$$\varphi_Z = \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_Z}{\lambda} \Rightarrow \varphi_Z = \frac{2\pi t}{T} - \frac{4\pi}{\lambda} \quad (1)$$

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι για $t = 0$ έχουμε $\varphi_Z = -2\pi$ rad.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1), έχουμε:

$$-2\pi = -\frac{4\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Επίσης, από το διάγραμμα προκύπτει ότι για $t = 1$ s έχουμε $\varphi_Z = 0$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) έχουμε:

$$0 = \frac{2\pi}{T} - 2\pi \Rightarrow T = 1 \text{ s}$$

Για την ταχύτητα διάδοσης ισχύει:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 2 \text{ m/s}$$

β) Η φάση του σημείου Z, τη χρονική στιγμή $t = 2$ s, είναι:

$$\varphi_Z = \left(\frac{2\pi \cdot 2}{1} - \frac{4\pi}{2} \right) \text{ rad} \Rightarrow \varphi_Z = 2\pi \text{ rad}$$

γ) Τη χρονική στιγμή $t = 3,75$ s η απομάκρυνση του σημείου Z θα είναι:

$$y_z = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_Z}{\lambda} \right) \Rightarrow y_z = \left[0,5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{3,75}{1} - \frac{2}{2} \right) \right] \text{ m} \Rightarrow y_z = -0,5 \text{ m}$$

δ) Η εξίσωση του κύματος θα έχει τη μορφή:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow y = 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi (t - 0,5x) \quad (\text{S.I.})$$

ε) Το σημείο M αρχίζει την ταλάντωσή του τη χρονική στιγμή:

$$t_M = \frac{x_M}{v_\delta} \Rightarrow t_M = 2 \text{ s}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



Πρόβλημα 48

α) Με τη βοήθεια του διαγράμματος υπολογίζουμε το μήκος κύματος. Έχουμε:

$$d = 4,5 \text{ m} = 2,25\lambda \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

β) Βρίσκουμε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος:

$$v_\delta = \frac{d}{t} \Rightarrow v_\delta = 1 \text{ m/s}$$

Για την περίοδο του κύματος έχουμε:

$$T = \frac{\lambda}{v_\delta} \Rightarrow T = 2 \text{ s}$$

γ) Η εξίσωση του κύματος είναι:

$$y = 0,4\eta\mu 2\pi(0,5t - 0,5x) \quad (\text{S.I.})$$

δ) Το σημείο M αρχίζει την ταλάντωσή του τη χρονική στιγμή:

$$t_M = \frac{x_M}{v_\delta} \Rightarrow t_M = 4 \text{ s}$$

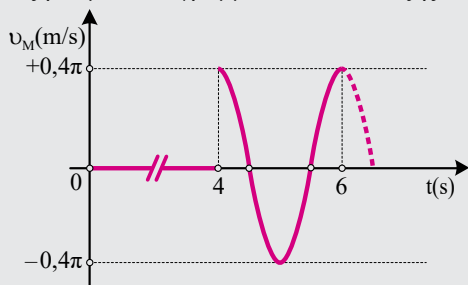
Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου M θα έχει τη μορφή:

$$v_M = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$v_M = \frac{2\pi}{T} A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$v_M = 0,4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi(0,5t - 2) \quad (\text{S.I.}) \text{ για } t \geq 4 \text{ s}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα θα είναι το εξής:



Πρόβλημα 49

α) Από την εξίσωση της ταλάντωσης των δύο πηγών εξαγουμε ότι $A=0,4\text{m}$ και $\omega=10\pi\text{ rad/s}$. Προκύπτει ότι:

$$v = \lambda f \Rightarrow v = \lambda \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi v}{\omega} \Rightarrow \lambda = 0,8\text{ m}$$

β) Ο φελλός αρχίζει να ταλαντώνεται όταν φτάσει το κύμα από την πιο κοντινή πηγή, δηλαδή από δηλαδή την Π_1 . Ισχύει:

$$t_1 = \frac{r_1}{v_\delta} \Rightarrow t_1 = 0,3\text{ s}$$

γ) Η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Σ ξεκινάει όταν έχει φτάσει και το κύμα από την πηγή Π_2 , δηλαδή:

$$t_2 = \frac{r_2}{v_\delta} \Rightarrow t_2 = 0,6\text{ s}$$

δ) Για το Σ έχουμε:

$$\frac{r_1 - r_2}{\lambda} = \frac{-1,2}{0,8} \Rightarrow r_1 - r_2 = -3 \frac{\lambda}{2}$$

Επομένως το σημείο Σ είναι σημείο ακυρωτικής συμβολής ($N = -2$).

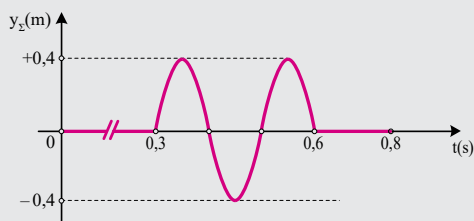
ε) Για την περίοδο ταλάντωσης του φελλού έχουμε:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 0,2\text{ s}$$

Από τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,3\text{ s}$ μέχρι την $t_2 = 0,6\text{ s}$ ο φελλός εκτελεί:

$$\kappa = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow \kappa = \frac{t_2 - t_1}{T} \Rightarrow \kappa = 1,5\text{ ταλ.}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



Πρόβλημα 50

α) Από το διάγραμμα προκύπτει ότι η περίοδος είναι $T = 0,4\text{ s}$.

Ισχύει:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow v_\delta = \lambda \frac{1}{T} \Rightarrow \lambda = v_\delta T \Rightarrow \lambda = 0,8\text{ m}$$

β) Ο φελλός αρχίζει να ταλαντώνεται όταν φτάσει το κύμα από την πιο κοντινή πηγή την Π_1 , δηλαδή τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,4\text{ s}$. Ισχύει:

$$t_1 = \frac{r_1}{v_\delta} \Rightarrow r_1 = v_\delta t_1 \Rightarrow r_1 = 0,8\text{ m}$$

Η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Σ ξεκινάει όταν έχει φτάσει και το κύμα από την πηγή Π_2 , δηλαδή τη χρονική στιγμή $t_2 = 2\text{ s}$. Ισχύει:

$$t_2 = \frac{r_2}{v_\delta} \Rightarrow r_2 = v_\delta t_2 \Rightarrow r_2 = 4\text{ m}$$

γ) Τη χρονική στιγμή $t = 0,5\text{ s}$ στο Σ έχει φτάσει μόνο το κύμα από την πηγή Π_1 . Ισχύει:

$$y_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y_1 = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{0,5}{0,4} - \frac{0,8}{0,8} \right) \Rightarrow y_1 = 0,1\text{ m}$$

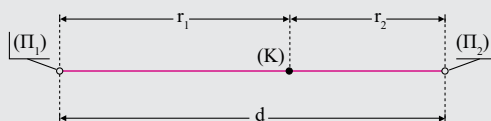
δ) Τη χρονική στιγμή $t = 2,1\text{ s}$ έχουν συμβάλει και τα δύο κύματα στο Σ. Ισχύει ότι:

$$t = 2\text{ s} + 0,1\text{ s} \Rightarrow t = t_2 + \frac{T}{4}$$

Επομένως ο φελλός θα βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του, δηλαδή στην: $y_2 = 0,2\text{ m}$

Πρόβλημα 51

α)



Όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου τα οποία ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος απέχουν από τις δύο πηγές Π_1, Π_2 αποστάσεις r_1, r_2 που ικανοποιούν τη σχέση:

$$r_1 - r_2 = N\lambda \quad (1) \text{ με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Μας ενδιαφέρουν τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$, επομένως θα ισχύει και η σχέση:

$$r_1 + r_2 = d \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1),(2) παίρνουμε:

$$r_1 - r_2 + r_1 + r_2 = d + N\lambda \Rightarrow r_1 = N \frac{\lambda}{2} + \frac{d}{2} \quad (3)$$

Ισχύει όμως:

$$0 \leq r_1 \leq d$$

Τελικά, προκύπτει:

$$0 \leq N \frac{\lambda}{2} + \frac{d}{2} \leq d \Rightarrow 0 \leq N \cdot \frac{1,6}{2} + \frac{2}{2} \leq 2 \Rightarrow -1,25 \leq N \leq 1,25$$

Επομένως ισχύει ότι: $N = -1, 0, 1$ (**3 σημεία**)

ενισχυτικής συμβολής). Με τη βοήθεια της σχέσης (3) βρίσκουμε τις αποστάσεις των σημείων αυτών από την πηγή Π_1 . Προκύπτει:

Για $N = -1$, $r_1 = 0,2 \text{ m}$

Για $N = 0$, $r_1 = 1 \text{ m}$

Για $N = 1$, $r_1 = 1,8 \text{ m}$

β) Δουλεύοντας με την ίδια μέθοδο βρίσκουμε τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος που παραμένουν διαρκώς ακίνητα. Τα σημεία αυτά ικανοποιούν τη σχέση:

$$r_1 - r_2 = (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (5) \text{ με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (5) έχουμε:

$$r_1 - r_2 + r_1 + r_2 = d + (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$r_1 = (2N + 1) \frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} \quad (6)$$

Ισχύει όμως:

$$0 \leq r_1 \leq d$$

Τελικά προκύπτει:

$$0 \leq (2N + 1) \frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} \leq d \Rightarrow$$

$$0 \leq (2N + 1) \frac{1,6}{4} + \frac{2}{2} \leq 2 \Rightarrow -1,75 \leq N \leq 0,75$$

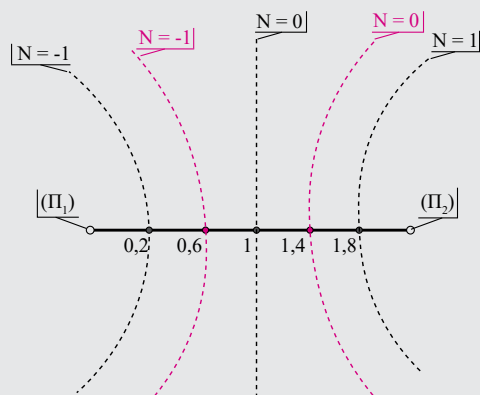
Επομένως $N = -1, 0$ (**2 σημεία ακυρωτικής**).

Με τη βοήθεια της σχέσης (6) βρίσκουμε τις αποστάσεις των σημείων αυτών από την πηγή Π_1 . Προκύπτει:

Για $N = -1$, $r_1 = 0,6 \text{ m}$

Για $N = 0$, $r_1 = 1,4 \text{ m}$

γ) Οι υπερβολές ενισχυτικής και ακυρωτικής συμβολής οι οποίες τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$ φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα:



Πρόβλημα 52

α) Η συμβολή αρχίζει όταν φτάσει το κύμα από την πιο μακρινή πηγή, δηλαδή από δηλαδή την Π_2 . Ισχύει:

$$t_2 = \frac{r_2}{v_\delta} \Rightarrow t_2 = \frac{10}{3} \text{ s}$$

β) Η κινητική ενέργεια των πηγών μεγιστοποιείται κάθε φορά που διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους, επομένως σε 1 s διέρχονται 12 φορές από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσής τους και επομένως εκτελούν 6 ταλαντώσεις. Επομένως η συχνότητα της ταλάντωσής τους είναι $f = 6 \text{ Hz}$.

Για το μήκος κύματος ισχύει:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v_\delta}{f} \Rightarrow \lambda = 0,4 \text{ m}$$

γ) Για το σημείο Σ έχουμε:

$$\frac{r_1 - r_2}{\lambda} = \frac{-2}{0,4} \Rightarrow r_1 - r_2 = -5\lambda$$

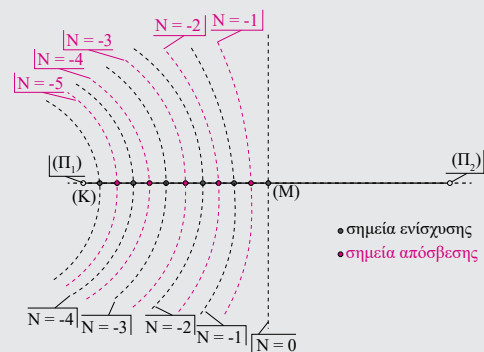
Επομένως το σημείο Σ είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής ($N = -5$) και το πλάτος ταλάντωσής του είναι: **$A_\Sigma = 0,2 \text{ m}$** .

δ) Για το σημείο Κ ισχύει:

$$d_1 - d_2 = -2\text{m και } d_1 + d_2 = 10 \text{ m}$$

Επομένως: **$d_2 = 6 \text{ m}$**

ε)



5 σημεία

Πρόβλημα 53

α) Συγκρίνουμε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που δίνεται, με τη γενική μορφή:

$$y = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \frac{t}{T}$$

Προκύπτει:

$$2A = 0,8\text{m} \Rightarrow A = 0,4 \text{ m}$$

Επίσης, ισχύει:

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = 20\pi x \Rightarrow \lambda = 0,1 \text{ m}$$

Και:

$$2\pi \frac{t}{T} = 20\pi t \Rightarrow T = 0,1 \text{ s}$$

Οι εξισώσεις των δύο κυμάτων θα είναι:

$$y_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y_1 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi (10t - 10x) \text{ (S.I.)}$$

Και:

$$y_2 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y_2 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi (10t + 10x) \text{ (S.I.)}$$

β) Για να υπολογίσουμε τη θέση της 3ης κοιλίας ως θέτουμε στη σχέση:

$$x_k = N \frac{\lambda}{2}$$

όπου $N = 2$.

Προκύπτει:

$$x_k = 2 \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_k = \lambda \Rightarrow x_k = 0,1 \text{ m}$$

γ) Για τις θέσεις των δεσμών ισχύει:

$$x_\delta = (2N + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (1)$$

Προκύπτει:

$$x_K < x_\delta < x_\Lambda \Rightarrow x_K < (2N + 1) \frac{\lambda}{4} < x_\Lambda \Rightarrow$$

$$0,2 < (2N + 1) \frac{0,1}{4} < 0,4 \Rightarrow 3,5 < N < 7,5$$

Επομένως οι ακέραιες τιμές που παίρνει το N είναι 4,5,6,7 (4 δεσμοί). Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) έχουμε:

$$N = 4, x_\delta = [(2 \cdot 4 + 1) \cdot 0,1/4] \text{ m} \Rightarrow x_\delta = 0,225 \text{ m}$$

$$N = 5, x_\delta = [(2 \cdot 5 + 1) \cdot 0,1/4] \text{ m} \Rightarrow x_\delta = 0,275 \text{ m}$$

$$N = 6, x_\delta = [(2 \cdot 6 + 1) \cdot 0,1/4] \text{ m} \Rightarrow x_\delta = 0,325 \text{ m}$$

$$N = 7, x_\delta = [(2 \cdot 7 + 1) \cdot 0,1/4] \text{ m} \Rightarrow x_\delta = 0,375 \text{ m}$$

δ) Η ταχύτητα του σημείου Β τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{80} \text{ s}$ θα είναι:

$$v_\Sigma = \omega 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x_\Sigma}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow$$

$$v_\Sigma = \frac{2\pi}{T} 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x_\Sigma}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

$$\Rightarrow v_\Sigma = \frac{2\pi}{0,1} 0,8 \cdot \sin 2\pi \frac{0,6}{0,1} \cdot \sin 2\pi \frac{1}{80} \Rightarrow$$

$$v_\Sigma = 8\pi\sqrt{2} \text{ m/s}$$

Πρόβλημα 54

α) Συγκρίνουμε την εξίσωση του πρώτου κύματος που δίνεται με τη γενική μορφή:

$$y = A \cdot \eta\mu \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} \right)$$

Προκύπτει:

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = 2\pi x \Rightarrow \lambda = 1 \text{ m}$$

Και:

$$2\pi \frac{t}{T} = \pi t \Rightarrow T = 2 \text{ s}$$

Η πλησιέστερη στο Ο κοιλία βρίσκεται στη θέση $x = \frac{\lambda}{2} = 0,5 \text{ m}$. Για την εξίσωση της απομάκρυνσής της σε συνάρτηση με τον χρόνο, έχουμε:

$$y = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \sin \pi \cdot \eta\mu \pi t \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu(\pi t + \pi) \text{ (S.I.)}$$

β) Για τις θέσεις των κοιλιών, έχουμε:

$$x_k = N \frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_k = 0,5N \quad (1)$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $N = 0,1,2,3,4$ προκύπτει για τις θέσεις των κοιλιών:

$$x_k = 0, x_k = 0,5 \text{ m}, x_k = 1 \text{ m}, x_k = 1,5 \text{ m}, x_k = 2 \text{ m}$$

Για τις θέσεις των δεσμών έχουμε:

$$x_\delta = (2N + 1) \frac{\lambda}{4} \Rightarrow x_\delta = (2N + 1)0,25 \quad (2)$$

Θέτοντας στη σχέση (2) όπου $N = 0,1,2,3$ προκύπτει για τις θέσεις των δεσμών:

$$x_\delta = 0,25 \text{ m}, x_\delta = 0,75 \text{ m}, x_\delta = 1,25 \text{ m}, x_\delta = 1,75 \text{ m}$$

Παρατηρούμε ότι τα σημεία Ζ, Λ είναι κοιλίες και ότι ανάμεσά τους υπάρχουν 3 δεσμοί. Επομένως, η διαφορά φάσης των Ζ και Λ θα είναι:

$$\Delta\phi = \pi \text{ rad}$$

γ) Προκύπτει:

$$d_{\max} = \sqrt{(4A)^2 + \Delta x_{\text{KL}}^2} \Rightarrow$$

$$d_{\max} = (\sqrt{0,64 + 2,25}) \text{ m} \Rightarrow d_{\max} = \sqrt{2,89} \text{ m}$$

δ) Η επιτάχυνση του σημείου Κ, τη χρονική στιγμή $t = 0,5 \text{ s}$, θα είναι:

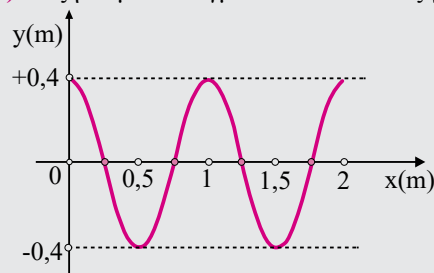
$$a_K = -\omega^2 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x_K}{\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow$$

$$a_K = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x_K}{\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t}{T}$$

$$\Rightarrow a_K = -\left(\frac{2\pi}{2}\right)^2 0,4 \cdot \sin 2\pi \frac{1}{1} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{0,5}{2} \Rightarrow$$

$$a_K = -0,4\pi^2 \text{ m/s}^2$$

ε) Το ζητούμενο στιγμιότυπο είναι το εξής:



Πρόβλημα 55

α) Η κοιλία στο Ο απέχει από τον πλησιέστερο δεσμό απόσταση ίση με 0,2 m. Προκύπτει:

$$\frac{\lambda}{4} = 0,2 \text{ m} \Rightarrow \lambda = 0,8 \text{ m}$$

Για το μήκος L ισχύει:

$$L = 6 \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow L = 2,6 \text{ m}$$

β) Το Ο είναι κοιλία και έχει πλάτος:

$$A_0 = \frac{0,2}{2} \text{ m} \Rightarrow A_0 = 0,1 \text{ m}$$

γ) Ο αριθμός των ταλαντώσεων που εκτελεί το σημείο στην αρχή Ο είναι:

$$N = \frac{\kappa}{2} \Rightarrow N = \left(\frac{20}{2}\right) \text{ ταλ.} \Rightarrow N = 10 \text{ ταλ.}$$

Η περίοδος του κύματος είναι:

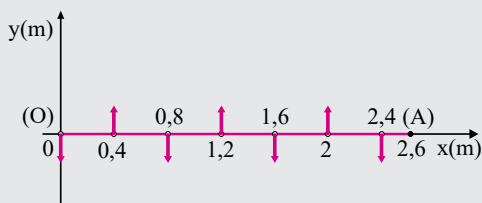
$$T = \frac{\Delta t}{N} \Rightarrow T = 0,1 \text{ s}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος έχει τη μορφή:

$$y = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow$$

$$y = 0,1 \cdot \sin 2,5\pi x \cdot \eta \mu 20\pi t \text{ (S.I.)}$$

δ) Το ζητούμενο στιγμιότυπο είναι το εξής:



Πρόβλημα 56

α) Από την εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης της πηγής έχουμε:

$$\omega = 2\pi \text{ rad/s}$$

Για την περίοδο των κυμάτων έχουμε:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 1 \text{ s}$$

Επίσης ισχύει:

$$4 \frac{\lambda}{2} = 0,4 \text{ m} \Rightarrow \lambda = 0,2 \text{ m}$$

Για την ταχύτητα διάδοσης έχουμε:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 0,2 \text{ m/s}$$

β) Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης της κάθε κοιλίας του στάσιμου κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_{\max} = \omega \cdot 2A \Rightarrow v_{\max} = 1,6\pi \text{ m/s}$$

γ) Για τις θέσεις των κοιλιών ισχύει:

$$x_k = N \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

Προκύπτει:

$$x_\Sigma < x_k < x_\Lambda \Rightarrow x_\Sigma < N \frac{\lambda}{2} < x_\Lambda \Rightarrow 0,2 < 0,1 N < 0,6$$

$$\Rightarrow 2 < N < 6$$

Επομένως οι ακέραιες τιμές που παίρνει το N είναι 3, 4, 5 (3 κοιλίες). Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) έχουμε:

$$N = 3, \quad x_k = 0,3 \text{ m}$$

$$N = 4, \quad x_k = 0,4 \text{ m}$$

$$N = 5, \quad x_k = 0,5 \text{ m}$$

δ) Ισχύει (με απόδειξη):

$$|v_k| = \omega \sqrt{(2A)^2 - y_k^2} \Rightarrow |v_k| = 0,8\pi \text{ m/s}$$

Πρόβλημα 57

α) Επειδή η κοιλία στο Ο είναι σε θέση μέγιστης απομάκρυνσης ισχύει:

$$2A = 0,8 \text{ m} \Rightarrow A = 0,4 \text{ m}$$

β) Από το διάγραμμα έχουμε:

$$5 \frac{\lambda}{4} = 0,5 \Rightarrow \lambda = 0,4 \text{ m}$$

Ισχύει:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v_\delta} \Rightarrow T = 0,2 \text{ s}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος έχει τη μορφή:

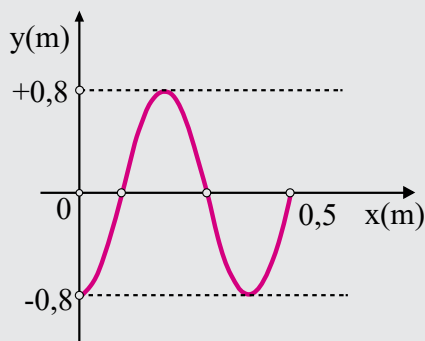
$$y = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow$$

$$y = 0,8 \cdot \sin 5\pi x \cdot \eta \mu 10\pi t \text{ (S.I.)}$$

γ) Για τη χρονική στιγμή t_2 ισχύει:

$$t_2 = t_1 + 0,1 \text{ s} \Rightarrow t_2 = t_1 + \frac{T}{2}$$

Το ζητούμενο στιγμιότυπο θα έχει τη μορφή:



δ) Η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του Ο είναι:

$$v_0 = \omega 2A \sin 2\pi \frac{x_0}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad (1)$$

Η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του Σ είναι:

$$v_z = \omega 2A \sin 2\pi \frac{x_z}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1),(2) έχουμε:

$$\frac{v_o}{v_z} = \frac{\omega 2A \sin 2\pi \frac{x_o}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}}{\omega 2A \sin 2\pi \frac{x_z}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}} \Rightarrow \frac{v_o}{v_z} = \frac{\sin 2\pi \frac{0}{0,4}}{\sin 2\pi \frac{1,05}{0,4}} \Rightarrow \frac{v_o}{v_z} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow v_z = -\frac{\sqrt{2}}{2} v_o \quad (3)$$

Θέτοντας στη σχέση (3) όπου:

$$v_o = -v_{\max,0} \Rightarrow v_o = -\frac{2\pi}{T} A_o \Rightarrow v_o = -8\pi \text{ m/s}$$

προκύπτει:

$$v_z = 4\pi\sqrt{2} \text{ m/s}$$

Πρόβλημα 58

α) Η απόσταση που διανύει το κύμα σε χρονική διάρκεια Δt είναι:

$$d = c \cdot \Delta t \Rightarrow d = 6 \text{ m}$$

β) Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε:

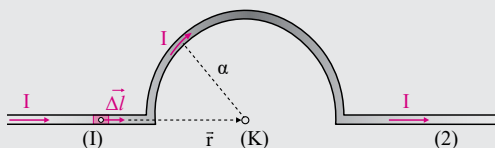
$$c = \lambda \cdot f \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow f = 10^8 \text{ Hz}$$

γ) Προκύπτει:

$$\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = c \Rightarrow E_{\max} = c \cdot B_{\max} \Rightarrow E_{\max} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ V/m}$$

Πρόβλημα 59

α)



Θεωρώντας ένα στοιχειώδες τμήμα Δl του ευθύγραμμου τμήματος, εφαρμόζουμε τον νόμο των Biot-Savart για να βρούμε το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί στο Κ. Ισχύει:

$$\Delta B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot \Delta l}{a^2} \cdot \sin 0^\circ \Rightarrow \Delta B_1 = 0$$

Προκύπτει:

$$B_1 = \sum \Delta B_1 \Rightarrow B_1 = 0$$

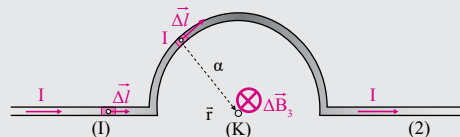
β) Τα ίδια ακριβώς με το ερώτημα α) θα ισχύουν και για το ευθύγραμμο τμήμα (2) δηλαδή:

$$\Delta B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot \Delta l}{a^2} \cdot \sin 180^\circ \Rightarrow \Delta B_2 = 0$$

Προκύπτει:

$$B_2 = \sum \Delta B_2 \Rightarrow B_2 = 0$$

β)



Εφαρμόζουμε τον νόμο των Biot-Savart, για στοιχειώδες τμήμα του ημικυκλίου προκειμένου να υπολογίσουμε το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί στο Κ. Έχουμε:

$$\Delta B_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot \Delta l}{r^2} \cdot \sin \theta \quad (1)$$

Ισχύει ότι κάθε στοιχειώδες τμήμα Δl απέχει από το σημείο Κ απόσταση $r = a$ ενώ η γωνία μεταξύ κάθε στοιχειώδους τμήματος Δl και $\vec{r}$ είναι $\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\Delta B_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot \Delta l}{a^2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta B_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot \Delta l}{a^2}$$

Για το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί στο Κ, ολόκληρο το ημικύκλιο, ισχύει:

$$B_3 = \sum \Delta B_3 \Rightarrow B_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{a^2} \cdot \sum \Delta l \Rightarrow B_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{a^2} \cdot \pi a \Rightarrow B_3 = \frac{\mu_0 I}{4a} \Rightarrow B_3 = \pi \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

Για το μέτρο της συνολικής έντασης του μαγνητικού πεδίου στο Κ, θα έχουμε επομένως:

$$B_K = B_3 \Rightarrow B_K = \pi \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

Η κατεύθυνση του $\vec{B}_K$ είναι κάθετη από τον αναγνώστη προς την επιφάνεια της σελίδας.

Πρόβλημα 60

α) Το μέτρο της έντασης B_1 στο σημείο Μ που οφείλεται στον αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I_1 , είναι:

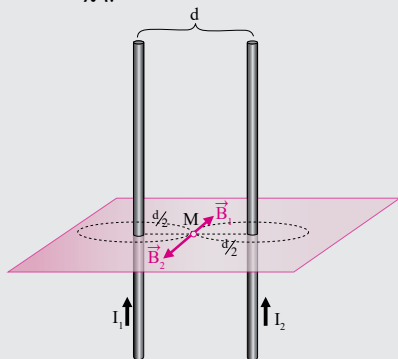
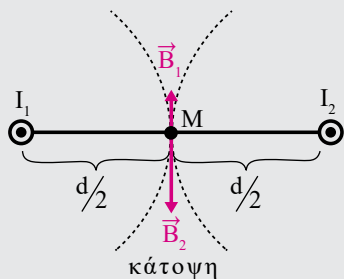
$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{d} \Rightarrow B_1 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

β) Το μέτρο της έντασης B_2 , στο σημείο Μ που οφείλεται στον αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I_2 , είναι:

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{d} \Rightarrow B_2 = 8 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

γ) Τα ρεύματα είναι ομόρροπα, επομένως τα

δύο διανύσματα των εντάσεων του μαγνητικού πεδίου είναι αντίρροπα, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

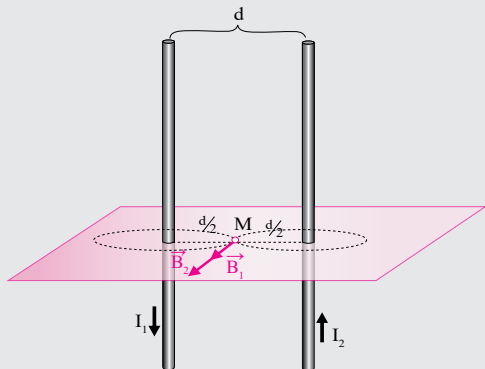
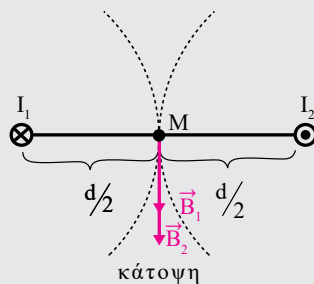


Άρα η συνολική ένταση στο σημείο M θα έχει μέτρο:

$$B_M = B_2 - B_1 \Rightarrow B_M = 4 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

και φορά ίδια με αυτήν του διανύσματος $\vec{B}_2$.

δ) Αν τα ρεύματα είναι αντίρροπα, τότε τα δύο διανύσματα των εντάσεων του μαγνητικού πεδίου είναι ομόρροπα, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



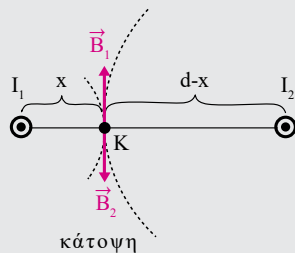
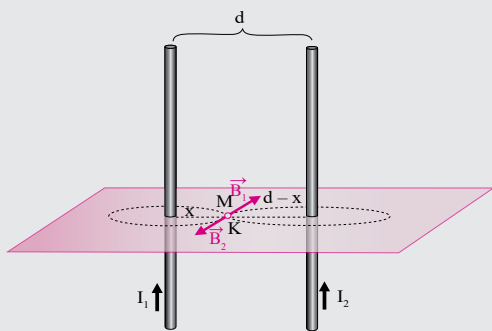
Άρα η συνολική ένταση στο σημείο M θα έχει μέτρο:

$$B'_M = B_2 + B_1 \Rightarrow B'_M = 12 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

και φορά ίδια με αυτήν των διανυσμάτων $\vec{B}_1, \vec{B}_2$.

Πρόβλημα 61

α) i) Επειδή τα ρεύματα I_1 και I_2 είναι ομόρροπα η συνισταμένη ένταση του μαγνητικού πεδίου θα είναι μηδέν, εντός των δύο αγωγών και προς την πλευρά του αγωγού που διαρρέεται από την μικρότερη ένταση ηλεκτρικού ρεύματος (χρησιμοποιούμε τον κανόνα του δεξιού χεριού για τον προσδιορισμό των εντάσεων του μαγνητικού πεδίου - η συνισταμένη ένταση δεν μπορεί να είναι μηδέν, εκτός των δύο αγωγών γιατί οι εντάσεις είναι ομόρροπες).



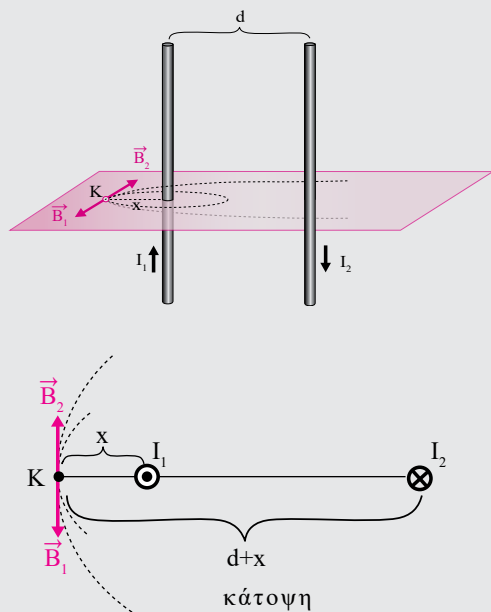
Έστω Κ το σημείο που γίνεται αυτό. Θεωρούμε x την απόσταση του σημείου Κ από τον αγωγό που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα έντασης I_1 . Προκύπτει:

$$B_{ολ.(K)} = 0 \Rightarrow B_1 = B_2 \Rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{d-x}$$

$$\xRightarrow{I_2 = 3I_1} \frac{I_1}{x} = \frac{3I_1}{d-x} \Rightarrow$$

$$x = \frac{d}{4} \Rightarrow x = 5 \text{ cm}$$

ii) Επειδή τα ρεύματα I_1 και I_2 είναι αντίρροπα η συνισταμένη ένταση του μαγνητικού πεδίου θα είναι μηδέν, εκτός των δύο αγωγών και προς την πλευρά του αγωγού που διαρρέεται από την μικρότερη ένταση ηλεκτρικού ρεύματος (χρησιμοποιούμε τον κανόνα του δεξιού χεριού για τον προσδιορισμό των εντάσεων του μαγνητικού πεδίου - η συνισταμένη ένταση δεν μπορεί να είναι μηδέν, εντός των δύο αγωγών γιατί οι εντάσεις είναι ομόρροπες).



Έστω Κ το σημείο που γίνεται αυτό. Θεωρούμε x την απόσταση του σημείου Κ από τον αγωγό που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα έντασης I_1 . Ισχύει:

$$B_{ολ.(K)} = 0 \Rightarrow B_1 = B_2 \Rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{d+x}$$

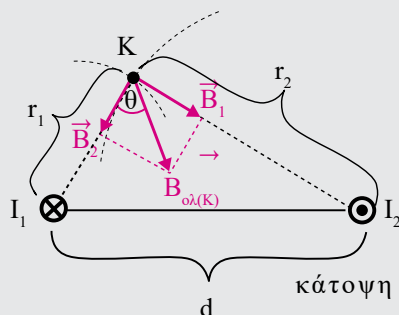
$$\xRightarrow{I_2 = 3I_1} \frac{I_1}{x} = \frac{3I_1}{d+x} \Rightarrow x = \frac{d}{2} \Rightarrow x = 10 \text{ cm}$$

β) Το μέτρο της δύναμης Laplace, ανά μονάδα μήκους, που ασκείται από τον ένα αγωγό στον άλλον είναι:

$$\frac{F_{1,2}}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{d} \Rightarrow \frac{F_{1,2}}{l} = 75 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}$$

Πρόβλημα 62

α)



Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου που οφείλεται στον αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I_1 είναι:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{r_1} \Rightarrow B_1 = 10^{-5} \text{ T}$$

β) Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου που οφείλεται στον αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I_2 είναι:

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{r_2} \Rightarrow B_2 = 10^{-5} \text{ T}$$

γ) Για το μέτρο της ολικής έντασης του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Κ έχουμε:

$$B_{ολ.(K)} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \Rightarrow B_{ολ.(K)} = \sqrt{2} \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

Για την κατεύθυνση της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Κ ισχύει:

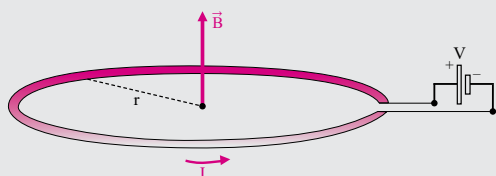
$$\epsilon\phi\theta = \frac{B_1}{B_2} = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

Πρόβλημα 63

α) Για τον υπολογισμό της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό χρησιμοποιούμε τον νόμο του Ohm. Έχουμε:

$$I = \frac{V}{R} \Rightarrow I = 2 \text{ A}$$

β) Με τη βοήθεια του κανόνα του δεξιού χεριού σχεδιάζουμε το διάνυσμα της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού αγωγού. Προκύπτει:



γ) Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του αγωγού είναι:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I}{r} \Rightarrow B = \pi \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

Πρόβλημα 64

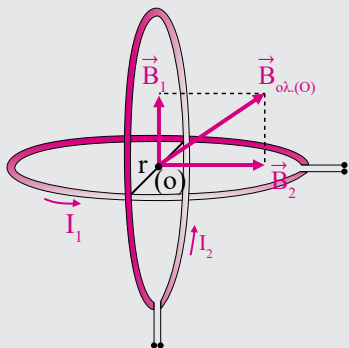
α) Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο Ο, εξαιτίας του αγωγού (1), υπολογίζεται από τον τύπο:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I_1}{r} \Rightarrow B_1 = 6\pi \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

β) Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο Ο, εξαιτίας του αγωγού (2), υπολογίζεται από τον τύπο:

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I_2}{r} \Rightarrow B_2 = 8\pi \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

γ) Οι εντάσεις του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο Ο, εξαιτίας κάθε αγωγού, είναι κάθετες μεταξύ τους όπως προκύπτει από τον κανόνα του δεξιού χεριού.



Για την συνολική ένταση του μαγνητικού στο κέντρο Ο των κυκλικών αγωγών ισχύει:

$$B_{ολ.(Ο)} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \Rightarrow B_{ολ.(Ο)} = 10^{-4} \pi \text{ T}$$

Πρόβλημα 65

α) Υπολογίζουμε την ακτίνα του κυκλικού αγωγού. Ισχύει:

$$l = N2\pi a \Rightarrow a = \frac{l}{2\pi} \Rightarrow a = 0,1\pi \text{ m}$$

β) Υπολογίζουμε την ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον κυκλικό αγωγό με τη βοήθεια του νόμου του Ohm. Προκύπτει:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow I = 2 \text{ A}$$

γ) Η ηλεκτρική ισχύς που καταναλώνεται στα άκρα του αγωγού είναι:

$$P_{\eta\lambda} = I^2 R \Rightarrow P_{\eta\lambda} = 20 \text{ W}$$

δ) Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού αγωγού θα είναι:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I}{a} \Rightarrow B = 4 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

ε) Υπολογίζουμε τη νέα ακτίνα του κυκλικού αγωγού. Έχουμε:

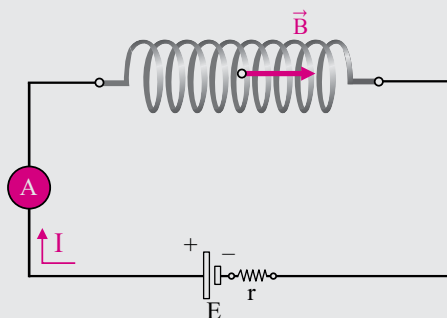
$$l = N2\pi a' \Rightarrow a' = \frac{l}{N \cdot 2\pi} \Rightarrow a' = 0,01\pi \text{ m}$$

Για το νέο μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού αγωγού θα ισχύει:

$$B' = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{N2\pi I}{a'} \Rightarrow B' = 4 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

Πρόβλημα 66

α) Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του σωληνοειδούς είναι αυτή που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



β) Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει το σωληνοειδές υπολογίζεται από το νόμο του Ohm. Ισχύει:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \Rightarrow I = 10 \text{ A}$$

Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού στο κέντρο του σωληνοειδούς είναι:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} I \Rightarrow B = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

γ) Το κάθε ένα από τα δύο κομμάτια που προκύπτουν όταν κόψουμε το σωληνοειδές σε δύο ίσα κομμάτια, έχει το μισό μήκος ($l' = 0,2 \text{ m}$) και το μισό αριθμό σπειρών. Επίσης, επειδή η αντίσταση ενός σύρματος είναι ανάλογη με το μήκος του ($R = \rho \frac{l}{S}$), το σωληνοειδές θα έχει και τη μισή αντίσταση ($R' = 1 \Omega$). Η ένταση του ρεύματος που θα διαρρέει το νέο σωληνοειδές θα είναι :

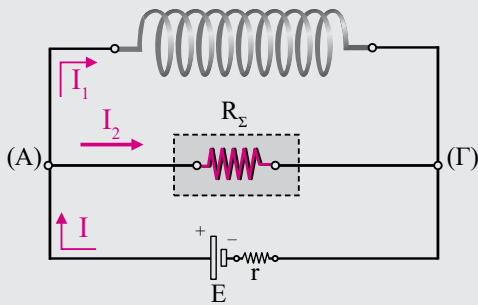
$$I' = \frac{E}{R' + r} \Rightarrow I' = 15 \text{ A}$$

δ) Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του νέου σωληνοειδούς θα είναι:

$$B' = \mu_0 \frac{N'}{l'} I' \Rightarrow B' = 6\pi \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

Πρόβλημα 67

α)



Τα στοιχεία κανονικής λειτουργίας της συσκευής είναι:

$$P_k = 20 \text{ W}, V_k = 10 \text{ V}$$

Για την αντίσταση της συσκευής ισχύει:

$$R_\Sigma = \frac{V_k^2}{P_k} \Rightarrow R_\Sigma = 5 \Omega$$

Για την εξωτερική αντίσταση του κυκλώματος έχουμε:

$$R_{\text{εξ}} = \frac{R R_\Sigma}{R + R_\Sigma} \Rightarrow R_{\text{εξ}} = 4 \Omega$$

Από την εφαρμογή του νόμου του Ohm για κλειστό κύκλωμα, έχουμε:

$$I = \frac{E}{R_{\text{εξ}} + r} \Rightarrow I = 4 \text{ A}$$

Επίσης, ισχύει:

$$V_{\text{ΑΓ}} = I R_{\text{εξ}} \Rightarrow V_{\text{ΑΓ}} = 16 \text{ V}$$

Για την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το σωληνοειδές, προκύπτει:

$$I_1 = \frac{V_{\text{ΑΓ}}}{R} \Rightarrow I_1 = 0,8 \text{ A}$$

Για την ένταση του ρεύματος που διαρρέει τη θερμική συσκευή, προκύπτει:

$$I_2 = \frac{V_{\text{ΑΓ}}}{R_\Sigma} \Rightarrow I_2 = 3,2 \text{ A}$$

β) Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του σωληνοειδούς υπολογίζεται από τη σχέση:

$$B = \frac{\mu_0 N I_1}{l} \Rightarrow B = 2\pi \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

γ) Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στα άκρα του σωληνοειδούς υπολογίζεται από τη σχέση:

$$B_{\text{ακρ}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 N I_1}{l} \Rightarrow B_{\text{ακρ}} = \pi \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

δ) Ισχύει $V_{\text{ΑΓ}} > V_k$ άρα η συσκευή δε λειτουργεί κανονικά.

Πρόβλημα 68

α) Η κατεύθυνση που σχηματίζει η ταχύτητα με την κατεύθυνση των μαγνητικών γραμμών είναι $\phi = 0^\circ$. Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το φορτισμένο σωματίδιο από το μαγνητικό πεδίο είναι:

$$F_L = Bv|q| \cdot \eta \mu \phi \Rightarrow F_L = Bv|q| \cdot \eta \mu 0^\circ \Rightarrow F_L = 0$$

β) Το σωματίδιο θα εκτελέσει **Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση**.

γ) Για το μήκος της τροχιάς του ισχύει:

$$S = v \cdot \Delta t \Rightarrow S = 200 \text{ m}$$

Πρόβλημα 69

α) Η κατεύθυνση που σχηματίζει η ταχύτητα με την κατεύθυνση των μαγνητικών γραμμών είναι $\phi = 90^\circ$. Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το φορτισμένο σωματίδιο από το μαγνητικό πεδίο είναι:

$$F_L = Bv|q| \cdot \eta \mu 90^\circ \Rightarrow F_L = Bv|q| \Rightarrow F_L = 6 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

β) Το σωματίδιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Η ακτίνα της κυκλικής κίνησης είναι:

$$R = \frac{mv}{B|q|} \Rightarrow R = 0,0375 \text{ m}$$

γ) Η περίοδος της κυκλικής κίνησης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$T = \frac{2\pi m}{B|q|} \Rightarrow T = 5\pi \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

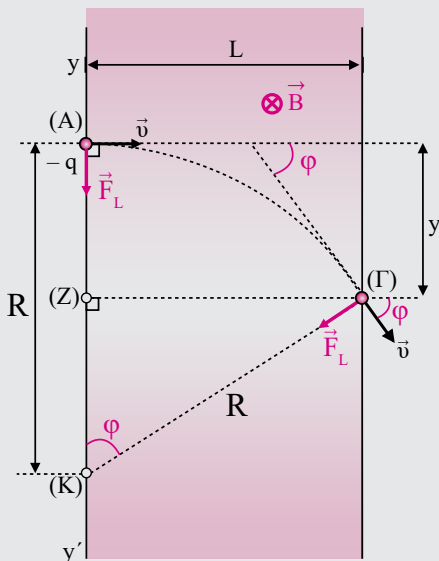
δ) Σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 5\pi s$ το σωματίδιο εκτελεί:

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = 10000 \text{ περιστροφές}$$

ε) Η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο από το μαγνητικό πεδίο είναι συνεχώς κάθετη στην ταχύτητα του επομένως το έργο της είναι ίσο με μηδέν. Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. προκύπτει ότι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι ίση με μηδέν.

Πρόβλημα 70

α)



Η ακτίνα της κυκλικής κίνησης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$R = \frac{mv}{B|q|} \Rightarrow R = 1 \text{ m}$$

Σχεδιάζουμε τη μαγνητική δύναμη Lorentz στο σημείο εισόδου (Α) και στο σημείο εξόδου (Γ). Το σημείο τομής (Κ) των φορέων των δυνάμεων που σχεδιάσαμε είναι το κέντρο (Κ) της κυκλικής τροχιάς.

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΚΖΓ. Ισχύει:

$$(ΚΓ)^2 = (ΚΖ)^2 + (ΖΓ)^2 \Rightarrow R^2 = (ΚΖ)^2 + L^2 \Rightarrow (ΚΖ) = \sqrt{R^2 - L^2} \Rightarrow (ΚΖ) = 0,5 \text{ m}$$

Για την κατακόρυφη απόκλιση ισχύει:

$$y = (AK) - (ZK) = R - (ZK) \Rightarrow y = 0,5 \text{ m}$$

β) Η γωνιακή εκτροπή είναι η γωνία φ που σχηματίζουν οι κατευθύνσεις των ταχυτήτων κατά την είσοδο και την έξοδο από το πεδίο. Από γεωμετρία προκύπτει ότι η γωνία φ είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{v}$ στο σημείο εξόδου (Γ) με την οριζόντια διεύθυνση. Είναι επίσης ίση με την επίκεντρη γωνία που σχηματίζουν οι ακτίνες στα σημεία εισόδου και εξόδου, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Από το τρίγωνο ΚΖΓ ισχύει:

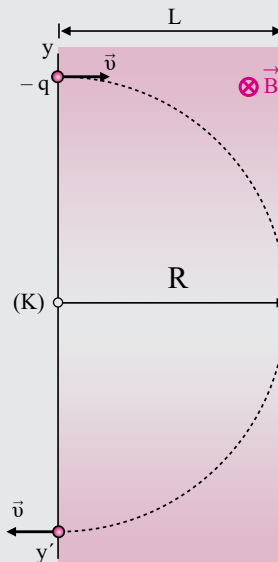
$$\eta\mu\phi = \frac{(ΖΓ)}{(ΚΓ)} = \frac{L}{R} \Rightarrow \eta\mu\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

γ) Για τη χρονική διάρκεια της κίνησης του σωματιδίου μέσα στο μαγνητικό πεδίο, έχουμε:

$$\omega = \frac{\phi}{\Delta t} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\phi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\phi}{2\pi} T \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{\phi}{2\pi} \cdot \frac{2\pi m}{B|q|} \Rightarrow \Delta t = \frac{\phi \cdot m}{B|q|} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{12} \cdot 10^{-1} \text{ s}$$

δ)



Για να εξέλθει το σωματίδιο από το όριο $y'y$ διαγράφοντας ημικύκλιο, θα πρέπει η μέγιστη απόσταση του σωματιδίου από το κέντρο (Κ) της κυκλικής τροχιάς να είναι μικρότερη από το πάχος L.

Έχουμε:

$$R \leq L \Rightarrow \frac{mv}{B|q|} \leq L \Rightarrow v \leq \frac{LB|q|}{m} \Rightarrow$$

$$v_{\max} = \frac{LB|q|}{m} \Rightarrow v_{\max} = 20\sqrt{3} \text{ m/s}$$

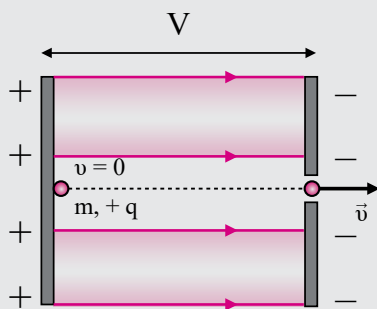
Πρόβλημα 71

α) Το φορτισμένο σωματίδιο επιταχύνεται με τη βοήθεια ηλεκτρικού πεδίου στο οποίο έχουμε εφαρμόσει τη δεδομένη τάση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας για την κίνηση του φορτισμένου σωματιδίου πριν εισέλθει στο μαγνητικό πεδίο, προκύπτει:

$$\Theta.Μ.Κ.Ε.: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{\text{τελ.}} - K_{\text{αρχ.}} = W_{F_{\text{ηλ.}}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} mv_2 = |q|V \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2|q|V}{m}} \Rightarrow v = 10^5 \text{ m/s}$$



β) Την στιγμή που το σωματίδιο εξέρχεται από το μέσο (M) της πλευράς (AZ) έχει διαγράψει ημικύκλιο διαμέτρου (AM) = $\frac{a}{2}$. Άρα η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι $R = a/4$. Επομένως, προκύπτει:

$$R = \frac{mv}{B|q|} \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{mv}{B|q|} \Rightarrow B = \frac{4mv}{a|q|} \Rightarrow B = 1 \text{ T}$$

γ) Το σωματίδιο διαγράφει ημικύκλιο επομένως ο χρόνος παραμονής στο μαγνητικό πεδίο θα είναι:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{2} \frac{2\pi m}{B|q|} \Rightarrow \Delta t = 5\pi \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

δ) Το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου κατά την κίνησή του στο μαγνητικό πεδίο παραμένει σταθερό, το ίδιο επομένως θα ισχύει και για το μέτρο της ορμής. Επομένως, η μεταβολή του μέτρου της ορμής θα είναι ίση με μηδέν.

Πρόβλημα 72

α) Για την περίοδο της κίνησης έχουμε:

$$T = \frac{2\pi m}{B|q|} \Rightarrow T = 5\pi \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

β) Η ταχύτητα αναλύεται σε δύο συνιστώσες μια παράλληλη στη διεύθυνση των μαγνητικών γραμμών:

$$v_{\pi} = v \cdot \sin \varphi$$

Και μια κάθετη στη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών:

$$v_{\kappa} = v \cdot \eta \mu \varphi$$

Προκύπτει:

$$R = \frac{mv_{\kappa}}{B|q|} \Rightarrow R = \frac{mv \cdot \eta \mu \varphi}{B|q|} \Rightarrow v = \frac{B|q|R}{m \cdot \eta \mu \varphi} \Rightarrow$$

$$v = 8 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

γ) Για το βήμα της έλικας έχουμε:

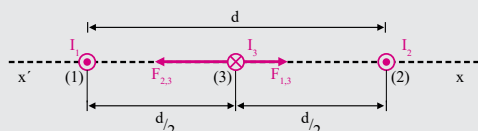
$$\beta = v_{\pi} T \Rightarrow \beta = v \cdot \sin \varphi \cdot T \Rightarrow \beta = 2\pi \cdot \sqrt{3} \text{ m}$$

δ) Ο χρόνος που απαιτείται, ώστε το σωματίδιο να διαγράψει τη συγκεκριμένη τροχιά, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$s = v \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{s}{v} \Rightarrow \Delta t = 4\pi \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

Πρόβλημα 73

α)



Οι αγωγοί (1),(3) διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα, επομένως απωθούνται.

Το μέτρο της δύναμης Laplace $\vec{F}_{1,3}$ ανά μονάδα μήκους που δέχεται ο αγωγός (3) από τον αγωγό (1) θα είναι:

$$\frac{F_{1,3}}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_3}{d} \Rightarrow \frac{F_{1,3}}{l} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}$$

β) Οι αγωγοί (2),(3) διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα, επομένως απωθούνται.

Το μέτρο της δύναμης Laplace $\vec{F}_{2,3}$ ανά μονάδα μήκους που δέχεται ο αγωγός (3) από τον αγωγό (2) θα είναι:

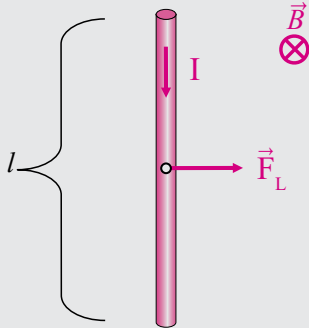
$$\frac{F_{2,3}}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_2 I_3}{d} \Rightarrow \frac{F_{2,3}}{l} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}$$

γ) Το μέτρο της συνολικής δύναμης Laplace ανά μονάδα μήκους που δέχεται ο αγωγός (3) θα είναι:

$$\frac{\Sigma F}{l} = \frac{F_{2,3}}{l} - \frac{F_{1,3}}{l} \Rightarrow \frac{\Sigma F}{l} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}$$

Πρόβλημα 74

α)



Στον αγωγό ασκείται δύναμη Laplace επειδή βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο και διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα, της οποίας η φορά προσδιορίζεται από τον κανόνα των τριών δακτύλων και το μέτρο της είναι:

$$F_L = BIl \sin \varphi \xrightarrow{\varphi = 90^\circ} F_L = 4 \text{ N}$$

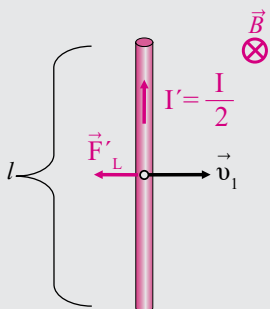
β) Εξαιτίας της δύναμης Laplace, ο αγωγός θα αποκτήσει σταθερή επιτάχυνση, οπότε σύμφωνα με τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα το μέτρο της επιτάχυνσής του θα είναι:

$$\Sigma F = m a_1 \Rightarrow F_L = m a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{F_L}{m} \Rightarrow a_1 = 8 \text{ m/s}^2$$

Ο αγωγός θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, επομένως η ταχύτητά του τη χρονική στιγμή t_1 θα είναι:

$$v_1 = a_1 t_1 \Rightarrow v_1 = 16 \text{ m/s}$$

γ)



Από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά ο αγωγός δέχεται δύναμη υποδιπλασίου μέτρου εφόσον

η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος υποδιπλασιάζεται, αλλά αντίθετης φοράς από την αρχική της κατεύθυνση. Η δύναμη αυτή θα επιβραδύνει τον αγωγό μέχρι να τον σταματήσει στιγμιαία. Η επιβράδυνση, σύμφωνα με τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα θα έχει κι αυτή υποδιπλασίο μέτρο (αφού υποδιπλασιάζεται το μέτρο της δύναμης).

Ο αγωγός θα σταματήσει όταν $v = 0$ οπότε έχουμε:

$$v = v_1 - |a_2| \Delta t \xrightarrow{v=0} 0 = 16 - 4 \Delta t \Rightarrow \Delta t = 4 \text{ s}$$

Ισχύει:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \Rightarrow t_2 = \Delta t + t_1 \Rightarrow t_2 = 6 \text{ s}$$

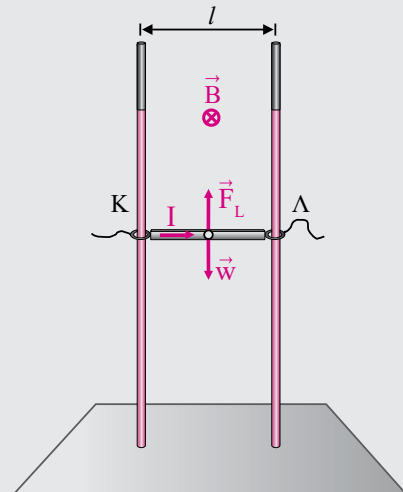
Πρόβλημα 75

α) Εφόσον, ο αγωγός βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές του γραμμές και διαρρέεται από ρεύμα, τότε δέχεται δύναμη Laplace της οποίας το μέτρο θα δίνεται από τη σχέση:

$$F_L = BIl$$

Για να ισορροπεί ο αγωγός θα πρέπει σύμφωνα με τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα να ισχύει:

$$\Sigma F = 0$$



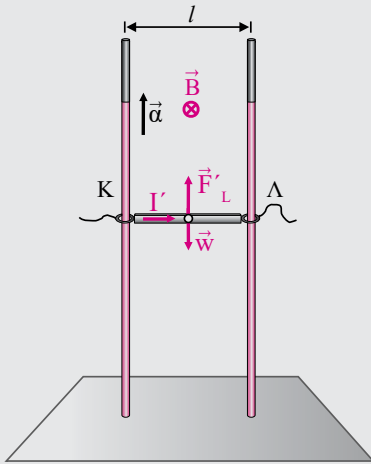
Για συμβεί αυτό θα πρέπει η φορά της δύναμης Laplace να είναι αντίθετη του βάρους και το μέτρο της ίσο με αυτό του βάρους. Με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού

προκύπτει ότι για να έχει η δύναμη Laplace φορά προς τα πάνω (βλέπε σχήμα), θα πρέπει η φορά του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό να είναι από το άκρο του Κ προς το άκρο του Λ.

Προκύπτει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_L = w \Rightarrow BIl = mg \Rightarrow I = \frac{mg}{Bl} \Rightarrow I = 1 \text{ A}$$

β)

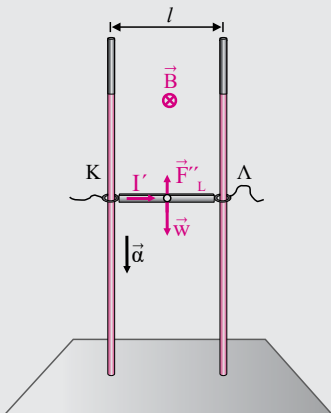


Για να ανεβαίνει ο αγωγός με σταθερή επιτάχυνση προς τα πάνω θα πρέπει πάλι η φορά της δύναμης Laplace να είναι προς τα πάνω άρα και η φορά του ηλεκτρικού ρεύματος όπως και στο α) ερώτημα να'ναι από το άκρο Κ προς το άκρο Λ του αγωγού. Με τη βοήθεια του δευτέρου νόμου του Νεύτωνα, για το μέτρο της δύναμης Laplace ισχύει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F'_L - mg = ma \Rightarrow$$

$$BI'l - mg = ma \Rightarrow I' = \frac{ma + mg}{Bl} \Rightarrow I' = 2 \text{ A}$$

γ)



Για να κατεβαίνει ο αγωγός με σταθερή επιτάχυνση προς τα κάτω, με μέτρο $a' = 5 \text{ m/s}^2 < g$ θα πρέπει πάλι η φορά της δύναμης Laplace να είναι προς τα πάνω άρα και η φορά του ηλεκτρικού ρεύματος όπως και στο α) ερώτημα να'ναι από το άκρο Κ προς το άκρο Λ του αγωγού, ενώ το μέτρο της μικρότερο από αυτό του βάρους.

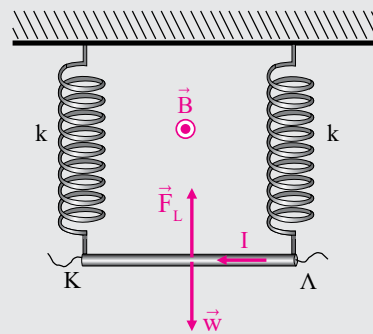
Με τη βοήθεια του δευτέρου νόμου του Νεύτωνα, για το μέτρο της δύναμης Laplace ισχύει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow mg - F'_L = ma' \Rightarrow$$

$$mg - BI'l = ma' \Rightarrow I' = \frac{mg - ma'}{Bl} \Rightarrow I' = 0,5 \text{ A}$$

Πρόβλημα 76

α) Ο αγωγός ισορροπεί με τα ελατήρια να έχουν το φυσικό τους μήκος, οπότε δέχεται μόνο το βάρος του και τη δύναμη Laplace επειδή διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Για να ισορροπεί πρέπει η δύναμη Laplace να είναι αντίρροπη του βάρους του και να έχει μέτρο ίσο με το βάρος του. Με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού προκύπτει ότι για να έχει η δύναμη Laplace φορά αντίθετη του βάρους (βλέπε σχήμα), θα πρέπει η φορά τη φορά των δυναμικών γραμμών του ομογενούς μαγνητικού πεδίου να έχει φορά προς τον αναγνώστη.

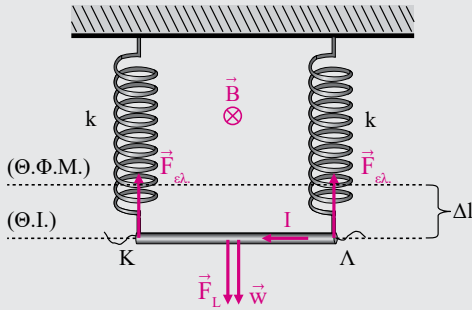


β) Από την ισορροπία του αγωγού προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_L = w \Rightarrow BIl = mg \Rightarrow B = \frac{mg}{Il} \Rightarrow B = 0,5 \text{ T}$$

γ) Αν αντιστρέψουμε τη φορά της έντασης του μαγνητικού πεδίου, η δύναμη Laplace αλλάζει

κατεύθυνση αλλά όχι μέτρο. Έτσι, ο αγωγός θα κινηθεί προς τα κάτω και θα ισορροπήσει σε μια θέση με τα δύο ελατήρια να είναι επιμηκυσμένα.



Στη θέση ισορροπίας του αγωγού ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_L + w = 2F_{ελ} \xrightarrow{F_L = w = mg} 2mg = 2k\Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} \Rightarrow \Delta l = 0,01 \text{ m}$$

Πρόβλημα 77

α) Για την χρονική εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου έχουμε:

$$B = \frac{dB}{dt} t \Rightarrow B = 4t \text{ (S.I.)}$$

Για τη χρονική εξίσωση της μαγνητικής ροής προκύπτει:

$$\Phi = BA \Rightarrow \Phi = 8 \cdot 10^{-3} t \text{ (S.I.)}$$

β) Το μέτρο της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο πλαίσιο υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E_{επ} = N \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| \Rightarrow E_{επ} = NA \left| \frac{dB}{dt} \right| \Rightarrow E_{επ} = 0,8 \text{ V}$$

γ) Από την εφαρμογή του νόμου του Ohm, προκύπτει:

$$I_{επ} = \frac{E_{επ}}{R} \Rightarrow I_{επ} = 0,4 \text{ A}$$

δ) Για το επαγωγικό φορτίο που διακινήθηκε, ισχύει η σχέση:

$$q_{επ} = I_{επ} \cdot \Delta t \Rightarrow q_{επ} = I_{επ} \cdot t_1 \Rightarrow q_{επ} = 0,8 \text{ C}$$

Πρόβλημα 78

α) Υπολογίζουμε το εμβαδό του πλαισίου. Ισχύει:

$$A = \pi a^2 \Rightarrow S = 0,04 \text{ m}^2$$

Για τη χρονική διάρκεια 0 – 2 s, με τη βοήθεια του διαγράμματος, υπολογίζουμε την ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο πλαίσιο.

Έχουμε:

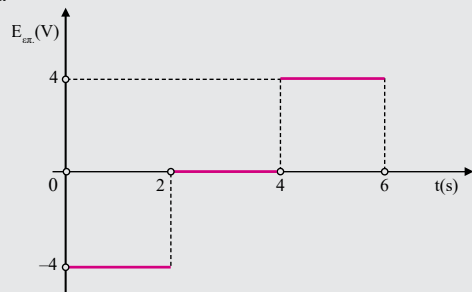
$$E_{επ,1} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow E_{επ,1} = -NA \frac{\Delta B}{\Delta t} \Rightarrow E_{επ,1} = -\left(50 \cdot 0,04 \cdot \frac{4}{2}\right) \text{ V} \Rightarrow E_{επ,1} = -4 \text{ V}$$

Ακολουθούμε όμοια διαδικασία και για τις χρονικές διάρκειες 2s-4s και 4s-6s. Ισχύουν:

$$E_{επ,2} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow E_{επ,2} = -NA \frac{\Delta B}{\Delta t} \Rightarrow E_{επ,2} = 0$$

$$E_{επ,3} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow E_{επ,3} = -NA \frac{\Delta B}{\Delta t} \Rightarrow E_{επ,3} = -\left(-50 \cdot 0,04 \cdot \frac{4}{2}\right) \text{ V} \Rightarrow E_{επ,3} = +4 \text{ V}$$

Το διάγραμμα της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο πλαίσιο σε συνάρτηση με τον χρόνο, είναι το ακόλουθο:



β) Εφαρμόζουμε τον νόμο του Ohm σε κάθε επιμέρους χρονική διάρκεια για να βρούμε την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο. Προκύπτει:

0-2s:

$$I_{επ,1} = \frac{E_{επ,1}}{R} \Rightarrow I_{επ,1} = -2 \text{ A}$$

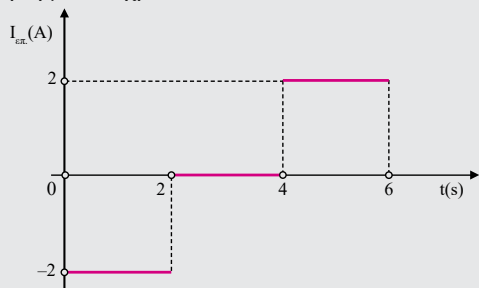
2s-4s:

$$I_{επ,2} = \frac{E_{επ,2}}{R} \Rightarrow I_{επ,2} = 0$$

4s-6s:

$$I_{επ,3} = \frac{E_{επ,3}}{R} \Rightarrow I_{επ,3} = +2 \text{ A}$$

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο σε συνάρτηση με τον χρόνο:



γ) Η θερμότητα που εκλύεται από το πλαίσιο υπολογίζεται με τη βοήθεια του νόμου του Joule. Ισχύει:

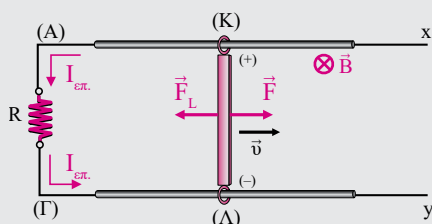
$$Q_{ολ} = I_{επ,1}^2 R \cdot \Delta t + I_{επ,3}^2 R \cdot \Delta t \Rightarrow Q_{ολ} = 32 \text{ J}$$

δ) Το συνολικό επαγωγικό φορτίο που μετατοπίστηκε στο κύκλωμα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} q_{επ,ολ} &= q_{επ,1} + q_{επ,2} + q_{επ,3} \Rightarrow \\ q_{επ,ολ} &= I_{επ,1} \cdot \Delta t_1 + I_{επ,2} \cdot \Delta t_2 + I_{επ,3} \cdot \Delta t_3 \Rightarrow \\ \Rightarrow q_{επ,ολ} &= (-2 \cdot 2 + 0 + 2 \cdot 2)C \Rightarrow q_{επ,ολ} = 0 \end{aligned}$$

Πρόβλημα 79

α)



Επειδή ο αγωγός ΚΛ κινείται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, σε αυτόν επάγεται ηλεκτρεγερτική δύναμη. Ισχύει:

$$E_{επ} = BvL \Rightarrow E_{επ} = 4 \text{ V}$$

Αφού στα άκρα του αγωγού εμφανίζεται τάση, τότε το κλειστό κύκλωμα ΑΚΛΓ διαρρέεται από ρεύμα έντασης:

$$I_{επ} = \frac{E_{επ}}{R} \Rightarrow I_{επ} = 2 \text{ A}$$

β) Επειδή ο αγωγός ΚΛ διαρρέεται από ρεύμα, δέχεται δύναμη Laplace μέτρου:

$$F_L = BI_{επ}L \Rightarrow F_L = 2 \text{ N}$$

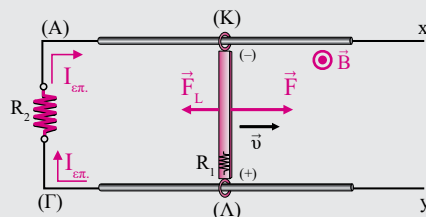
γ) Η φορά του ρεύματος σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz θα πρέπει να αντιτίθεται στο αίτιο που το προκάλεσε. Το ρεύμα το προκάλεσε η κίνηση του αγωγού προς τα δεξιά, άρα η δύναμη Laplace (που οφείλεται με τη σειρά της στο ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό) πρέπει να' ναι προς τ' αριστερά, οπότε με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι η φορά του ρεύματος είναι αυτή που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Για να κινείται ο αγωγός με σταθερή ταχύτητα πρέπει να ασκηθεί σε αυτόν δύναμη F αντίθετη με τη δύναμη Laplace. Προκύπτει:

$$F = F_L \Rightarrow F = 2 \text{ N}$$

Πρόβλημα 80

α)



Ο αρχικά ακίνητος αγωγός αρχίζει να επιταχύνεται εξαιτίας της δύναμης $\vec{F}$. Λόγω της ταχύτητας που αποκτά, αφού βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο, στα άκρα του αναπτύσσεται τάση από επαγωγή:

$$E_{επ} = BvL \quad (1)$$

Η τάση αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα το κλειστό κύκλωμα ΑΚΛΓ να διαρρέεται από ρεύμα (επαγωγικό):

$$I_{επ} = \frac{E_{επ}}{R_{ολ}} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} I_{επ} = \frac{BvL}{R_1 + R_2} \quad (2)$$

Επειδή ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, θα του ασκηθεί δύναμη Laplace μέτρου:

$$F_L = BI_{επ}L \stackrel{(2)}{\Rightarrow} F_L = \frac{B^2 L^2}{R_1 + R_2} v \quad (3)$$

Η φορά του ρεύματος σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz θα πρέπει να αντιτίθεται στο αίτιο που το προκάλεσε. Το ρεύμα το προκάλεσε η κίνηση του αγωγού προς τα δεξιά, άρα η δύναμη Laplace (που οφείλεται με τη σειρά της στο ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό) πρέπει να' ναι προς τα αριστερά, οπότε με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι η φορά του ρεύματος είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα καθώς και την πολικότητα της τάσης στα άκρα του αγωγού.

Ο αγωγός επιταχύνεται, άρα:

$$v \uparrow \Rightarrow E_{επ} \uparrow \Rightarrow I_{επ} \uparrow \Rightarrow F_L \uparrow \Rightarrow \Sigma F \downarrow \Rightarrow a \downarrow$$

Η κίνηση που θα εκτελέσει ο αγωγός είναι ευθύγραμμη μη ομαλά επιταχυνόμενη με συνεχώς μειούμενη επιτάχυνση. Κάποια στιγμή η επιτάχυνση θα γίνει μηδέν όταν και η συνισταμένη δύναμη γίνει μηδέν, οπότε από εκεί και μετά ο αγωγός θα εκτελέσει Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με σταθερή (οριακή) ταχύτητα.

β) Υπολογίζουμε την οριακή ταχύτητα. Ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_L = F \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \frac{B^2 L^2}{R_1 + R_2} v_{op} = F \Rightarrow$$

$$v_{op} = \frac{F(R_1 + R_2)}{B^2 L^2} \Rightarrow v_{op} = 2 \text{ m/s}$$

γ) Η τάση στα άκρα της αντίστασης R_2 αποκτά τη μέγιστη τιμή της όταν η ένταση που τη διαρρέει έχει τη μέγιστη τιμή της. Όμως η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος έχει τη μέγιστη τιμή της όταν ο αγωγός κινείται με την οριακή του ταχύτητα.

Για την τάση στα άκρα της αντίστασης R_2 ισχύει:

$$V_2 = I_{\varepsilon\pi} R_2$$

οπότε η τάση αποκτά το μισό της μέγιστης τιμής όταν και η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος είναι ίση με το μισό της μέγιστης τιμής της. Από τη σχέση (2) υπολογίζουμε τη μέγιστη ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος για $v = v_{op} = 2 \text{ m/s}$. Προκύπτει:

$$I_{\varepsilon\pi(\max)} = \frac{B v_{op} L}{R_1 + R_2} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi(\max)} = 4 \text{ A}$$

Τη χρονική στιγμή t_1 η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος είναι:

$$I_1 = \frac{I_{\varepsilon\pi(\max)}}{2} \Rightarrow I_1 = 2 \text{ A}$$

Για την επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$\alpha = \frac{\Sigma F}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{F - F_L}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{F - B I_1 L}{m} \Rightarrow$$

$$\alpha = 8 \text{ m/s}^2$$

δ) Η τάση στα άκρα του αγωγού ΚΛ είναι ίση με την τάση στα άκρα της αντίστασης R_2 . Έχουμε:

$$V_{\text{ΚΛ}} = V_2 \Rightarrow V_{\text{ΚΛ}} = I_1 R_2 \Rightarrow V_{\text{ΚΛ}} = 1,6 \text{ V}$$

Πρόβλημα 81

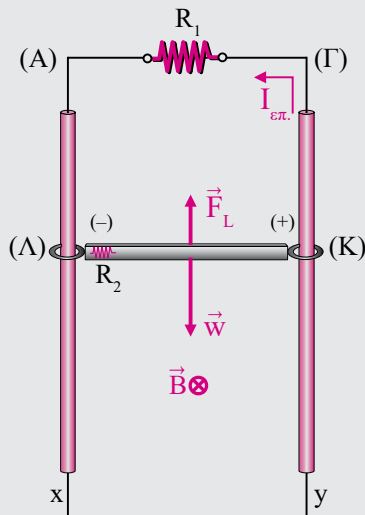
α) Όταν αφήσουμε τη ράβδο ελεύθερη αυτή αρχίζει να κινείται προς τα κάτω επιταχυνόμενη λόγω της δύναμης του βάρους. Λόγω της κίνησής της (αφού αποκτά ταχύτητα), καθώς βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, αναπτύσσεται στα άκρα της τάση από επαγωγή που θα δίνεται από τη σχέση:

$$E_{\varepsilon\pi} = B v l \quad (1)$$

Η τάση αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα το κύκλωμα να διαρρέεται από ρεύμα (επαγωγικό),

η ένταση του οποίου δίνεται από τη σχέση:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{\text{ολ.}}} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} I_{\varepsilon\pi} = \frac{B v l}{R_1 + R_2} \quad (2)$$



Επειδή ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο θα του ασκηθεί δύναμη Laplace μέτρου:

$$F_L = B I_{\varepsilon\pi} l \stackrel{(2)}{\Rightarrow} F_L = \frac{B^2 l^2}{R_1 + R_2} v \quad (3)$$

Η φορά του ρεύματος σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz θα πρέπει να αντιτίθεται στο αίτιο που το προκάλεσε. Το ρεύμα το προκάλεσε η κίνηση του αγωγού προς τα κάτω, άρα η δύναμη Laplace (που οφείλεται με τη σειρά της στο ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό) πρέπει να είναι προς τα πάνω οπότε με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι η φορά του ρεύματος είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

Ο αγωγός επιταχύνεται επομένως:

$$v \uparrow \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} \uparrow \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} \uparrow \Rightarrow F_L \uparrow \Rightarrow \Sigma F \downarrow \Rightarrow a \downarrow$$

Η κίνηση που θα εκτελέσει ο αγωγός είναι ευθύγραμμη μη ομαλά επιταχυνόμενη με συνεχώς μειούμενη επιτάχυνση. Κάποια στιγμή η επιτάχυνση θα γίνει μηδέν όταν και η συνισταμένη δύναμη γίνει μηδέν, οπότε από εκεί και μετά ο αγωγός θα εκτελέσει Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με σταθερή (οριακή) ταχύτητα.

β) Η ράβδος ΚΛ θα αποκτήσει οριακή (σταθερή) ταχύτητα όταν $\Sigma F_y = 0$.

Για την οριακή ταχύτητα προκύπτει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_L = mg \Rightarrow \frac{B^2 l^2}{R_1 + R_2} v_{op} = mg \Rightarrow v_{op} = \frac{mg(R_1 + R_2)}{B^2 l^2} \Rightarrow v_{op} = 6 \text{ m/s}$$

γ) Τη χρονική στιγμή t_1 ο αγωγός έχει ταχύτητα: $v_1 = \frac{v_{op}}{2} \Rightarrow v_1 = 3 \text{ m/s}$.

Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι ίσος με την επιτάχυνση του αγωγού. Έχουμε:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{mg - F_L}{m} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{F_L}{m} \quad (4)$$

Τη χρονική στιγμή t_1 η δύναμη Laplace έχει μέτρο που υπολογίζεται από τη σχέση (3). Ισχύει:

$$F_L = \frac{B^2 l^2}{R_1 + R_2} v_1 \Rightarrow F_L = 1 \text{ N}$$

Από τη σχέση (4) τελικά προκύπτει:

$$\frac{dv}{dt} = 5 \text{ m/s}^2$$

ε) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του αγωγού είναι ίσος με τη συνισταμένη δύναμη που του ασκείται. Έχουμε:

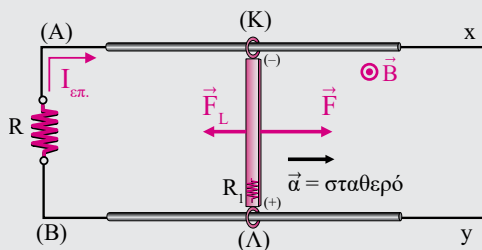
$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = mg - F_L \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

στ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του αγωγού του είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v_1 = (mg - F_L) \cdot v_1 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 3 \text{ J/s}$$

Πρόβλημα 82

α)



Λόγω της δύναμης $\vec{F}$ ο αγωγός αρχίζει να κινείται προς τα δεξιά επιταχυνόμενος με σταθερή επιτάχυνση. Λόγω της κίνησης του αγωγού, αφού βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, αναπτύσσεται στα άκρα του τάση από επαγωγή της οποίας το μέτρο θα δίνεται από τη σχέση:

$$E_{\epsilon\pi} = Bvl \stackrel{v=at}{\Rightarrow} E_{\epsilon\pi} = Bal \cdot t \Rightarrow E_{\epsilon\pi} = 2t \text{ (S.I.)}$$

και με πολικότητα που φαίνεται στο σχήμα.

Η τάση αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα το κύκλωμα να διαρρέεται από ρεύμα (επαγωγικό) φοράς που φαίνεται στο σχήμα και μέτρον:

$$I_{\epsilon\pi} = \frac{E_{\epsilon\pi}}{R_{\text{ολ}}} \Rightarrow I_{\epsilon\pi} = \frac{E_{\epsilon\pi}}{R + R_1} \Rightarrow I_{\epsilon\pi} = 0,4 \cdot t \text{ (S.I.)} \quad (1)$$

β) Επειδή ο αγωγός θα διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, θα του ασκηθεί δύναμη Laplace της οποίας η φορά φαίνεται στο σχήμα (σύμφωνα με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού) και μέτρον:

$$F_L = BI_{\epsilon\pi} l \stackrel{(1)}{\Rightarrow} F_L = 0,2 \cdot t \text{ (S.I.)} \quad (2)$$

γ) Επειδή ο αγωγός κινείται με σταθερή επιτάχυνση και η δύναμη Laplace είναι χρονικά μεταβαλλόμενη, τότε και η εξωτερική δύναμη $\vec{F}$ θα είναι και αυτή χρονικά μεταβαλλόμενη. Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα. Έχουμε:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F - F_L = ma \Rightarrow F = F_L + ma \Rightarrow$$

$$F = 4 + 0,2 \cdot t \text{ (S.I.)} \quad (3)$$

Άρα η εξωτερική δύναμη F την χρονική στιγμή $t = 5 \text{ s}$ είναι: $F = 5 \text{ N}$

δ) Τη χρονική στιγμή t_1 η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι:

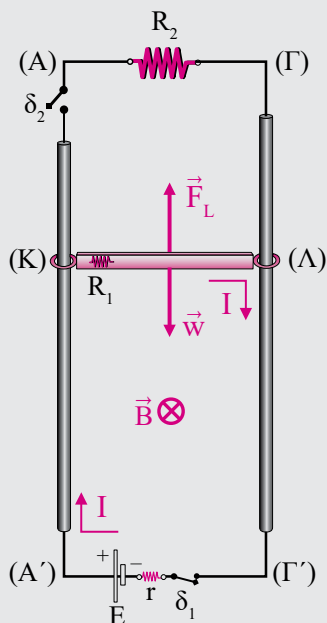
$$I_{\epsilon\pi} = 0,4 \cdot t_1 \Rightarrow I_{\epsilon\pi} = 2 \text{ A}$$

Η τάση στα άκρα του αγωγού ΚΛ είναι ίση με την τάση στα άκρα της αντίστασης R . Άρα ισχύει:

$$V_{\text{ΚΛ}} = I_{\epsilon\pi} R \Rightarrow V_{\text{ΚΛ}} = 2 \text{ V}$$

Πρόβλημα 83

α)



Όταν ο διακόπτης δ_1 είναι κλειστός, ο αγωγός αρχικά διαρρέεται από το ρεύμα που οφείλεται στην ηλεκτρική πηγή.

Εφαρμόζοντας τον Νόμο του Ohm, για κλειστό κύκλωμα, προκύπτει :

$$I = \frac{E}{R_1 + r} \Rightarrow I = 4 \text{ A}$$

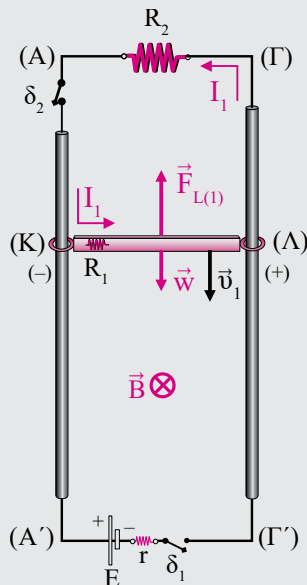
Εκτός από το βάρος του, ο αγωγός ΚΛ επειδή βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές του γραμμές και διαρρέεται από ρεύμα, θα δέχεται και δύναμη Laplace της οποίας η φορά, σύμφωνα με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού, είναι προς τα πάνω. Αφού ο αγωγός ΚΛ ισορροπεί, θα πρέπει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_L = mg \Rightarrow BIL = mg \Rightarrow B = \frac{mg}{IL} \Rightarrow B = 1 \text{ T}$$

β) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ που ανοίγουμε τον διακόπτη δ_1 , ο αγωγός ΚΛ εκτελεί ελεύθερη πτώση. (Στα άκρα του εμφανίζεται τάση από επαγωγή αλλά επειδή δεν έχουμε κανένα κλειστό κύκλωμα ο αγωγός δεν διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα).

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 9 \text{ s}$ που κλείνουμε το διακόπτη δ_2 , η ταχύτητα που θα έχει αποκτήσει ο αγωγός είναι:

$$v_1 = gt_1 \Rightarrow v_1 = 90 \text{ m/s}$$



Η τάση από επαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα του αγωγού τη χρονική στιγμή t_1 θα είναι:

$$E_{\text{επ.}(1)} = Bv_1 L \Rightarrow E_{\text{επ.}(1)} = 45 \text{ V}$$

με πολικότητα όπως στο σχήμα.

Για την ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό, έχουμε:

$$I_1 = \frac{E_{\text{επ.}(1)}}{R_1 + R_2} \Rightarrow I_1 = 5 \text{ A}$$

Ο αγωγός ΚΛ διαρρέεται από ρεύμα, επομένως θα δέχεται δύναμη Laplace της οποίας η φορά φαίνεται στο σχήμα. Η τιμή της είναι:

$$F_{L(1)} = BI_1 L \Rightarrow F_{L(1)} = 2,5 \text{ N}$$

Η επιτάχυνση αγωγού ΚΛ, αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη δ_2 , είναι:

$$a = \Sigma F/m = \frac{mg - F_{L(1)}}{m} \Rightarrow a = -2,5 \text{ m/s}^2$$

γ) Τη χρονική στιγμή t_1 παρατηρούμε ότι $F_{L(1)} > mg$, άρα ο αγωγός αρχίζει να επιβραδύνεται.

$$v \Downarrow E_{\text{επ.}} \Downarrow I_{\text{επ.}} \Downarrow F_L \Downarrow |\Sigma F| \Downarrow |a| \Downarrow$$

Η κίνηση που θα εκτελέσει ο αγωγός είναι ευθύγραμμη επιβραδυνόμενη με συνεχώς μειού-

μενο μέτρο επιτάχυνσης (επιβράδυνσης). Κάποια στιγμή η επιτάχυνση θα γίνει μηδέν (όταν $\Sigma F = 0$) οπότε από κει και μετά ο αγωγός θα εκτελέσει Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με την οριακή του ταχύτητα.

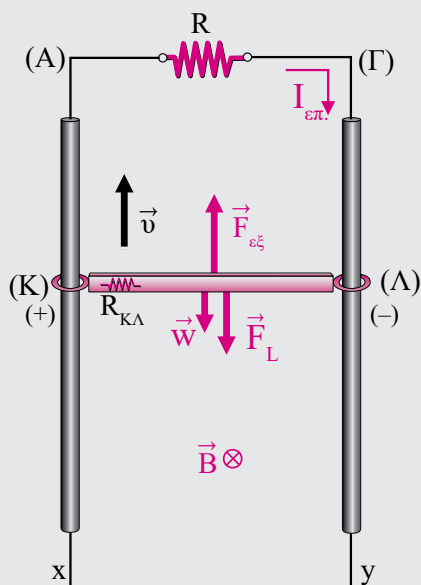
δ) Υπολογίζουμε την οριακή ταχύτητα του αγωγού. Προκύπτει:

$$\begin{aligned}\Sigma F_y = 0 &\Rightarrow F_L = mg \Rightarrow BI_{\varepsilon\pi} L = mg \Rightarrow \\ B \frac{Bv_{op} L}{R_1 + R_2} L &= mg \Rightarrow \\ \frac{B^2 L^2}{R_1 + R_2} v_{op} &= mg \Rightarrow v_{op} = \frac{mg(R_1 + R_2)}{B^2 L^2} \Rightarrow \\ v_{op} &= 72 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Πρόβλημα 84

α) Η ΗΕΔ από επαγωγή δημιουργείται λόγω της κίνησης του αγωγού στο μαγνητικό πεδίο. Η δύναμη Lorentz ωθεί τα ηλεκτρόνια του αγωγού προς το άκρο Λ, επομένως εκεί δημιουργείται ο αρνητικός πόλος ενώ στο Κ ο θετικός.

Σχεδιάζουμε την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα και με τη βοήθεια των 3 δαχτύλων του δεξιού χεριού καθορίζουμε και την κατεύθυνση της δύναμης Laplace.



Εφαρμόζουμε τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα. Ισχύει:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R + R_{K\Lambda}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{Bv_l}{R + R_{K\Lambda}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = 4 \text{ A}$$

β) Για το μέτρο της δύναμης Laplace έχουμε:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi} L \Rightarrow F_L = 4 \text{ N}$$

γ) Για το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής έχουμε:

$$\begin{aligned}\left| \frac{dp}{dt} \right| &= |\Sigma F| \Rightarrow \left| \frac{dp}{dt} \right| = F_{L,1} + w \Rightarrow \left| \frac{dp}{dt} \right| = 0,5 \text{ w} + w \\ \Rightarrow \left| \frac{dp}{dt} \right| &= 1,5 \text{ w} \Rightarrow \left| \frac{dp}{dt} \right| = 1,5mg \Rightarrow \left| \frac{dp}{dt} \right| = 3 \text{ kg m/s}^2\end{aligned}$$

δ) Υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας του αγωγού τη χρονική στιγμή t_1 . Ισχύει:

$$\begin{aligned}F_L = \frac{mg}{2} \Rightarrow \frac{B^2 v_1 l^2}{R + R_{K\Lambda}} &= \frac{mg}{2} \Rightarrow v_1 = \frac{(R + R_{K\Lambda})mg}{2B^2 l^2} \Rightarrow \\ v_1 &= 2 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_1 την ένταση του επαγωγικού ρεύματος. Έχουμε:

$$I_{\varepsilon\pi,1} = \frac{E_{\varepsilon\pi,1}}{R + R_{K\Lambda}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi,1} = \frac{Bv_1 l}{R + R_{K\Lambda}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi,1} = 1 \text{ A}$$

Η τάση στα άκρα του αγωγού τη χρονική στιγμή t_1 θα είναι:

$$V_{K\Lambda} = I_{\varepsilon\pi,1} R_1 \Rightarrow V_{K\Lambda} = 1 \text{ V}$$

ε) Η ηλεκτρική ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση του αγωγού υπολογίζεται από τον τύπο:

$$P_{\eta\lambda} = I_{\varepsilon\pi,1}^2 R_{K\Lambda} \Rightarrow P_{\eta\lambda} = 1 \text{ W}$$

Πρόβλημα 85

α) Από την εφαρμογή του νόμου του Ohm έχουμε:

$$I_{\varepsilon\pi,0} = \frac{E_{\varepsilon\pi,0}}{R_{\Lambda} + R_{K\Lambda}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi,0} = \frac{Bv_0 l}{R + R_{K\Lambda}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi,0} = 1 \text{ A}$$

Για το μέτρο της δύναμης Laplace έχουμε:

$$F_{L,0} = BI_{\varepsilon\pi,0} l \Rightarrow F_{L,0} = 1 \text{ N}$$

β) Για το μέτρο της επιτάχυνσης προκύπτει:

$$\begin{aligned}\Sigma F = ma_0 \Rightarrow a_0 &= \frac{\Sigma F}{m} \Rightarrow a_0 = \frac{mg - F_{L,0}}{m} \Rightarrow \\ a_0 &= 5 \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

γ) Ο λαμπτήρας λειτουργεί κανονικά όταν ο αγωγός έχει αποκτήσει την οριακή του ταχύτητα. Προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow mg = \frac{B^2 v_{op}^2 l}{R_\Lambda + R_{K\Lambda}} \Rightarrow$$

$$v_{op} = \frac{(R + R_{K\Lambda})mg}{B^2 l^2} \Rightarrow v_{op} = 1 \text{ m/s}$$

δ) Για το ρεύμα κανονικής λειτουργίας ισχύει:

$$I_k = \frac{E_{επ}}{R_\Lambda + R_{K\Lambda}} \Rightarrow I_k = \frac{B v_{op} l}{R_\Lambda + R_{K\Lambda}} \Rightarrow I_k = 2 \text{ A}$$

Για την τάση κανονικής λειτουργίας ισχύει:

$$V_k = I_k R_\Lambda \Rightarrow V_k = 0,4 \text{ V}$$

Για την ισχύ κανονικής λειτουργίας ισχύει:

$$P_k = V_k I_k \Rightarrow P_k = 0,8 \text{ W}$$

Πρόβλημα 86

α) Το μαγνητικό πεδίο ασκεί δύναμη Lorentz στα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού (ΑΓ) που κινούνται μαζί με αυτόν, με αποτέλεσμα να συσσωρεύεται θετικό φορτίο στο (Α) (έλλειμμα ηλεκτρονίων) και αρνητικό στο (Γ) (πλεόνασμα ηλεκτρονίων).

β) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του αγωγού είναι:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 20 \text{ rad/s}$$

γ) Η Η.Ε.Δ από επαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα του αγωγού υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E_{επ} = \frac{1}{2} B \omega L^2 \Rightarrow E_{επ} = 0,05 \text{ V}$$

Πρόβλημα 87

α) Συγκρίνουμε την εξίσωση της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος:

$$i = 0,2\sqrt{2} \cdot \eta\mu 50\pi t \quad (\text{S.I.})$$

με τη γενική μορφή:

$$i = I\eta\mu\omega t \quad (\text{S.I.})$$

Προκύπτει ότι το πλάτος της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι:

$$I = 0,2\sqrt{2} \text{ A}$$

Η γωνιακή συχνότητα είναι:

$$\omega = 50\pi \text{ rad/s}$$

Η περίοδος της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 0,04 \text{ s}$$

Η χρονική διάρκεια μεταξύ δύο διαδοχικών μεγιστοποιήσεων του μέτρου της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = 0,02 \text{ s}$$

β) Το αμπερόμετρο μετράει την ενεργό τιμή της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος. Θα ισχύει:

$$I_{εν} = \frac{I}{\sqrt{2}} \Rightarrow I_{εν} = 0,2 \text{ A}$$

γ) Με τη βοήθεια του νόμου του Ohm υπολογίζουμε την στιγμιαία τιμή της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος. Ισχύει:

$$i_1 = \frac{V_1}{R} \Rightarrow i_1 = 0,2 \text{ A}$$

Η τιμή της ισχύος, τη χρονική στιγμή t_1 , υπολογίζεται από τον τύπο:

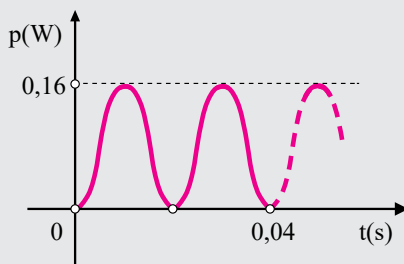
$$p_1 = v_1 i_1 \Rightarrow p_1 = 0,08 \text{ W}$$

δ) Η χρονική εξίσωση της ισχύος είναι:

$$p = vi \Rightarrow p = V\eta\mu\omega t \cdot I\eta\mu\omega t \Rightarrow p = VI\eta\mu^2\omega t \Rightarrow$$

$$p = I^2 R \eta\mu^2\omega t \Rightarrow p = 0,16\eta\mu^2 50\pi t \quad (\text{S.I.})$$

Το διάγραμμα της στιγμιαίας ισχύος, σε συνάρτηση με τον χρόνο, είναι το εξής:



Πρόβλημα 88

α) Συγκρίνουμε την εξίσωση της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος:

$$i = 0,8 \cdot \eta\mu 20t \quad (\text{S.I.})$$

με τη γενική μορφή:

$$i = I\eta\mu\omega t \quad (\text{S.I.})$$

Προκύπτει ότι το πλάτος της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι:

$$I = 0,8 \text{ A}$$

Η γωνιακή συχνότητα είναι:

$$\omega = 20 \text{ rad/s}$$

Η περίοδος της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 0,1\pi \text{ s}$$

Η χρονική διάρκεια μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = 0,05\pi \text{ s}$$

β) Συγκρίνουμε την εξίσωση της εναλλασσόμενης τάσης:

$$v = 1,6 \cdot \eta\mu 20t (\text{S.I.}) (\text{S.I.})$$

με τη γενική μορφή:

$$v = V\eta\mu\omega t$$

Προκύπτει ότι το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης είναι:

$$V = 1,6 \text{ V}$$

Με τη βοήθεια του νόμου του Ohm έχουμε:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow R = 2 \Omega$$

γ) Η χρονική εξίσωση της ισχύος είναι:

$$p = vi \Rightarrow p = V\eta\mu\omega t \cdot I\eta\mu\omega t \Rightarrow p = VI\eta\mu^2\omega t \Rightarrow$$

$$p = I^2 R\eta\mu^2\omega t \Rightarrow p = 1,28\eta\mu^2 20t (\text{S.I.}) (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της ισχύος είναι:

$$p_{\max} = 1,28 \text{ W}$$

δ) Έχουμε:

$$i_1 = I\eta\mu\omega t_1 \Rightarrow 0,4 = 0,8\eta\mu 20t_1 \Rightarrow \eta\mu 20t_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \eta\mu 20t_1 = \eta\mu \frac{\pi}{6} \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) προκύπτουν οι λύσεις:

$$20t_1 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}}{20} \quad (3)$$

Θέτοντας στην (3) $\kappa = 0$, προκύπτει:

$$t_1 = \frac{\pi}{120} \text{ s}$$

Από τη σχέση (2) προκύπτουν επίσης οι λύσεις:

$$20t_1 = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow 20t_1 = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow$$

$$t_1 = \frac{2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}}{20} \quad (5)$$

Θέτοντας στην (5) $\kappa = 0$, προκύπτει:

$$t_1 = \frac{5\pi}{120} \text{ s}$$

Επομένως, προκύπτει ότι η ένταση του εναλλασσόμενου ρεύματος παίρνει την τιμή $i_1 = +0,4 \text{ A}$ για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή

$$t_1 = \frac{\pi}{120} \text{ s}.$$

Πρόβλημα 89

α) Υπολογίζουμε αρχικά την περίοδο της εναλλασσόμενης τάσης. Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι:

$$T = 0,04 \text{ s}$$

Η χρονική διάρκεια μεταξύ δύο διαδοχικών μεγιστοποιήσεων της εναλλασσόμενης τάσης είναι:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = 0,02 \text{ s}$$

β) Η χρονική εξίσωση της ισχύος είναι:

$$p = vi \Rightarrow p = V\eta\mu\omega t \cdot I\eta\mu\omega t \Rightarrow p = VI\eta\mu^2\omega t$$

$$\Rightarrow p = I^2 R\eta\mu^2\omega t$$

Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή της ισχύος είναι:

$$p_{\max} = 0,16 \text{ W}$$

Επομένως, προκύπτει:

$$I^2 R = p_{\max} \Rightarrow R = \frac{p_{\max}}{I^2} \Rightarrow R = 0,04 \Omega$$

γ) Το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης μπορεί να υπολογιστεί από τον νόμο του Ohm. Ισχύει:

$$V = IR \Rightarrow V = 0,08 \text{ V}$$

Η γωνιακή συχνότητα της εναλλασσόμενης τάσης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 50\pi \text{ rad/s}$$

Η χρονική εξίσωση της εναλλασσόμενης τάσης είναι η:

$$v = V\eta\mu\omega t \Rightarrow v = 0,08\eta\mu 50\pi t (\text{S.I.})$$

δ) Έχουμε:

$$v = V\eta\mu\omega t \Rightarrow \pm \frac{V}{\sqrt{2}} = V\eta\mu\omega t \Rightarrow \eta\mu\omega t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \eta\mu\omega t = \eta\mu \frac{\pi}{4} \quad (1) \text{ και } \eta\mu\omega t = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad (2)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτουν οι λύσεις:

$$\omega t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$t = \left(\kappa + \frac{1}{8}\right)T \quad (3)$$

Θέτοντας στην (3) $\kappa = 0$, προκύπτει:

$$t = \frac{T}{8}$$

Από τη σχέση (1) προκύπτουν επίσης οι λύσεις:

$$\omega t = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$$

$$t = \left(\kappa + \frac{3}{8}\right)T \quad (4)$$

Θέτοντας στην (4) $\kappa = 0$, προκύπτει:

$$t = \frac{3T}{8}$$

Από τη σχέση (2) προκύπτουν οι λύσεις:

$$\omega t = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$t = \left(\kappa - \frac{1}{8} \right) T \quad (5)$$

Θέτοντας στην (5) $\kappa = 1$, προκύπτει:

$$t = \frac{7T}{8}$$

Από τη σχέση (2) προκύπτουν επίσης οι λύσεις:

$$\omega t = 2\kappa\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} \Rightarrow$$

$$t = \left(\kappa + \frac{5}{8} \right) T \quad (6)$$

Θέτοντας στην (6) $\kappa = 0$, προκύπτει:

$$t = \frac{5T}{8}$$

Τελικά προκύπτει ότι η χρονική στιγμή που η εναλλασσόμενη τάση έχει μέτρο ίσο με την ενεργό τιμή της για τρίτη φορά είναι η:

$$t = \frac{5T}{8} \Rightarrow t = \mathbf{0,025 \text{ s}}$$

Πρόβλημα 90

α) Τα στοιχεία κανονικής λειτουργίας της συσκευής είναι:

$$P_{\kappa} = 100 \text{ W}, V_{\kappa} = 50 \text{ V}$$

Για την αντίσταση της συσκευής ισχύει:

$$R_{\Sigma} = \frac{V_{\kappa}^2}{P_{\kappa}} \Rightarrow \mathbf{R_{\Sigma} = 25 \Omega}$$

β) Υπολογίζουμε την τάση τη χρονική στιγμή t_1 :

$$v_1 = 50\sqrt{2} \cdot \eta \mu 40\pi t_1 \Rightarrow v_1 = \left(50\sqrt{2} \cdot \eta \mu \frac{40\pi}{160} \right) V \\ \Rightarrow v_1 = 50 \text{ V}$$

Εφαρμόζουμε τον νόμο του Ohm για να υπολογίσουμε την ένταση του ρεύματος τη χρονική στιγμή t_1 . Ισχύει:

$$i_1 = \frac{v_1}{R_{\Sigma}} \Rightarrow \mathbf{i_1 = 2 \text{ A}}$$

γ) Υπολογίζουμε την ισχύ που καταναλώνεται τη χρονική στιγμή t_1 . Προκύπτει:

$$p_1 = v_1 i_1 \Rightarrow \mathbf{p_1 = 100 \text{ W}}$$

δ) Υπολογίζουμε την ενεργό τιμή της εναλλασσόμενης τάσης. Έχουμε:

$$V_{ev} = \frac{V}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_{ev} = 50 \text{ V}$$

Η μέση ισχύς που καταναλώνει η συσκευή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\bar{P} = \frac{V_{ev}^2}{R_{\Sigma}} \Rightarrow \mathbf{\bar{P} = 100 \text{ W}}$$

ε) Επειδή $V_{ev} = V_{\kappa}$ προκύπτει ότι η συσκευή λειτουργεί κανονικά.

Πρόβλημα 91

α) Τα στοιχεία κανονικής λειτουργίας της συσκευής είναι:

$$P_{\kappa} = 80 \text{ W}, V_{\kappa} = 20 \text{ V}$$

Για την αντίσταση της συσκευής ισχύει:

$$R_{\Sigma} = \frac{V_{\kappa}^2}{P_{\kappa}} \Rightarrow R_{\Sigma} = 5 \Omega$$

Η θερμική συσκευή λειτουργεί κανονικά. Επομένως για την ενεργό τιμή της έντασης του ρεύματος προκύπτει:

$$I_{ev} = I_{\kappa} \Rightarrow I_{ev} = \frac{P_{\kappa}}{V_{\kappa}} \Rightarrow \mathbf{I_{ev} = 4 \text{ A}}$$

β) Για το πλάτος της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος ισχύει:

$$I_{ev} = \frac{I}{\sqrt{2}} \Rightarrow I = \sqrt{2} \cdot I_{ev} \Rightarrow \mathbf{I = 4\sqrt{2} \text{ A}}$$

Για το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης ισχύει:

$$V = I(R_{\kappa} + R_{\Sigma}) \Rightarrow V = 40\sqrt{2} \text{ V}$$

Τελικά, για το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου προκύπτει:

$$V = N\omega BA \Rightarrow B = \frac{V}{N\omega A} \Rightarrow \mathbf{B = 1 \text{ T}}$$

γ) Η περίοδος του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 0,2 \text{ s}$$

Για τη θερμότητα που εκλύεται έχουμε:

$$Q = I_{ev}^2 R_{\kappa} \cdot 10T \Rightarrow \mathbf{Q = 160 \text{ J}}$$

δ) Για τη χρονική εξίσωση της μαγνητικής ροής που διέρχεται από μια σπείρα του πλαισίου ισχύει:

$$\Phi = BA \cdot \sin \omega t \Rightarrow \mathbf{\Phi = \frac{0,01\sqrt{2}}{\pi} \cdot \sin 10\pi t \text{ (S.I.)}}$$

ε) Η χρονική εξίσωση της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι:

$$i = I \cdot \eta \mu \omega t \Rightarrow i = 4\sqrt{2} \cdot \eta \mu 10\pi t \text{ (S.I.)}$$

Η χρονική εξίσωση της επαγόμενης τάσης στο πλαίσιο είναι:

$$E_{\epsilon\pi} = N\omega BA \cdot \eta \mu \omega t \Rightarrow \mathbf{E_{\epsilon\pi} = 40\sqrt{2} \cdot \eta \mu 10\pi t \text{ (S.I.)}}$$

Πρόβλημα 92

α) Συγκρίνουμε την εξίσωση της εναλλασσόμενης τάσης:

$$v = 200 \cdot \eta \mu 10\pi t \text{ (S.I.)}$$

με τη γενική μορφή:

$$v = V \eta \mu \omega t \text{ (S.I.)}$$

Προκύπτει ότι το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης είναι:

$$V = 200 \text{ V}$$

Από την εφαρμογή του νόμου του Ohm, υπολογίζουμε το πλάτος της έντασης του ρεύματος:

$$I = \frac{V}{R} \Rightarrow I = 10 \text{ A}$$

β) Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$I_{\text{ev}} = \frac{I}{\sqrt{2}} \Rightarrow I_{\text{ev}} = 5\sqrt{2} \text{ A}$$

Η θερμότητα που εκλύεται από τον αντιστάτη υπολογίζεται από τον τύπο:

$$Q = I_{\text{ev}}^2 R \cdot \Delta t \Rightarrow Q = 10000 \text{ J}$$

γ) Η εναλλασσόμενη τάση τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{1}{40} \text{ s}$ είναι:

$$v_1 = 200 \cdot \eta\mu 10\pi t_1 \Rightarrow v_1 = \left(200 \cdot \eta\mu \frac{10\pi}{40}\right) \text{ V} \Rightarrow v_1 = 100\sqrt{2} \text{ V}$$

Εφαρμόζουμε τον νόμο του Ohm για να υπολογίσουμε την ένταση του ρεύματος τη χρονική στιγμή t_1 . Προκύπτει:

$$i_1 = \frac{v_1}{R} \Rightarrow i_1 = 5\sqrt{2} \text{ A}$$

Η ισχύς που καταναλώνει ο αντιστάτης τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$p_1 = v_1 i_1 \Rightarrow p_1 = 1000 \text{ W}$$

δ) Η μέση ισχύς που καταναλώνει ο αντιστάτης είναι:

$$\bar{P} = I_{\text{ev}}^2 R \Rightarrow \bar{P} = 1000 \text{ W}$$

Πρόβλημα 93

α) Για την περίοδο της εναλλασσόμενης τάσης, από το διάγραμμα, προκύπτει:

$$\frac{T}{4} = 5 \text{ ms} \Rightarrow T = 20 \text{ ms}$$

β) Επίσης από το διάγραμμα προκύπτει ότι το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης είναι $V = 20 \text{ V}$. Για την ενεργό τιμή της εναλλασσόμενης τάσης έχουμε:

$$V_{\text{ev}} = \frac{V}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_{\text{ev}} = 10\sqrt{2} \text{ V}$$

γ) Η γωνιακή συχνότητα είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 100\pi \text{ rad/s}$$

Από την εφαρμογή του νόμου του Ohm, υπολογίζουμε το πλάτος της έντασης του ρεύματος:

$$I = \frac{V}{R} \Rightarrow I = 5 \text{ A}$$

Η χρονική εξίσωση της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος θα έχει τη μορφή:

$$i = I\eta\mu\omega t \Rightarrow i = 5\eta\mu 100\pi t \text{ (S.I.)}$$

δ) Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος υπολογίζεται από τον τύπο:

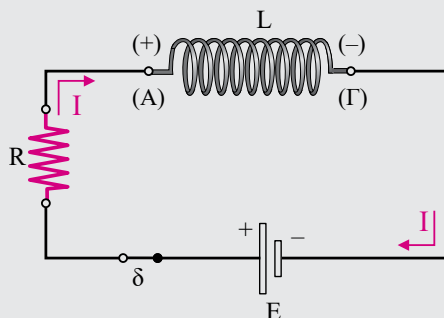
$$I_{\text{ev}} = \frac{I}{\sqrt{2}} \Rightarrow I_{\text{ev}} = 2,5\sqrt{2} \text{ A}$$

ε) Η θερμότητα που εκλύεται από τον αντιστάτη σε χρόνο ίσο με 5 περιόδους είναι:

$$Q = I_{\text{ev}}^2 R \cdot 5T \Rightarrow Q = 5 \text{ J}$$

Πρόβλημα 94

α) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ που κλείνουμε το διακόπτη δ, η ένταση του ρεύματος αυξάνεται βαθμιαία ξεκινώντας απ' την τιμή μηδέν και τελικά σταθεροποιείται στην τιμή I_0 . Αυτό γίνεται λόγω του ότι στα άκρα του πηνίου εμφανίζεται Η.Ε.Δ. από αυτεπαγωγή ($E_{\text{αυτ.}}$). Η πολικότητα της $E_{\text{αυτ.}}$ είναι τέτοια ώστε να αντιτίθεται στο αίτιο που την προκάλεσε που είναι η αύξηση του ρεύματος όταν κλείσαμε το διακόπτη δ. Δηλαδή το ρεύμα που τείνει να δημιουργηθεί λόγω αυτής της τάσης, πρέπει να έχει αντίθετη φορά από αυτό που δημιουργεί η πηγή. Έτσι η πολικότητα της ηλεκτρεγερτικής δύναμης από αυτεπαγωγή στο πηνίο θα είναι αυτή που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



β) Η τελική (μέγιστη) τιμή της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα σταθεροποιείται στην τιμή που προβλέπει ο νόμος Ohm όταν πλέον

η Η.Ε.Δ. από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα του πηνίου έχει μηδενιστεί. Από τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα παίρνουμε:

$$I_0 = \frac{E}{R} \Rightarrow I_0 = 4 \text{ A}$$

γ) Από τον 2ο νόμο του Kirchhoff, σε μία τυχαία χρονική στιγμή, προκύπτει:

$$I = \frac{E - |E_{\text{αυτ.}}|}{R} \Rightarrow |E_{\text{αυτ.}}| = E - I \cdot R \Rightarrow |E_{\text{αυτ.}}| = 10 \text{ V}$$

δ) Για τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος στο κύκλωμα τη χρονική στιγμή t_1 , έχουμε:

$$|E_{\text{αυτ.}}| = L \cdot \frac{|\Delta I|}{\Delta t} \Rightarrow \frac{|\Delta I|}{\Delta t} = \frac{|E_{\text{αυτ.}}|}{L} \Rightarrow \frac{|\Delta I|}{\Delta t} = 1000 \text{ A/s}$$

Επειδή η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος στο κύκλωμα αυξάνεται, ο ρυθμός μεταβολής της έντασης είναι θετικός, άρα:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = +1000 \text{ A/s}$$

ε) Εφαρμόζοντας πάλι τον 2ο νόμο του Kirchhoff, για τη χρονική στιγμή t_2 , έχουμε:

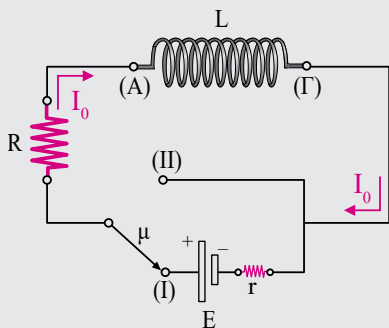
$$I_2 = \frac{E - |E_{\text{αυτ.}}|}{R} \Rightarrow I_2 = 3 \text{ A}$$

Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου, τη χρονική στιγμή t_2 , υπολογίζεται από τη σχέση:

$$U = \frac{1}{2} L I_2^2 \Rightarrow U = 0,045 \text{ J}$$

Πρόβλημα 95

α) Όταν ο μεταγωγός μ βρίσκεται στη θέση (I) το κύκλωμα διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I_0 , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



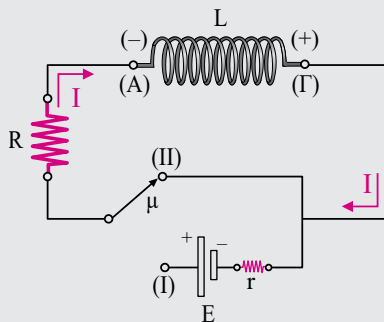
Για την ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου ισχύει η σχέση:

$$U_0 = \frac{1}{2} L I_0^2 \Rightarrow I_0 = \sqrt{\frac{2U_0}{L}} \Rightarrow I_0 = 8 \text{ A}$$

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα, όταν το κύκλωμα διαρρέεται από το σταθερό ρεύμα I_0 , παίρνουμε:

$$I_0 = \frac{E}{R + r} \Rightarrow R = \frac{E - I_0 r}{I_0} \Rightarrow R = 4 \Omega$$

β) Όταν μεταφέρουμε το μεταγωγό μ από τομα στη θέση (II), η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει το πηνίο αρχίζει να ελαττώνεται, οπότε στα άκρα του αναπτύσσεται Η.Ε.Δ. από αυτεπαγωγή. Η πολικότητα αυτής της Η.Ε.Δ. είναι τέτοια ώστε να αντισταθεί στη μείωση της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος. Έτσι εμφανίζεται θετικός πόλος (+) στο άκρο (Γ) του πηνίου και αρνητικός πόλος (-) στο άκρο (Α). Μετά από κάποιο χρόνο η Η.Ε.Δ. από αυτεπαγωγή στα άκρα του πηνίου μηδενίζεται, άρα μηδενίζεται και το τελικό ρεύμα στο κύκλωμα.



γ) Εφαρμόζουμε τον νόμο του Ohm για τη χρονική στιγμή t_1 που το ρεύμα στο κύκλωμα έχει τιμή $I = 6 \text{ A}$.

$$I = \frac{|E_{\text{αυτ.}}|}{R} \Rightarrow |E_{\text{αυτ.}}| = I \cdot R \Rightarrow L \cdot \frac{|\Delta I|}{\Delta t} = I \cdot R$$

$$\Rightarrow \frac{|\Delta I|}{\Delta t} = \frac{I \cdot R}{L} \Rightarrow \frac{|\Delta I|}{\Delta t} = 24000 \text{ A/s}$$

Επειδή η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος στο κύκλωμα μειώνεται, ο ρυθμός μεταβολής της έντασης είναι αρνητικός, άρα:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = -24000 \text{ A/s}$$

δ) Ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα στην αντίσταση R τη χρονική στιγμή t_1 , είναι ίσος με τη θερμική ισχύ σε αυτή. Ισχύει:

$$\frac{\Delta Q_R}{\Delta t} = P_R = I^2 \cdot R \Rightarrow \frac{\Delta Q_R}{\Delta t} = 144 \text{ J/s}$$

Για τον ρυθμό με τον οποίο καταναλώνεται ενέργεια από το μαγνητικό πεδίο του πηνίου την ίδια στιγμή, ισχύει:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = P_L = |E_{\text{αυτ.}}| \cdot I \stackrel{|E_{\text{αυτ.}}| = I \cdot R}{=} I^2 \cdot R \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = 144 \text{ J/s}$$

ε) Όταν μεταφέρουμε τον μεταγωγό μ από τη θέση (I) στη θέση (II), η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου, σταδιακά μειώνεται και μετατρέπεται σε θερμότητα στην αντίσταση R. Για τον υπολογισμό της θερμότητας που παράχθηκε στην αντίσταση R μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 , έχουμε:

$$Q_R = U_{(0)} - U_{(t_1)} = U_{(0)} - \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow Q_R = 0,014 \text{ J}$$

Πρόβλημα 96

α) Από το διάγραμμα προκύπτει:

$$-\frac{\Phi}{e} = -1,8 \text{ V} \Rightarrow \Phi = 1,8 \text{ eV}$$

β) Για $V_0 = 0$, ισχύει $f_0 = \frac{\Phi}{h} \Rightarrow f_0 = \frac{48}{11} \cdot 10^{14} \text{ Hz}$

γ) Για την τάση αποκοπής ισχύει:

$$eV_0 = hf - \Phi \text{ ή } V_0 = \frac{h}{e} f - \frac{\Phi}{e} \Rightarrow V_0 = 1,5 \text{ V}$$

Πρόβλημα 97

α) Από το διάγραμμα προκύπτει ότι:

$$f_0 = 0,8 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

Για το έργο εξαγωγής ισχύει:

$$f_0 = \frac{\Phi}{h} \text{ ή } \Phi = f_0 h \Rightarrow \Phi = 3,3 \text{ eV}$$

β) Για τη μέγιστη κινητική ενέργεια των εξερχόμενων φωτοηλεκτρονίων έχουμε:

$$K = hf - \Phi \Rightarrow K = 20 \text{ eV}$$

γ) Για το μέτρο της ορμής των εξερχόμενων φωτοηλεκτρονίων προκύπτει:

$$K = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2Km} \Rightarrow p = 24 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Πρόβλημα 98

α) Η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας υπολογίζεται από τον τύπο:

$$f_0 = \frac{\Phi}{h} \Rightarrow f_0 = 0,4 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

Έχουμε:

$$f_1 = 2,5f_0 \Rightarrow f_1 = 10^{15} \text{ Hz}$$

β) Για τη μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων όταν εξέρχονται από την κάθοδο έχουμε:

$$K_1 = hf_1 - \Phi \Rightarrow K_1 = 3,96 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

γ) Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. προκύπτει:

$$K_2 - K_1 = e \cdot \Delta V \Rightarrow K_2 = 4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Πρόβλημα 99

α) Για το μήκος κύματος του φωτός που προσπίπτει στην επιφάνεια του μετάλλου, προκύπτει:

$$c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \lambda = 1,25 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

β) Για το μέτρο της ορμής των εξερχόμενων φωτοηλεκτρονίων έχουμε:

$$K = \frac{p^2}{2m_e} \Rightarrow p = \sqrt{2Km_e} \Rightarrow p = 48 \cdot 10^{-26} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

γ) Για το δυναμικό αποκοπής ισχύει:

$$e \cdot V_0 = K \Rightarrow V_0 = \frac{K}{e} \Rightarrow V_0 = 0,8 \text{ V}$$

δ) Από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein έχουμε:

$$K = hf - \Phi \Rightarrow \Phi = hf - K \Rightarrow \Phi = 0,2 \text{ eV}$$

ε) Για να εξέλθει το φωτοηλεκτρόνιο από τη μεταλλική επιφάνεια θα πρέπει να ισχύει:

$$hf - \Phi \geq 0 \Rightarrow f \geq \frac{\Phi}{h}$$

Επομένως η συχνότητα κατωφλίου είναι:

$$f_0 = \frac{\Phi}{h} \Rightarrow f_0 = 0,48 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Πρόβλημα 100

α) Για τη μεταβολή του μήκους κύματος του φωτονίου έχουμε:

$$\Delta \lambda = \lambda_c (1 - \cos \theta) \quad (1)$$

Επειδή το φωτόνιο οπισθοσκεδάζεται ισχύει $\theta = 180^\circ$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) προκύπτει:

$$\Delta \lambda = 2,43 \cdot 10^{-12} (1 - \cos 180^\circ) \Rightarrow$$

$$\Delta \lambda = 4,86 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

β) Το μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου είναι:

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda \Rightarrow \lambda' = \lambda + \Delta \lambda$$

$$\Rightarrow \lambda' = 9,72 \cdot 10^{-12} \text{ m} + 4,86 \cdot 10^{-12} \text{ m} \Rightarrow$$

$$\lambda' = 14,58 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Η αρχική ενέργεια του φωτονίου δίνεται από τη σχέση:

$$E_{\text{αρχ}} = hf \Rightarrow E_{\text{αρχ}} = \frac{hc}{\lambda} \quad (2)$$

Η τελική ενέργεια του φωτονίου είναι:

$$E_{\text{τελ}} = hf' \Rightarrow E_{\text{τελ}} = \frac{hc}{(\lambda')} \quad (3)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (2),(3) προκύπτει:

$$\frac{E_{\text{αρχ}}}{E_{\text{τελ}}} = \frac{\frac{hc}{\lambda}}{\frac{hc}{\lambda'}} \Rightarrow \frac{E_{\text{αρχ}}}{E_{\text{τελ}}} = \frac{\lambda'}{\lambda} \Rightarrow \frac{E_{\text{αρχ}}}{E_{\text{τελ}}} = \frac{14,58 \cdot 10^{-12} \text{ m}}{9,72 \cdot 10^{-12} \text{ m}} \Rightarrow$$

$$\frac{E_{\text{αρχ}}}{E_{\text{τελ}}} = 1,5$$

γ) Προκύπτει:

$$\Pi\% = \frac{\Delta E}{E} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi\% = \frac{E_{\text{τελ}} - E_{\text{αρχ}}}{E_{\text{αρχ}}} \cdot 100\%$$

$$\Rightarrow \Pi\% = \frac{E_{\text{τελ}} - 1,5E_{\text{τελ}}}{1,5E_{\text{τελ}}} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi\% = -\frac{100}{3} \%$$

δ) Ορίζουμε ως θετική τη διεύθυνση της ορμής του προσπίπτοντος φωτονίου. Ισχύει:

$$\Delta p = \vec{p}' - \vec{p} \quad \text{ή} \quad \Delta p = -\vec{p}' - p \Rightarrow$$

$$\Delta p = -\frac{h}{\lambda'} - \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \Delta p = -1,14 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του φωτονίου κατά τη σκέδαση είναι ίσο με:

$$1,14 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

ε) Από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής προκύπτει:

$$p = -p' + p_e \Rightarrow p_e = p + p' \Rightarrow p_e = \frac{h}{\lambda} + \frac{h}{\lambda'}$$

$$\Rightarrow p_e = 1,14 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Κεφάλαιο 1: Κρούσεις

ΘΕΜΑ Α

- 1.1 γ) 1.2 β) 1.3 β) 1.4 α)
 1.5 δ) 1.6 γ) 1.7 γ) 1.8 α)
 1.9 γ) 1.10 β) 1.11 δ) 1.12 γ)
 1.13 α) 1.14 β) 1.15 δ) 1.16 δ)
 1.17 β) 1.18 γ) 1.19 β) 1.20 δ)
 1.21 δ) 1.22 α) 1.23 δ) 1.24 δ)

- 1.25 α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ
 1.26 α) Λ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ
 1.27 α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

1.28 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας από τη θέση (I) μέχρι τη θέση (II). Προκύπτει:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 - 0 = m_1gl \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gl}$$

Ισχύει:

$$\sigma_{\text{υνφ}} = \frac{l-h}{l} \Rightarrow 0,64 = \frac{l-h}{l} \Rightarrow h = 0,36l$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας από τη θέση (II) μέχρι τη θέση (III). Προκύπτει:

$$0 - \frac{1}{2}m_1v_1'^2 = -m_1gh \Rightarrow v_1' = \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

$$v_1' = 0,6\sqrt{2gl}$$

Από την Α.Δ.Ο. για την κρούση μεταξύ σφαιρών και σώματος έχουμε:

$$m_1v_1 + 0 = -m_1v_1' + 8m_1v_2' \Rightarrow$$

$$1,6\sqrt{2gl} = 8v_2' \Rightarrow v_2' = 0,2\sqrt{2gl}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος πάνω στο δάπεδο:

$$0 - \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = -\mu m_2gs \Rightarrow s = 0,08l$$

1.29 Σωστή απάντηση είναι η α).

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας Σ₁:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - 0 = mgl \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gl} \Rightarrow v_1 = 3 \frac{m}{s}$$

Αμέσως μετά την ελαστική της κρούση με τη σφαίρα Σ₁ η σφαίρα Σ₂ αποκτά ταχύτητα $\vec{v}_2'$. Ισχύει:

$$v_2' = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v_2' = \frac{2mv_1}{m + 2m} \Rightarrow v_2' = \frac{2v_1}{3}$$

Αμέσως μετά την ελαστική της κρούση με τη σφαίρα Σ₂ η σφαίρα Σ₃ αποκτά ταχύτητα μέτρου $\vec{v}_3'$. Ισχύει:

$$v_3' = \frac{2m_2v_2'}{m_3 + m_2} \Rightarrow v_3' = \frac{4m \frac{2v_1}{3}}{4m + 2m} \Rightarrow$$

$$v_2' = \frac{4v_1}{9} \Rightarrow v_2' = \frac{4}{3} \frac{m}{s}$$

1.30 Σωστή απάντηση είναι η β).

Αφού η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, η ταχύτητα της σφαίρας m_2 μετά την κρούση θα

$$\text{είναι: } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1).$$

Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ₁ που μεταβιβάζεται στη σφαίρα Σ₂ είναι:

$$\frac{K_2'}{K_1} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2}m_2v_2'^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2} \cdot 100\% =$$

$$\stackrel{(1)}{=} \frac{m_2 \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \right)^2}{m_1 v_1^2} \cdot 100\% = \frac{4m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\frac{4m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot 100\% = 75\% \Rightarrow \frac{4m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$3m_1^2 - 10m_2 \cdot m_1 + 3m_2^2 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί τριώνυμο ως προς m_1 . Λύσεις είναι:

$$m_1 = 3m_2 \text{ και } m_1 = \frac{m_2}{3}$$

Αφού το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας Σ_1 είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της αρχικής της ορμής, σημαίνει ότι μετά την κρούση η σφαίρα Σ_1 έχει αλλάξει φορά κίνησης και για να συμβεί αυτό πρέπει $m_1 < m_2$. Άρα τελικά:

$$m_1 = \frac{m_2}{3} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$$

1.31 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Η δυναμική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης των δύο σφαιρών αποκτά τη μέγιστη τιμή της τη στιγμή που οι σφαίρες που συγκρούονται αποκτούν ίδια ταχύτητα μέτρου V .

Από την Α.Δ.Ο. προκύπτει:

$$\vec{p}_{\text{ολ}(\pi\text{ριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})} \Rightarrow m v - m \frac{v}{2} = m V + m V \Rightarrow$$

$$V = \frac{v}{4}$$

Υπολογίζουμε τη μέγιστη δυναμική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης με τη βοήθεια της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας. Ισχύει:

$$K_{\text{ολ}(\text{αρχ})} = K_{\text{ολ}(\text{τελ})} + U_{\text{max}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{v}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} m V^2 + U_{\text{max}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{v}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{v}{4} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{v}{4} \right)^2 + U_{\text{max}} \Rightarrow$$

$$U_{\text{max}} = \frac{9m v^2}{16}$$

1.32 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ισχύει:

$$\frac{U}{K} = \frac{2}{43} \Rightarrow \frac{m_1 g l}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} = \frac{2}{43} \Rightarrow v_0 = \sqrt{43 g l}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του Σ_1 πριν την κρούση. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = m_1 g l \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 43 g l = m_1 g l \Rightarrow v_1 = 3\sqrt{5 g l}$$

Το σώμα Σ_1 μετά την κρούση διαγράφει κυκλική τροχιά. Στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του ασκούνται σε αυτό το βάρος του $\vec{B}_1$ και η τάση του νήματος $\vec{T}$. Η συνισταμένη των παραπάνω δυνάμεων έχει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

Προκύπτει:

$$\Sigma F = F_c \Rightarrow T + B_1 = \frac{m_1 v^2}{l} \Rightarrow T = \frac{m_1 v^2}{l} - m_1 g$$

Για να εκτελέσει το σώμα Σ_1 ανακύκλωση θα πρέπει να φτάσει στο ανώτερο σημείο με το νήμα τεντωμένο ($T \geq 0$). Ισχύει:

$$T \geq 0 \Rightarrow \frac{m_1 v^2}{l} - m_1 g \geq 0 \Rightarrow v \geq \sqrt{l g}$$

Το σώμα Σ_1 μόλις που εκτελεί ανακύκλωση επομένως για το μέτρο της ταχύτητάς του στο ανώτερο σημείο θα έχουμε:

$$v_{\text{min}} = \sqrt{l g}$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.), για την κίνηση του σώματος Σ_1 από το σημείο που βρίσκεται αμέσως μετά την κρούση μέχρι το ανώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς του, για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας v'_1 του σώματος (1) αμέσως μετά την κρούση:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{B_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{\text{min}}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -m_1 g 2l \Rightarrow$$

$$l g - v_1'^2 = -4 g l \Rightarrow |v_1'| = \sqrt{5 l g}$$

Ισχύει:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow -\sqrt{5 l g} = \frac{(m_1 - m_2) 3\sqrt{5 g l}}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$m_2 = 2m_1$$

1.33 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε μαθητή (βάρος και κάθετη δύναμη στήριξης) έχουν συνισταμένη ίση με μηδέν, ενώ οι δυνάμεις που ασκεί ο ένας μαθητής στον άλλον μέσω του σχοινιού είναι εσωτερικές. Επομένως, το σύστημα των δύο μαθητών Α, Β είναι μονωμένο. Από την Α.Δ.Ο. Προκύπτει:

$$\vec{p}_{\text{αρχ}} = \vec{p}_{\text{τελ}} \Rightarrow 0 = (M_A + M_B) v_K \Rightarrow v_K = 0$$

1.34 Σωστή απάντηση είναι η β).

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας $\bar{v}$ με την οποία φτάνει το σύστημα των δύο σφαιρών στο έδαφος.

Ως επίπεδο αναφοράς για τη βαρυτική δυναμική ενέργεια θεωρούμε το έδαφος. Ισχύει:

$$(m_1 + m_2) gH = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gH} \quad (1)$$

Θεωρούμε ως θετική την κατακόρυφη φορά προς τα πάνω.

Η σφαίρα Σ_2 συγκρούεται ελαστικά με το δάπεδο, επομένως η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας της μετά την κρούση της με αυτό είναι:

$$v_2 = +v$$

Στη συνέχεια έχουμε μια δεύτερη ελαστική κρούση μεταξύ της Σ_2 και της σφαίρας Σ_1 που κινείται με ταχύτητα αλγεβρικής τιμής:

$$v_1 = -v$$

Μετά την κρούση η σφαίρα Σ_1 θα έχει ταχύτητα αλγεβρικής τιμής:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow v'_1 = \frac{-(m - 2m)v + 4mv}{m + 2m} \Rightarrow v'_1 = \frac{5v}{3} \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για την ανοδική κίνηση της σφαίρας μέχρι να φτάσει στο μέγιστο ύψος h_{max} :

$$\frac{1}{2} m_1 v'^2_1 = m_1 g h_{\text{max}} \Rightarrow v'_1 = \sqrt{2g h_{\text{max}}} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει:

$$h_{\text{max}} = \frac{25}{9} H$$

1.35 Σωστή απάντηση είναι η β).

Για την αρχική κινητική ενέργεια του σώματος μάζας m_1 ισχύει:

$$K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση των σωμάτων 1, 2. Προκύπτει:

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v_{\text{συσ}} \quad (1)$$

Επειδή κατά την κίνηση του συσσωματώματος πάνω στη σανίδα, στο σύστημα σανίδα-συσσωμάτωμα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις που να μεταβάλλουν την ορμή του, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Α.Δ.Ο. για το σύστημα (από τη στιγμή που ξεκίνησε το συσσωμάτωμα να κινείται μέχρι τη στιγμή που σταματάει να κινείται σε σχέση με τη σανίδα). Ισχύει:

$$(m_1 + m_2) v_{\text{συσ}} = (m_1 + m_2 + m_3) v_K \Rightarrow$$

$$m v_0 = 10 m v_K \Rightarrow v_K = \frac{v_0}{10}$$

Η συνολική θερμότητα που εκλύεται υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Q = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3) v_K^2 \Rightarrow$$

$$Q = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} 10 m \left(\frac{v_0}{10} \right)^2 \Rightarrow Q = 0,9 K_0$$

1.36 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Έστω ότι d είναι η απόσταση των δύο σφαιρών, κατά την πρώτη τους κρούση, από τον λείο τοίχο. Για να συγκρουστούν πάλι σε απόσταση $5d$ από αυτόν, θα πρέπει η σφαίρα Σ_1 μετά την πρώτη της κρούση να κινηθεί με ταχύτητα μέτρου $\bar{v}'_1$ αντίθετης φοράς από την αρχική ταχύτητα $\bar{v}_1$.

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για την πρώτη κρούση μεταξύ Σ_1 και Σ_2 . Προκύπτει:

$$m_1 v_1 = -m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (1)$$

Από την αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$v'_1 = \frac{(m_2 - m_1) v_1}{m_1 + m_2} \quad \text{και} \quad v'_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Το διάστημα που θα διανύσει η Σ_1 μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης κρούσης είναι ίσο με $4d$. Ισχύει:

$$4d = v'_1 \Delta t \Rightarrow 4d = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Delta t \quad (3)$$

Το διάστημα που θα διανύσει η Σ_2 μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης κρούσης είναι ίσο με $6d$. Ισχύει:

$$6d = v'_2 \Delta t \Rightarrow 6d = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \Delta t \quad (4)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3), (4) έχουμε:

$$\frac{4d}{6d} = \frac{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Delta t}{\frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \Delta t} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{7}$$

1.37 Σωστή απάντηση είναι η β).

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας Σ_1 , για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητάς της λίγο πριν την κρούση. Ισχύει:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = m g l \Rightarrow v_1 = \sqrt{2 g l}$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για την κρούση. Έχουμε:

$$m v_1 = m v'_1 + 2 m v'_2 \Rightarrow v_1 = v'_1 + 2 v'_2 \quad (1)$$

Κατά τη διάρκεια της κρούσης τα $2/3$ της αρχικής ενέργειας της Σ_1 μετατρέπονται σε θερμική ενέργεια των δύο σφαιρών. Προκύπτει:

$$\frac{1}{3} \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_1'^2 + \frac{1}{2} 2 m v_2'^2 \Rightarrow$$

$$v_1^2 = 3 v_1'^2 + 6 v_2'^2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε:

$$v_1' = v_2' = \frac{v_1}{3} = \frac{\sqrt{2 g l}}{3}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Προκύπτει:

$$0 - \frac{1}{2} 2 m v_2'^2 = -2 m g h \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{9} = g h \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{2 g l}{9} = g h \Rightarrow h = \frac{l}{9}$$

1.38 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Κάθοδος: Ισχύει:

$$\text{συνφ} = \frac{l - h}{l} \Rightarrow 0,82 = \frac{l - h}{l} \Rightarrow h = 0,18 l$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - 0 = m g h \Rightarrow v_1 = \sqrt{0,36 g l} \Rightarrow$$

$$v_1 = 0,6 \sqrt{g l}$$

Ανοδος: Ισχύει:

$$\text{συνθ} = \frac{l - h'}{l} \Rightarrow 0,92 = \frac{l - h'}{l} \Rightarrow h' = 0,08 l$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας. Προκύπτει:

$$0 - \frac{1}{2} m v_2^2 = -m g h' \Rightarrow v_2 = \sqrt{0,16 g l} \Rightarrow$$

$$v_2 = 0,4 \sqrt{g l}.$$

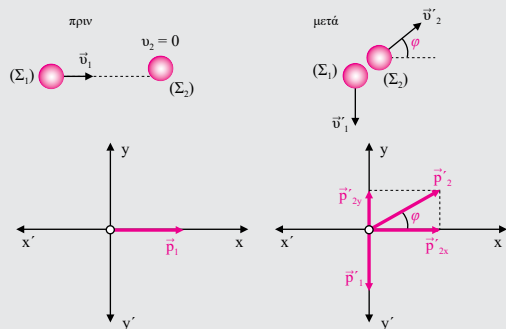
Το ποσοστό επί τοις εκατό μείωσης της κινητικής ενέργειας της σφαίρας κατά την κρούση της με τον τοίχο είναι ίσο με:

$$\Pi\% = \frac{\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2}{\frac{1}{2} m v_1^2} 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi\% = \frac{0,36 g l - 0,16 g l}{0,36 g l} 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi\% = \frac{500}{9} \%$$

1.39 Σωστή απάντηση είναι η β).



Η κρούση είναι ελαστική επομένως ισχύει η αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Rightarrow$$

$$mv_1^2 = mv_1'^2 + 3mv_2'^2 \Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + 3v_2'^2 \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον άξονα x' :

$$p'_{2x} = p_1 \Rightarrow p'_{2x} = mv_1$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον άξονα $y'y'$:

$$0 = p_{2y} - p'_1 \Rightarrow p'_{2y} = mv'_1$$

Ισχύει:

$$p_2'^2 = p_{2x}'^2 + p_{2y}'^2 \Rightarrow$$

$$(3mv_2')^2 = (mv_1')^2 + (mv_1')^2 \Rightarrow$$

$$9v_2'^2 = v_1'^2 + v_1'^2 \quad (2)$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1),

(2) προκύπτει:

$$v_1' = \frac{\sqrt{2}v_1}{2}, \quad v_2' = \frac{\sqrt{6}v_1}{6}$$

1.40 Σωστή απάντηση είναι η γ).

1η περίπτωση.

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα x' :

$$mv_\beta \sin \varphi + Mv_0 = (M+m)V \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} 90mv_0 + 49mv_0 = 50mV \Rightarrow V = 1,88v_0 \quad (1)$$

2η περίπτωση.

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα x' :

$$Mv_0 - mv_\beta \sin \varphi = (M+m)V \Rightarrow$$

$$49mv_0 - \frac{1}{2} 90mv_0 = 50mV' \Rightarrow$$

$$V' = 0,08v_0 \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$\frac{V}{V'} = 23,5$$

1.41 Σωστή απάντηση είναι η α).

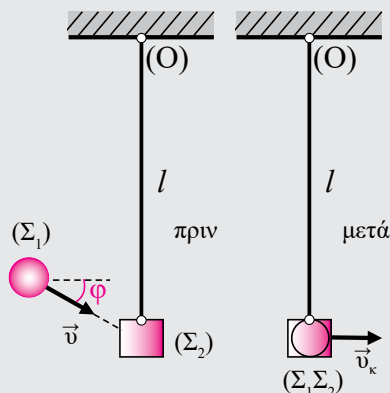
Ισχύει:

$$K_0 = \frac{1}{2} mv_0^2$$

Για την πλαστική κρούση εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα x' . Έχουμε:

$$mv \sin \varphi = 2mv_\kappa \Rightarrow \frac{\sqrt{3}v}{2} = 2v_\kappa \Rightarrow$$

$$v_\kappa = \frac{\sqrt{3}v}{4}$$



Η θερμότητα που εκλύεται κατά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Q = \frac{1}{2} mv_0^2 - \frac{1}{2} 2mv_2'^2 \Rightarrow$$

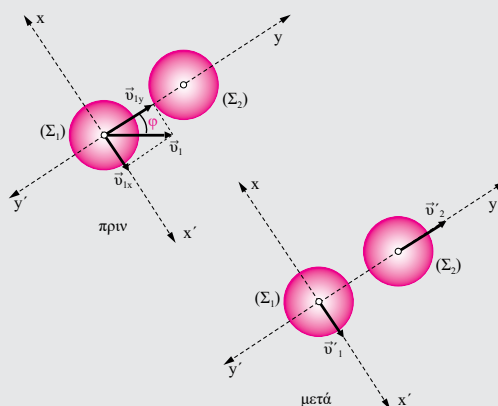
$$Q = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} 2m \frac{3v^2}{16} \Rightarrow Q = K_0 - \frac{3K_0}{8} \Rightarrow$$

$$Q = \frac{5K_0}{8}$$

Προκύπτει:

$$\frac{Q}{K_0} = \frac{\frac{5K_0}{8}}{K_0} \Rightarrow \frac{Q}{K_0} = \frac{5}{8}$$

1.42 Σωστή απάντηση είναι η β).



Αναλύουμε την ταχύτητα $\bar{v}_1$ σε δύο συνιστώσες, την $\bar{v}_{1y}$ κατά τη διάκεντρο τη στιγμή της κρούσης ($y'y'$) και την $\bar{v}_{1x}$ κάθετη προς τη διεύθυνση της διακέντρου ($x'x$).

Για τα μέτρα των δύο συνιστωσών ισχύει:

$$v_{1x} = v_1 \eta \mu \varphi, v_{1y} = v_1 \sigma \nu \eta \varphi$$

Οι σφαίρες είναι ελαστικές και λείες, επομένως, οι δυνάμεις που δέχονται στη διάρκεια της επαφής τους έχουν τη διεύθυνση της διακέντρου. Άρα, η συνιστώσα $\vec{v}_{1x}$ της σφαίρας Σ_1 παραμένει σταθερή.

Επειδή οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες και είναι ελαστικές κατά τη διεύθυνση της διακέντρου, ανταλλάσσουν ταχύτητες. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η σφαίρα Σ_1 αμέσως μετά την κρούση θα κινηθεί με ταχύτητα μέτρου $v'_1 = v_1 \eta \mu \varphi$, με διεύθυνση κάθετη προς αυτήν της διακέντρου, ενώ η σφαίρα Σ_2 θα κινηθεί, κατά τη διεύθυνση της διακέντρου, με ταχύτητα μέτρου $v'_2 = v_1 \sigma \nu \eta \varphi$.

1.43 Σωστή απάντηση είναι η α).

Η σφαίρα Σ_1 κινείται ευθύγραμμα και ομαλά από το ΑΒ έως το ΓΔ, επομένως ισχύει:

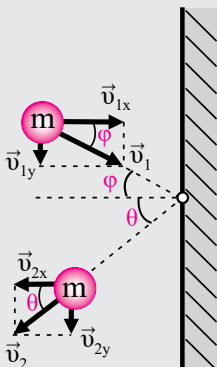
$$t_1 = \frac{AG}{v}$$

Για τη σφαίρα Σ_2 ισχύει:

$$t_2 = \frac{AG}{v_x} \Rightarrow t_2 = \frac{AG}{v \sigma \nu \eta 60^\circ} \Rightarrow t_2 = \frac{AG}{\frac{v}{2}}$$

$$t_2 = 2t_1$$

1.44 Σωστή απάντηση είναι η β).



κάτοψη

Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ο. στον κατακόρυφο άξονα $y'y'$ έχουμε:

$$m v_1 \eta \mu \varphi = m v_2 \eta \mu \theta \Rightarrow v_1 0,6 = 0,75 v_1 \eta \mu \theta \Rightarrow \eta \mu \theta = 0,8$$

Ισχύει:

$$\eta \mu^2 \theta + \sigma \nu^2 \theta = 1 \Rightarrow \sigma \nu \eta \theta = \sqrt{1 - \eta \mu^2 \theta} \Rightarrow$$

$$\sigma \nu \eta \theta = \sqrt{1 - 0,64} \Rightarrow \sigma \nu \eta \theta = 0,6$$

$$\eta \mu^2 \varphi + \sigma \nu^2 \varphi = 1 \Rightarrow \sigma \nu \eta \varphi = \sqrt{1 - \eta \mu^2 \varphi} \Rightarrow$$

$$\sigma \nu \eta \varphi = \sqrt{1 - 0,36} \Rightarrow \sigma \nu \eta \varphi = 0,8$$

Για τη μεταβολή της ορμής του σφαιριδίου, λόγω της κρούσης, έχουμε:

$$\Delta \vec{p} = \Delta \vec{p}_x + \Delta \vec{p}_y \Rightarrow \Delta \vec{p} = \Delta \vec{p}_x + \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{x, \text{τελ}} - \vec{p}_{x, \text{αρχ}} \Rightarrow$$

$$\Delta p = m v_2 \sigma \nu \eta \theta - (-m v_1 \sigma \nu \eta \varphi) \Rightarrow$$

$$\Delta p = m \cdot 0,75 \cdot v_1 \cdot 0,6 + m \cdot v_1 \cdot 0,8 \Rightarrow$$

$$\Delta p = 1,25 m v_1$$

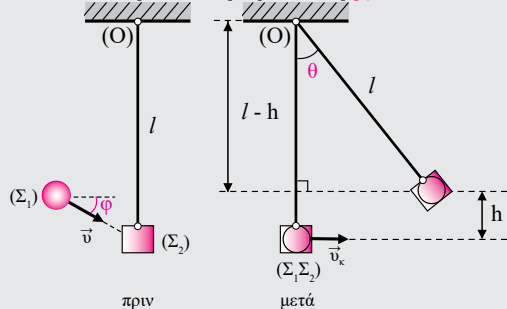
Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σφαιριδίου, εξαιτίας της κρούσης με το δάπεδο, είναι:

$$|\Delta p| = 1,25 m v_1$$

Το μέτρο της μέσης δύναμης που δέχεται το σφαιρίδιο από τον τοίχο, κατά την κρούση, είναι:

$$|F| = \frac{|\Delta p|}{\Delta t} \Rightarrow |F| = \frac{1,25 m v_1}{\Delta t}$$

1.45 Σωστή απάντηση είναι η β).



Ισχύει:

$$\sigma \nu \eta \theta = \frac{l-h}{l} \Rightarrow 0,5 = \frac{l-h}{l} \Rightarrow h = 0,5l$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος μετά την κρούση. Προκύπτει:

$$0 - \frac{1}{2} 5 m v_k^2 = -5 m g h \Rightarrow v_k = \sqrt{g l}$$

Για την πλαστική κρούση εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα $x'x$. Έχουμε:

$$m v \sigma \nu \eta \varphi = 5 m v_k \Rightarrow \frac{v}{2} = 5 \sqrt{g l} \Rightarrow v = 10 \sqrt{g l}$$

1.46 Α) Σωστή απάντηση είναι η α).

Σε όλες τις κρούσεις το σύστημα των σωμάτων είναι μονωμένο, οπότε, διατηρείται η ορμή.

1η κρούση: Η ταχύτητα που θα αποκτήσει το $\Sigma_{1,2}$ είναι:

$$\begin{aligned}\vec{P}_{ολ.(πριν)} &= \vec{P}_{ολ.(μετά)} \Rightarrow \\ m v_0 &= 2 m v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{v_0}{2} \quad (1)\end{aligned}$$

2η κρούση: Η δεύτερη κρούση θα συμβεί τη

$$\text{χρονική στιγμή } t_A = \frac{d}{v_1} \stackrel{(1)}{\approx} \frac{2d}{v_0}$$

Η ταχύτητα που θα αποκτήσει το $\Sigma_{1,2,3}$ είναι:

$$\begin{aligned}\vec{P}_{ολ.(πριν)} &= \vec{P}_{ολ.(μετά)} \Rightarrow \\ 2 m v_1 &= 3 m v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{v_0}{3} \quad (2)\end{aligned}$$

3η κρούση: Η τρίτη κρούση θα συμβεί τη

$$\text{χρονική στιγμή } t_1 = t_A + \frac{d}{v_2} = \frac{2d}{v_0} + \frac{d}{v_2} \stackrel{(2)}{\approx} \frac{5d}{v_0}$$

Η ταχύτητα που θα αποκτήσει το $\Sigma_{1,2,3,4}$ είναι:

$$\begin{aligned}\vec{P}_{ολ.(πριν)} &= \vec{P}_{ολ.(μετά)} \Rightarrow \\ 3 m v_2 &= 4 m v_3 \Rightarrow v_3 = \frac{v_0}{4} \quad (3)\end{aligned}$$

Β) Σωστή απάντηση είναι η β).

Από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 το συσσωμάτωμα που έχει τελικά σχηματιστεί έχει διανύσει απόσταση:

$$\begin{aligned}\Delta x &= v_3 \cdot (t_2 - t_1) = v_3 \cdot (2t_1 - t_1) = \\ &= v_3 t_1 \stackrel{(3)}{\approx} \frac{v_0}{4} \cdot \frac{5d}{v_0} = 1,25d\end{aligned}$$

Άρα απέχει από το σημείο που έγινε η πρώτη κρούση απόσταση S ίση με:

$$S = \Delta x + 2d = 3,25d$$

Γ) Σωστή απάντηση είναι η β).

Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του Σ_1 που μετατρέπεται σε θερμότητα μετά το τέλος όλων των κρούσεων είναι:

$$\Pi\% = \frac{Q_{κρούσης}}{K_{ολ.(πριν)}} \cdot 100\% =$$

$$\begin{aligned}&= \frac{K_{ολ.(πριν)} - K_{ολ.(μετά)}}{K_{ολ.(πριν)}} \cdot 100\% = \\ &= \left(1 - \frac{K_{ολ.(μετά)}}{K_{ολ.(πριν)}} \right) \cdot 100\% = \\ &= \left(1 - \frac{\frac{1}{2} 4 m v_3^2}{\frac{1}{2} m v_0^2} \right) \cdot 100\% \stackrel{(3)}{=} \\ &\stackrel{(3)}{=} \left(1 - \frac{4 \left(\frac{v_0}{4} \right)^2}{v_0^2} \right) \cdot 100\% = 75\%\end{aligned}$$

1.47 Σωστή απάντηση είναι η β).

Έστω $\vec{F}$ η αντίσταση που προβάλλει το ξύλο και στις δύο περιπτώσεις.

1η περίπτωση. Για την κίνηση του βλήματος μέσα στον ξύλινο κύβο μέχρι να σταματήσει εφαρμόζουμε:

$$\Theta.M.K.E.: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}K_{(τελ.)} - K_{(αρχ.)} &= W_F \Rightarrow \\ -\frac{1}{2} m v^2 &= -F d \Rightarrow F = \frac{m v^2}{2d} \quad (1)\end{aligned}$$

2η περίπτωση. Επειδή το σύστημα βλήματος-ξύλινου κύβου είναι μονωμένο (δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις), η ορμή του θα παραμείνει σταθερή. Οπότε:

$$A.A.O.: \vec{P}_{ολ.(πριν)} = \vec{P}_{ολ.(μετά)} \Rightarrow$$

$$m v = (m + M) \cdot V \Rightarrow V = \frac{m v}{m + M} \quad (2)$$

Για την κίνηση του βλήματος μέσα στον ξύλινο κύβο και μέχρι να αποκτήσουν την κοινή ταχύτητα V εφαρμόζουμε:

$$\Theta.M.K.E.: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}K_{(τελ.)} - K_{(αρχ.)} &= W_F \Rightarrow \\ \frac{1}{2} m V^2 - \frac{1}{2} m v^2 &= -F(x + S) \quad (3)\end{aligned}$$

Για την κίνηση του ξύλινου κύβου και μέχρι να αποκτήσουν την κοινή ταχύτητα V εφαρμόζουμε:

$$\Theta.Μ.Κ.Ε.: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(τελ.)} - K_{(αρχ.)} = W_F \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}MV^2 = Fx \quad (4)$$

$$(3) \Rightarrow \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -Fx - FS \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}MV^2 - FS \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -FS \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{mv}{m+M}\right)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -FS \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 \frac{m}{m+M} - \frac{1}{2}mv^2 = -FS \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 \frac{m}{m+M} - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{mv^2}{2d}S \Rightarrow$$

$$\frac{m}{m+M} - 1 = -\frac{S}{d} \Rightarrow S = \frac{M}{M+m}d$$

1.48 Σωστή απάντηση είναι η α).

Στο μέγιστο ύψος h που φτάνει το σώμα, θα έχει κοινή ταχύτητα με το M , γιατί αν ήταν διαφορετική, τότε ή θα ανερχόταν κι άλλο ή θα είχε προηγηθεί το μέγιστο ύψος. Στον οριζόντιο άξονα η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν, για το σύστημα των σωμάτων. Άρα η ορμή του διατηρείται, έτσι:

$$\vec{P}_{ολ(πριν)} = \vec{P}_{ολ(μετά)} \Rightarrow$$

$$mv_o = (m+M)V \quad M=2m \Rightarrow$$

$$mv_o = 3mV \Rightarrow V = \frac{v_o}{3} \quad (1)$$

Επίσης, οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι συντηρητικές, άρα διατηρείται η μηχανική ενέργειά του, έτσι:

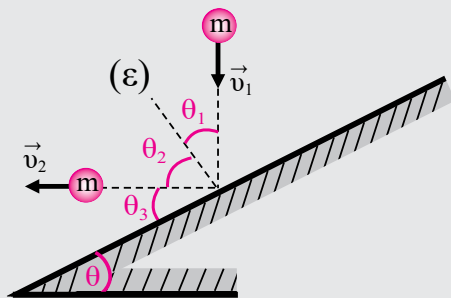
$$E_{αρχ.} = E_{τελ.} \Rightarrow$$

$$0 + \frac{1}{2}mv_o^2 = mgh + \frac{1}{2}(m+M)V^2 \quad (1), M=2m \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = mgh + \frac{1}{2}3m\left(\frac{v_o}{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$v_o^2 = 2gh + \frac{v_o^2}{3} \Rightarrow 2gh = \frac{2v_o^2}{3} \Rightarrow h = \frac{v_o^2}{3g}$$

1.49 Α) Σωστή απάντηση είναι η β).



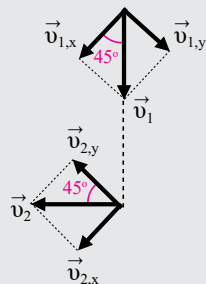
Αφού η κινητική ενέργεια της σφαίρας παραμένει αμετάβλητη μετά την κρούση αυτό σημαίνει ότι η κρούση της με το κεκλιμένο επίπεδο είναι ελαστική. Άρα η γωνία πρόσπτωσης θ_1 και η γωνία ανάκλασης θ_2 θα είναι ίσες ($\theta_1 = \theta_2$). Επειδή η αρχική διεύθυνση της σφαίρας πριν την κρούση είναι κατακόρυφη και η τελική της μετά την κρούση είναι οριζόντια, το άθροισμα των γωνιών θ_1 και θ_2 θα είναι 90° οπότε τελικά $\theta_1 = \theta_2 = 45^\circ$. Όμως η ευθεία (ε) είναι κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο άρα:

$$\theta_2 + \theta_3 = 90^\circ \quad \theta_2 = 45^\circ \Rightarrow \theta_3 = 45^\circ.$$

Τέλος $\theta = \theta_3 = 45^\circ$ ως εντός εναλλάξ (αφού η τελική διεύθυνση της σφαίρας είναι οριζόντια).

Β) Σωστή απάντηση είναι η α).

Αφού η κρούση της σφαίρας m με το κεκλιμένο επίπεδο είναι πλάγια ελαστική, το μέτρο της ταχύτητάς της μετά την κρούση παραμένει σταθερό, ($v_1 = v_2$). Η ορμή της μάζας m μεταβάλλεται μόνο στον $y'y$ άξονα, οπότε:



$$\begin{aligned}
 |\Delta p| &= |\Delta p_y| = |p_{2,y} - p_{1,y}| = \\
 &= |mv_{2,y} - (-mv_{1,y})| = |mv_{2,y} + mv_{1,y}| = \\
 &= |mv_2 \sin 45^\circ + mv_1 \eta \mu 45^\circ| \stackrel{v_1=v_2}{=} \\
 &\stackrel{v_1=v_2}{=} |2mv_1 \sin 45^\circ| = mv_1 \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

1.50 Σωστή απάντηση είναι η α).

Αφού οι σφαίρες είναι λείες, οι μεταξύ τους δυνάμεις τη στιγμή της κρούσης είναι κάθετες προς τις επιφάνειές τους, δηλαδή βρίσκονται κατά μήκος της διακέντρου τους.

Σύμφωνα με τον 3ο Νόμο του Νεύτωνα οι δυνάμεις μεταξύ των μαζών (δράση – αντίδραση) είναι ίσες και αντίθετες, αλλά επίσης οι δυνάμεις αυτές κατευθύνονται και κατά μήκος της ευθείας που συνδέει τα κέντρα των δυο σωμάτων. Αν αναλύσουμε την ταχύτητα $\vec{v}_1$ της σφαίρας Σ_1 τη στιγμή της κρούσης σε δυο συνιστώσες, μια κατά τη διεύθυνση της διακέντρου και μια κάθετη σε αυτή, τότε έχουμε: $v_{1,x} = v_1 \cdot \sin \theta$ και $v_{1,y} = v_1 \cdot \eta \mu \theta$. Εξαιτίας της $v_{1,x}$ έχουμε μετωπική ελαστική κρούση, οπότε οι δυο σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες. Έτσι η Σ_2 μετά την κρούση θα κινηθεί κατά μήκος της διακέντρου με ταχύτητα $v'_2 = v_{1,x} = v_1 \cdot \sin \theta$.

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\begin{aligned}
 \Pi\% &= \frac{K'_2}{K_1} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2}mv_2'^2}{\frac{1}{2}mv_1^2} \cdot 100\% = \\
 &= \frac{\frac{1}{2}m(v_1 \cdot \sin \theta)^2}{\frac{1}{2}mv_1^2} \cdot 100\% = \sin^2 \theta \cdot 100\%.
 \end{aligned}$$

Όμως:

$$\eta \mu \theta = \frac{d}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ \text{ άρα } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

οπότε $\Pi\% = 25\%$

ΘΕΜΑ Γ

1.51 α) Από την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση έχουμε:

$$\begin{aligned}
 m_\beta |v_0| &= (m_1 + m_\beta) |v_\kappa| \Rightarrow |v_\kappa| = \frac{m_\beta |v_0|}{m_1 + m_\beta} \\
 |v_\kappa| &= 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος. Προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(m_1 + m_\beta)v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_\beta)v_\kappa^2 &= \\
 = -\mu(m_1 + m_\beta)gs \Rightarrow |v_1| &= \sqrt{v_\kappa^2 - 2\mu gs} \Rightarrow \\
 |v_1| &= 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

β) Η θερμότητα που εκλύεται κατά το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{2}m_\beta v_0^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_\beta)v_\kappa^2 + |-\mu(m_1 + m_\beta)gs| \Rightarrow \\
 Q &= 1950 \text{ J}
 \end{aligned}$$

γ) Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος, αμέσως μετά την κρούση, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_\beta)v_1'^2 &= -\mu(m_1 + m_\beta)gs_1 \Rightarrow \\
 s_1 &= \frac{v_1'^2}{2\mu g} (1)
 \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση προκύπτει:

$$0 - \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g s_2 \Rightarrow s_2 = \frac{v_2'^2}{2\mu g} (2)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (1), (2) έχουμε:

$$s_2 = 16s_1 \Rightarrow \frac{v_2'^2}{2\mu g} = 16 \frac{v_1'^2}{2\mu g} \Rightarrow |v_2'| = 4|v_1'| (3)$$

Το σώμα Σ_2 μετά την ελαστική κρούση θα κινηθεί προς τα δεξιά, ενώ το συσσωμάτωμα

προς τα αριστερά, επομένως για τις αλγεβρικές τιμές v'_1, v'_2 των ταχυτήτων των δύο σωμάτων αμέσως μετά τη μεταξύ τους κρούση θα ισχύει:

$$v'_2 = -4v'_1 \Rightarrow$$

$$\frac{2(m_1 + m_\beta)v_1}{m_1 + m_\beta + m_2} = -4 \frac{(m_1 + m_\beta - m_2)v_1}{m_1 + m_\beta + m_2} \Rightarrow$$

$$m_2 = 6 \text{ kg}$$

δ) Έστω ότι το συσσωμάτωμα διανύει διάστημα s αμέσως μετά την ελαστική του κρούση με το σώμα Σ_2 . Από το Θ.Μ.Κ.Ε. προκύπτει:

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_\beta)v'^2 = -\mu(m_1 + m_\beta)gs \Rightarrow$$

$$|v'| = \sqrt{2\mu gs} \Rightarrow |v'| = 5\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ορίζοντας θετική τη φορά προς τα δεξιά για την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την ελαστική κρούση, έχουμε:

$$v' = -5\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$v' = \frac{(m_1 + m_\beta - m_2)v}{m_1 + m_\beta + m_2} \Rightarrow$$

$$v = \frac{v'(m_1 + m_\beta + m_2)}{m_1 + m_\beta - m_2} \Rightarrow v = 25\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος πριν την ελαστική κρούση. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_\beta)v^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_\beta)v_{\kappa}^2 =$$

$$= -\mu(m_1 + m_\beta)gs \Rightarrow$$

$$|v_{\kappa}| = \sqrt{v^2 + 2\mu gs} \Rightarrow |v_{\kappa}| = 5\sqrt{78} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Από την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση έχουμε:

$$|p_\beta| = |p_{\kappa}| \quad \text{ή} \quad |p_\beta| = (m_1 + m_\beta)|v_{\kappa}| \Rightarrow$$

$$|p_\beta| = 20\sqrt{78} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

1.52 α) Η ταχύτητα της σφαίρας Σ_2 , αμέσως μετά την κρούση, είναι:

$$v'_2 = \frac{2m_1v_0}{m_1 + m_2} \Rightarrow v'_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Η ταχύτητα της σφαίρας Σ_1 , αμέσως μετά την κρούση, είναι::

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_0}{m_1 + m_2} \Rightarrow v'_1 = -3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για τη μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_1 ισχύει:

$$\Delta p_1 = m_1v'_1 - m_1v_0 \Rightarrow \Delta p_1 = -8 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

γ) Μετά την πρώτη της κρούση με τη σφαίρα Σ_2 η Σ_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά και με τη σφαίρα Σ_3 αποκτώντας τελικά ταχύτητα αλγεβρικής τιμής v''_1 που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v''_1 = \frac{(m_1 - m_3)v'_1}{m_1 + m_3} \Rightarrow v''_1 = 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Επειδή ισχύει $v'_1 < v'_2$ θα αποφευχθεί η σύγκρουση μεταξύ των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 για δεύτερη φορά.

δ) Για να αποφευχθεί η σύγκρουση μεταξύ των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 , για δεύτερη φορά, θα πρέπει να ισχύει:

$$|v'_1| < |v'_2|(1)$$

Επειδή ισχύει $m_1 < m_3$ από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\left| \frac{(m_1 - m_3)v'_1}{m_1 + m_3} \right| \leq |v'_2| \Rightarrow \frac{(m_3 - m_1)|v'_1|}{m_1 + m_3} \leq |v'_2| \Rightarrow$$

$$\frac{(m_3 - 1) \cdot 3}{1 + m_3} \leq 2 \Rightarrow m_3 \leq 5 \text{ kg}$$

Η μέγιστη επομένως τιμή της μάζας της σφαίρας Σ_3 είναι:

$$m_{3,\max} = 5 \text{ kg}$$

1.53 α) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 . Ισχύει:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_1v_0^2 = -m_1gh \Rightarrow |v_1| = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \Rightarrow$$

$$|v_1| = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος μετά την κρούση. Έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_k^2 &= \\ &= -(m_1 + m_2)g(h_{\max} - h_1) \Rightarrow \\ |v_k| &= \sqrt{2g(h_{\max} - h_1)} \Rightarrow |v_k| = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος, αμέσως μετά την κρούση, είναι:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \Sigma F \cdot v_k \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -(m_1 + m_2)g \cdot v_k \Rightarrow \\ \frac{dK}{dt} &= -100 \frac{\text{J}}{\text{s}} \end{aligned}$$

δ) Από την εφαρμογή της Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση προκύπτει:

$$\begin{aligned} m_1|v_1| - m_2|v_2| &= (m_1 + m_2)|v_k| \Rightarrow \\ |v_2| &= \frac{m_1|v_1| - (m_1 + m_2)|v_k|}{m_2} \Rightarrow |v_2| = \frac{2}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Προκύπτει:

$$\frac{dU}{dt} = -m_2 g v_2 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -20 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

1.54 α) Για το σώμα Σ₁ ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = m_1 \vec{a}_1 \Rightarrow |T_1| = m_1 |\alpha_1| \Rightarrow$$

$$\mu m_1 g = m_1 |\alpha_1| \Rightarrow |\alpha_1| = \mu g \Rightarrow \alpha_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Για το διάστημα ΑΓ που διανύει το Σ₁ από την $t_0 = 0$ μέχρι τη στιγμή της συνάντησης t_Σ έχουμε:

$$\Delta G = |v_{01}| \cdot t_\Sigma - \frac{1}{2} |\alpha_1| t_\Sigma^2 \quad (1)$$

Για το σώμα Σ₂ ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = m_2 \vec{a}_2 \Rightarrow |T_2| = m_2 |\alpha_2| \Rightarrow$$

$$\mu m_2 g = m_2 |\alpha_2| \Rightarrow |\alpha_2| = \mu g \Rightarrow |\alpha_2| = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Για το διάστημα ΒΓ που διανύει το Σ₂ από την $t_0 = 0$ μέχρι τη στιγμή της κρούσης t_Σ έχουμε:

$$\Delta G = |v_{02}| \cdot t_\Sigma - \frac{1}{2} |\alpha_2| t_\Sigma^2 \quad (2)$$

Ισχύει:

$$\Delta G = 0,75 \cdot \Delta G \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1), (2) στη σχέση (3) προκύπτει:

$$\begin{aligned} |v_{02}| \cdot t_\Sigma - \frac{1}{2} |\alpha_2| t_\Sigma^2 &= 0,75 \cdot \left(|v_{01}| \cdot t_\Sigma - \frac{1}{2} |\alpha_1| t_\Sigma^2 \right) \Rightarrow \\ 8t_\Sigma - t_\Sigma^2 &= 0,75 \cdot (10t_\Sigma - t_\Sigma^2) \\ \text{ή } t_\Sigma &= 0 \text{ (απορρ.) και } t_\Sigma = 2\text{s} \end{aligned}$$

β) Υπολογίζουμε τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωμάτων λίγο πριν τη μεταξύ τους κρούση. Για το Σ₁ προκύπτει:

$$|v_1| = |v_{01}| - |\alpha_1| t_\Sigma \Rightarrow |v_1| = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Και για το Σ₂:

$$|v_2| = |v_{02}| - |\alpha_2| t_\Sigma \Rightarrow |v_2| = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση, προκύπτει:

$$\begin{aligned} m_1|v_1| - m_2|v_2| &= (m_1 + m_2)|v_k| \quad \text{ή} \\ |v_k| &= \frac{m_1|v_1| - m_2|v_2|}{m_1 + m_2} \Rightarrow |v_k| = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

γ) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος. Ισχύει:

$$\begin{aligned} 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_k^2 &= -\mu(m_1 + m_2)gs \quad \text{ή} \\ s &= \frac{v_k^2}{2\mu g} \Rightarrow s = 0,25 \text{ m} \end{aligned}$$

δ) Ισχύει:

$$Q_{\text{ολ}} = \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2 \Rightarrow Q_{\text{ολ}} = 164 \text{ J}$$

1.55 α) Για την κίνηση της σφαίρας Σ₁ στο οριζόντιο επίπεδο, εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, όποτε έχουμε:

$$\Theta.Μ.Κ.Ε.: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(\text{τελ.})} - K_{(\text{αρχ.})} = W_{T_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -T_1 d \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -\mu m_1 g d \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g d} \Rightarrow v_1 = 9 \text{ m/s}$$

β) Για την κίνηση της σφαίρας Σ_2 , αμέσως μετά την κρούση πάνω στο τεταρτοκύκλιο, εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας. Αφού οριακά δεν χάνει της επαφή της με το τεταρτοκύκλιο, τότε στο ανώτερο σημείο της σταματάει. Οπότε έχουμε:

$$\Theta.Μ.Κ.Ε.: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(τελ.)} - K_{(αρχ.)} = W_{W_2} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}m_2v_2'^2 = -m_2gR \Rightarrow v_2' = 4 \frac{m}{s}$$

$$\Lambda.Δ.Ο.: \vec{P}_{ολ.(πριν)} = \vec{P}_{ολ.(μετά)} \Rightarrow$$

$$m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2' \Rightarrow v_1' = -3 \frac{m}{s}$$

άρα η σφαίρα Σ_1 αλλάζει φορά κίνησης.

$$\gamma) K_{ολ.(πριν)} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = 40,5 \text{ J}$$

$$K_{ολ.(μετά)} = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = 28,5 \text{ J}$$

Αφού $K_{ολ.(πριν)} \neq K_{ολ.(μετά)}$ η κρούση είναι **ανελαστική**.

δ) Μετά την κρούση η σφαίρα Σ_1 εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση προς τα δεξιά.

Αξονας x: 2ος Νόμος του Νεύτωνα

$$\Sigma F_x = m_1a_1 \Rightarrow -T_1 = m_1a_1 \Rightarrow -\mu m_1g = m_1a_1 \Rightarrow$$

$$a_1 = -\mu g \Rightarrow a_1 = -5 \frac{m}{s^2}$$

Όταν σταματήσει μετά την κρούση η ταχύτητά της θα μηδενιστεί οπότε:

$$v = |v_1'| - |\alpha_1| t_1 \stackrel{v=0}{\Rightarrow} 0 = 3 - 5 \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = 0,6 \text{ s}$$

ε) Η απόσταση που διανύει η σφαίρα Σ_1 μέχρι να σταματήσει μετά την κρούση είναι:

$$S = |v_1'|t_1 - \frac{1}{2}|\alpha_1|t_1^2 = 0,9 \text{ m}$$

Μετά την κρούση η σφαίρα Σ_2 κάποια στιγμή επιστρέφει στη βάση του τεταρτοκυκλίου με ταχύτητα μέτρου $v_2' = 4 \frac{m}{s}$ αφού δεν έχουμε απώλειες ενέργειας. Για να μην συμβεί 2η κρούση πρέπει η απόσταση που θα διανύσει στο οριζόντιο επίπεδο μέχρι να σταματήσει να είναι μικρότερη το πολύ ίση με 0,9 m.

Για την κίνηση της σφαίρας Σ_2 στο οριζόντιο επίπεδο μέχρι να σταματήσει, εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

$$\Theta.Μ.Κ.Ε.: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(τελ.)} - K_{(αρχ.)} = W_{T_2} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}m_2v_2'^2 = -T_2S \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}m_2v_2'^2 = -\mu' m_2gS \Rightarrow$$

$$\mu' = \frac{v_2'^2}{2gS} \Rightarrow \mu' = \frac{8}{9}$$

1.56 α) Εφαρμόζουμε το $\Theta.Μ.Κ.Ε.$ για την κίνηση του σώματος Σ_1 . Προκύπτει:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 - 0 = m_1gl \Rightarrow |v_1| = \sqrt{2gl} \Rightarrow |v_1| = 6 \frac{m}{s}$$

Ορίζοντας ως θετική τη φορά προς τα δεξιά προκύπτει:

$$v_1 = +6 \frac{m}{s}$$

Η κρούση μεταξύ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι ελαστική, επομένως ισχύει:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v_1' = -2 \frac{m}{s}$$

Το ζητούμενο ποσοστό επί τοις εκατό υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Pi(\%) = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1'^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{4}{36} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = \frac{100}{9} \%$$

β) Η κρούση μεταξύ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι ελαστική, επομένως ισχύει:

$$v_2' = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v_2' = 4 \frac{m}{s}$$

Κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος Σ_2 πάνω στη σανίδα το σύστημα Σ_2 -σανίδα δεν δέχεται εξωτερικές δυνάμεις και θεωρείται μονωμένο. Επομένως ισχύει:

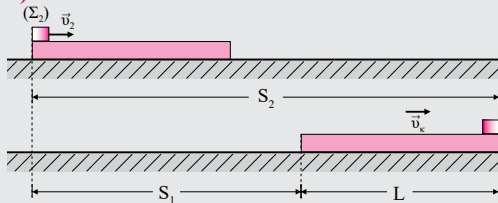
$$m_2 |v'_2| = (m_2 + M) |v_k| \Rightarrow |v_k| = \frac{m_2 |v'_2|}{m_2 + M} \Rightarrow$$

$$|v_k| = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Ισχύει:

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = |-\mu m_2 g| \Rightarrow \left| \frac{dp}{dt} \right| = 10 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

δ)



Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του Σ2. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} m_2 v_k^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g s_2 \Rightarrow$$

$$s_2 = \frac{v_2'^2 - v_k^2}{2\mu g} \Rightarrow s_2 = 1,575 \text{ m}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της σανίδας. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} M v_k^2 = \mu m_2 g s_1 \quad \text{ή} \quad s_1 = \frac{M v_k^2}{2\mu m_2 g} \Rightarrow$$

$$s_1 = 0,175 \text{ m}$$

Για το μήκος της σανίδας προκύπτει:

$$s_2 = s_1 + L \Rightarrow L = s_2 - s_1 \Rightarrow L = 1,4 \text{ m}$$

1.57 α) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ1 από τη θέση Α στη θέση Β. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -\mu m_1 g \cdot AB \Rightarrow$$

$$|v_1| = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g \cdot AB} \Rightarrow |v_1| = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα. Έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = m_1 \vec{a} \Rightarrow \mu m_1 g = m_1 |\alpha| \Rightarrow |\alpha| = \mu g \Rightarrow$$

$$|\alpha| = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Για τη χρονική διάρκεια κίνησης του Σ1 προκύπτει:

$$|v_1| = |v_0| - |\alpha| \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{|v_0| - |v_1|}{\alpha} \Rightarrow \Delta t = 0,4 \text{ s}$$

γ) Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση των δύο σωμάτων αμέσως μετά την κρούση προκύπτει:

Σ1:

$$0 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -\mu m_1 g \cdot s_1 \Rightarrow s_1 = \frac{v_1'^2}{2\mu g} (1)$$

Σ2:

$$0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g \cdot s_2 \Rightarrow s_2 = \frac{v_2'^2}{2\mu g} (2)$$

Επειδή ισχύει $s_1 = s_2$ από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$|v_1'| = |v_2'|$$

Για τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων v_1' , v_2' επομένως είτε θα ισχύει $v_1' = v_2'$ (3) είτε $v_1' = -v_2'$ (4).

Η σχέση (3) όμως δεν μπορεί να ισχύει, γιατί κάτι τέτοιο θα συνέβαινε μόνο σε πλαστική κρούση. Επομένως προκύπτει:

$$v_1' = -v_2' \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$$

δ) Υπολογίζουμε την ταχύτητα του σώματος Σ2 αμέσως μετά την κρούση. Έχουμε:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \Rightarrow v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + 3m_1} \cdot 2 \Rightarrow$$

$$v_2' = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Pi(\%) = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} 100\% \Rightarrow$$

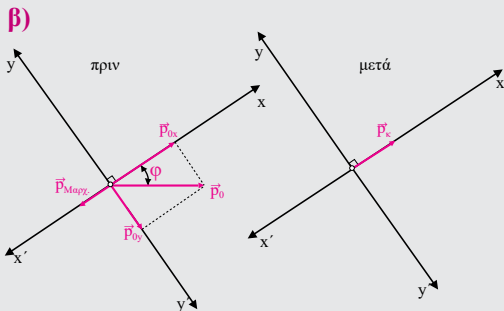
$$\Pi(\%) = \frac{3 \cdot m_1 \cdot 1}{m_1 \cdot 4} 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 75\%$$

1.58 α) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του κιβωτίου. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} M v^2 = M g \cdot \eta \mu \varphi \cdot S - \mu M g \cdot \sigma \nu \nu \varphi \cdot S \Rightarrow$$

$$|v| = \sqrt{2 g \cdot \eta \mu \varphi \cdot S - 2 \mu g \cdot \sigma \nu \nu \varphi \cdot S} \Rightarrow$$

$$|v| = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

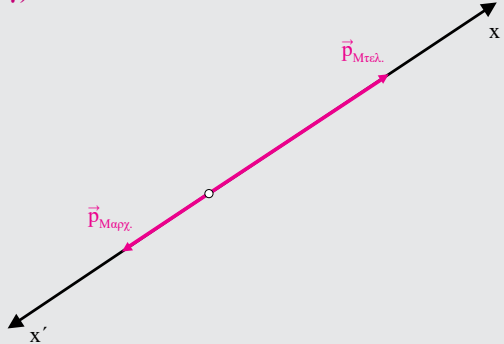


Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα $x'x$ προκύπτει:

$$m|v_0| \sigma \nu \nu \varphi - M|v| = (m + M)|v_k| \Rightarrow$$

$$|v_k| = \frac{m|v_0| \sigma \nu \nu \varphi - M|v|}{m + M} \Rightarrow |v_k| = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ)



Ισχύει:

$$\Delta \vec{p}_M = \vec{p}_{M, \text{τελ.}} - \vec{p}_{M, \text{αρχ.}} \Rightarrow$$

$$\Delta p_M = M|v_k| - (-M|v|) \Rightarrow \Delta p_M = 5,2 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Προκύπτει:

$$|\Delta p_M| = 5,2 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

δ) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{dt} = -(M + m)g \cdot \eta \mu \varphi - \mu(M + m)g \cdot \sigma \nu \nu \varphi \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{35\sqrt{3}}{12} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

Προκύπτει:

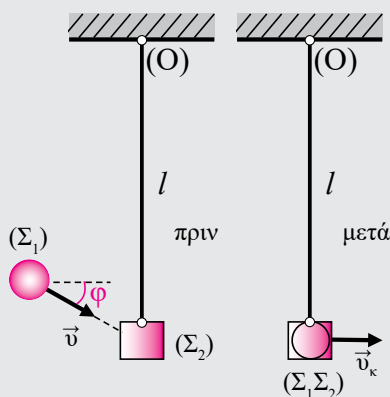
$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = \frac{35\sqrt{3}}{12} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

1.59 α) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Ισχύει:

$$0 - \frac{1}{2}(m + M)v_k^2 = -(m + M)gl \Rightarrow$$

$$|v_k| = \sqrt{2lg} \Rightarrow |v_k| = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β)



Για την πλαστική κρούση εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα $x'x$. Έχουμε:

$$m|v| \sigma \nu \nu \varphi = (m + M)|v_k| \Rightarrow$$

$$\frac{m|v|}{2} = (m + M)|v_k| \Rightarrow |v| = \frac{2(m + M)|v_k|}{m} \Rightarrow$$

$$|v| = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Για το ζητούμενο κλάσμα προκύπτει:

$$\kappa = \frac{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(m+M)v_{\kappa}^2}{\frac{1}{2}mv^2} \Rightarrow \kappa = \frac{39}{40}$$

δ) Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση διαγράφει κυκλική τροχιά. Στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του ασκούνται σε αυτό το βάρος του $\vec{w}_{\text{συσ}}$ και η τάση του νήματος $\vec{T}$. Η συνισταμένη των παραπάνω δυνάμεων έχει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Προκύπτει:

$$\Sigma F = F_{\kappa} \text{ ή } T + w_{\text{συσ}} = \frac{(m+M)v^2}{l} \Rightarrow$$

$$T = \frac{(m+M)v^2}{l} - (m+M)g$$

Για να εκτελέσει το συσσωμάτωμα ανακύκλωση θα πρέπει να φτάσει στο ανώτερο σημείο με το νήμα τεντωμένο ($T \geq 0$). Ισχύει:

$$T \geq 0 \text{ ή } \frac{(m+M)v^2}{l} - (m+M)g \geq 0 \text{ ή}$$

$$|v| \geq \sqrt{lg}$$

Το συσσωμάτωμα εκτελεί οριακά ανακύκλωση, επομένως για το μέτρο της ταχύτητάς του στο ανώτερο σημείο θα έχουμε:

$$|v_{\min}| = \sqrt{lg}$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.) για την κίνηση του συσσωματώματος από το σημείο που βρίσκεται αμέσως μετά την κρούση μέχρι το ανώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς του, για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}'_{\kappa}$ του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση:

$$\frac{1}{2}(m+M)v_{\min}^2 - \frac{1}{2}(m+M)v_{\kappa}^2 = -(m+M)g \cdot 2l \Rightarrow$$

$$\text{ή } lg - v_{\kappa}^2 = -4gl \Rightarrow |v'_{\kappa}| = \sqrt{5lg} \Rightarrow$$

$$|v'_{\kappa}| = \sqrt{62,5} \frac{m}{s}$$

Για την πλαστική κρούση εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα $x'x$. Έχουμε:

$$m|v'| \sin \varphi = (m+M)|v'_{\kappa}| \Rightarrow$$

$$\frac{m|v'|}{2} = (m+M)|v'_{\kappa}| \Rightarrow |v'| = \frac{2(m+M)|v_{\kappa}|}{m} \Rightarrow$$

$$|v'| = 20\sqrt{62,5} \frac{m}{s}$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Pi\% = \frac{\frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv^2} 100\% \Rightarrow v$$

1.60 α) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος μάζας m_1 . Προκύπτει:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 - 0 = m_1g \cdot \eta \mu \varphi \cdot AB \Rightarrow$$

$$|v_1| = \sqrt{2g \cdot \eta \mu \varphi \cdot AB} \Rightarrow$$

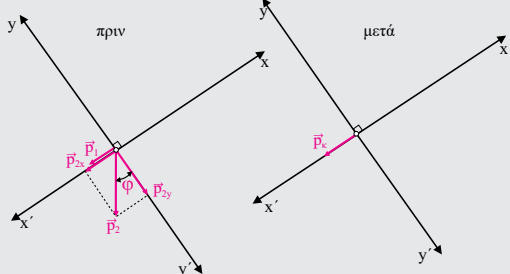
$$|v_1| = 4 \frac{m}{s}$$

Το σώμα μάζας m_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση. Εφαρμόζουμε πάλι το Θ.Μ.Κ.Ε. και έχουμε:

$$\frac{1}{2}m_2v_2^2 - 0 = m_2gh \Rightarrow |v_2| = \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

$$|v_2| = 13 \frac{m}{s}$$

β)



Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ο. στον άξονα $x'x$ έχουμε:

$$m_1 |v_1| + m_2 |v_2| \eta \mu \phi = (m_1 + m_2) |v_\kappa| \Rightarrow$$

$$|v_\kappa| = \frac{m_1 |v_1| + m_2 |v_2| \eta \mu \phi}{m_1 + m_2} \Rightarrow |v_\kappa| = 5 \frac{m}{s}$$

γ) Ισχύει:

$$B\Gamma = A\Gamma - AB \Rightarrow B\Gamma = 3,9 \text{ m}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_\tau^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_\kappa^2 =$$

$$= (m_1 + m_2) g \cdot \eta \mu \phi \cdot B\Gamma \Rightarrow$$

$$|v_\tau| = \sqrt{v_\kappa^2 + 2g \cdot \eta \mu \phi \cdot B\Gamma} \Rightarrow |v_\tau| = 8 \frac{m}{s}$$

1.61 α) Για να μην κοπεί το νήμα μετά την κρούση πρέπει η τάση του νήματος να είναι $T \leq T_\theta$.

$$\Sigma F = F_K \Rightarrow T - (m + M)g = \frac{(m + M)V^2}{l} \Rightarrow$$

$$T = (m + M)g + \frac{(m + M)V^2}{l} \stackrel{T \leq T_\theta}{\Rightarrow}$$

$$(m + M)g + \frac{(m + M)V^2}{l} \leq T_\theta \Rightarrow V \leq 4\sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$\text{Α.Α.Ο.: } \vec{P}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{P}_{\text{ολ}(\text{μετά})} \Rightarrow$$

$$m v_0 = (m + M) \cdot V \Rightarrow$$

$$V = \frac{m v_0}{m + M} \stackrel{V \leq 4\sqrt{3} \text{ m/s}}{\Rightarrow} v_0 \leq 200\sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$\text{Άρα } v_{0(\text{max})} = 200\sqrt{3} \text{ m/s}$$

β) Ισχύει:

$$v'_0 = \frac{v_{0(\text{max})}}{2} = 100\sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$\text{Α.Α.Ο.: } \vec{P}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{P}_{\text{ολ}(\text{μετά})} \Rightarrow$$

$$m v'_0 = (m + M) \cdot V' \Rightarrow$$

$$V' = \frac{m v'_0}{m + M} \Rightarrow V' = 2\sqrt{3} \text{ m/s}$$

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ανεβαίνει μέχρι ύψος h.

$$\text{Θ.Μ.Κ.Ε.: } \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(\text{τελ.})} - K_{(\text{αρχ.})} = W_W \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} (M + m) V'^2 = -(M + m) gh \Rightarrow$$

$$h = \frac{V'^2}{2g} \Rightarrow h = 0,6 \text{ m}$$

Για τη μέγιστη γωνία εκτροπής θ ισχύει:

$$\cos \theta = \frac{l - h}{l} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

γ) Η μέγιστη τιμή της τάσης που ασκεί το νήμα στο συσσωμάτωμα είναι όταν αυτό βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση.

Για να εκτελέσει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση ανακύκλωση πρέπει στο ανώτερο σημείο της κυκλικής του τροχιάς να έχει ταχύτητα:

$$v = \sqrt{gl} \quad (1)$$

Για την ταχύτητά του αμέσως μετά την κρούση και μέχρι το ανώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς έχουμε:

Θ.Μ.Κ.Ε.:

$$\Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow K_{(\text{τελ.})} - K_{(\text{αρχ.})} = W_w \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} (M + m) v^2 - \frac{1}{2} (M + m) V'^2 = -(M + m) g 2l \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$gl - V'^2 = -4gl \Rightarrow V'' = \sqrt{5gl} \Rightarrow$$

$$V'' = \sqrt{60} \text{ m/s}$$

$$\Sigma F = F_K \Rightarrow T' - (m + M)g = \frac{(m + M) V''^2}{l} \Rightarrow$$

$$T' = (m + M)g + \frac{(m + M) V''^2}{l} \Rightarrow$$

$$T' = 60 \text{ N}$$

Για την ταχύτητα του βλήματος πριν την κρούση έχουμε:

$$\text{Α.Α.Ο.: } \vec{P}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{P}_{\text{ολ}(\text{μετά})} \Rightarrow$$

$$m v''_0 = (m + M) \cdot V'' \Rightarrow$$

$$v''_0 = 50\sqrt{60} \text{ m/s}$$

Η αρχική κινητική ενέργεια του βλήματος είναι:

$$K_{\beta\lambda.} = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow K_{\beta\lambda.} = 1500 \text{ J}$$

1.62 α) Ισχύει:

$$\eta\mu\varphi = \frac{h_1}{s_1} \Rightarrow s_1 = \frac{h_1}{\eta\mu\varphi} \Rightarrow s_1 = 1,8 \text{ m}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 από το σημείο Α μέχρι το σημείο Γ. Προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 &= \\ &= m_1 g \cdot \eta\mu\varphi \cdot s_1 - \mu m_1 g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot s_1 \Rightarrow \\ |v_1| &= \sqrt{v_0^2 + 2g \cdot \eta\mu\varphi \cdot s_1 - 2\mu g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot s_1} \Rightarrow \\ |v_1| &= 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

β) Ορίζουμε ως θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_1$.

Για την ταχύτητα του Σ_1 λίγο μετά την κρούση έχουμε:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v'_1 = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow |v'_1| = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Για την ταχύτητα του Σ_2 λίγο μετά την κρούση έχουμε:

$$v'_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v'_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow |v'_2| = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ) Ισχύει:

$$\eta\mu\varphi = \frac{h - h_1}{s_2} \quad \text{ή} \quad s_2 = \frac{h - h_1}{\eta\mu\varphi} \Rightarrow s_2 = 4 \text{ m}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 από το σημείο Γ μέχρι να φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_2 v_\tau^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 &= \\ &= m_2 g \cdot \eta\mu\varphi \cdot s_2 - \mu m_2 g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot s_2 \Rightarrow \\ |v_\tau| &= \sqrt{v_2'^2 + 2g \cdot \eta\mu\varphi \cdot s_2 - 2\mu g \cdot \eta\mu\varphi \cdot s_2} \Rightarrow \\ |v_\tau| &= 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_\tau = +6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

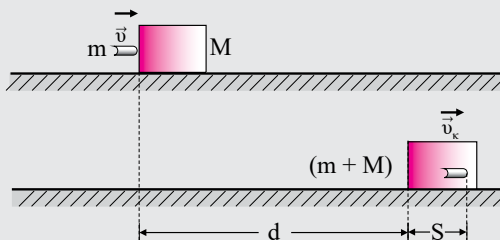
Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας βαρύτητας του σώματος Σ_2 τη στιγμή που φτά-

νει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dU}{dt} = -m_2 g \cdot \eta\mu\varphi \cdot v_\tau \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -90 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

ΘΕΜΑ Δ

1.63 α)



Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση. Προκύπτει:

$$m|v| = (m + 4m)|v_k| \Rightarrow |v_k| = \frac{|v|}{5}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του βλήματος. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_k^2 - \frac{1}{2} m v^2 &= -F(d + s) \Rightarrow \\ \frac{1}{2} m \frac{v^2}{25} - \frac{1}{2} m v^2 &= -F(d + s) \Rightarrow \\ -\frac{24}{50} m v^2 &= -F(d + s)(1) \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του κιβωτίου. Ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} 4m v_k^2 &= Fd \Rightarrow \frac{1}{2} 4m \frac{v^2}{25} = Fd \Rightarrow \\ \frac{4}{50} m v^2 &= Fd(2) \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$s = \frac{0,4 m v^2}{F} \Rightarrow s = 2 \text{ m}$$

β) Με τη βοήθεια της σχέσης (2) προκύπτει:

$$d = \frac{4mv^2}{50F} \Rightarrow d = 0,4 \text{ m}$$

γ) Το βλήμα κατά την εισχώρησή του στο κιβώτιο εκτελεί μια ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. Ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow$$

$$|\alpha| = \frac{|F|}{m} \Rightarrow |\alpha| = 2000 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Προκύπτει:

$$|v_k| = |v| - |\alpha| \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{|v| - |v_k|}{\alpha} \Rightarrow \Delta t = 0,04 \text{ s}$$

δ) Υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος μετά από 0,01 s από τη στιγμή που άρχισε να εισχωρεί στο κιβώτιο. Προκύπτει:

$$|v'| = |v| - |\alpha| \cdot \Delta t' \Rightarrow |v'| = 80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του βλήματος εκείνη τη στιγμή είναι:

$$\left| \frac{dK}{dt} \right| = |\Sigma F| \cdot |v'| \Rightarrow \left| \frac{dK}{dt} \right| = |-F| \cdot |v'| \Rightarrow$$

$$\left| \frac{dK}{dt} \right| = 16 \cdot 10^4 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

1.64 α) Για το μέτρο της ταχύτητας του Σ_1 προκύπτει:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = 0,64 \cdot m_1 gH \Rightarrow |v_1| = 0,8 \sqrt{2gH} \Rightarrow$$

$$|v_1| = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Προκύπτει:

$$-\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_k^2 = -(m_1 + m_2) gl \Rightarrow$$

$$|v_k| = \sqrt{2gl} \Rightarrow |v_k| = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Από την εφαρμογή της Α.Δ.Ο. έχουμε:

$$m_1 |v_1| = (m_1 + m_2) |v_k| \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{5}{3}$$

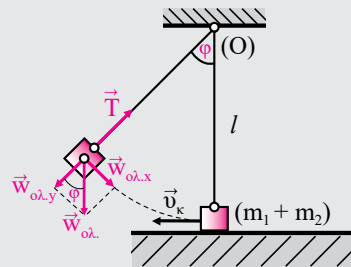
γ) Το ζητούμενο ποσοστό (%) είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_k^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{m_1 v_1^2 - 1,6 m_1 v_k^2}{m_1 v_1^2} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = 37,5\%$$

δ)



Ισχύει:

$$\sin \varphi = \frac{l-h}{l} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{l-h}{l} \Rightarrow h = \frac{l}{2}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος. Έχουμε:

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_k^2 =$$

$$= -(m_1 + m_2) gh \Rightarrow$$

$$v^2 - 2gl = -gl \Rightarrow |v| = \sqrt{gl}$$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = |\Sigma F| = \sqrt{\Sigma F_x^2 + \Sigma F_y^2} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = \sqrt{w_{ol,x}^2 + F_k^2} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = \sqrt{[(m_1 + m_2)g \cdot \eta \mu \varphi]^2 + \left[\frac{(m_1 + m_2) v^2}{l} \right]^2} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = 8\sqrt{7}N$$

1.65 α) Αφού η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, οι ταχύτητες των Σ_1 και Σ_2 σωμάτων μετά την κρούση (θεωρώντας θετική τη φορά προς τα αριστερά) υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$v_1' = \frac{m-2m}{m+2m} v_0 \Rightarrow v_1' = -2m/s$$

(άρα κινείται προς τα δεξιά) και

$$v_2' = \frac{2m}{m+2m} v_0 \Rightarrow v_2' = 4m/s.$$

Το Σ_3 δε συμμετέχει στην κρούση άρα $v_3' = 0$.

β) Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 μετά την κρούση εκτελούν ευθύγραμμες ομαλές κινήσεις.

Το Σ_2 συγκρούεται με τον τοίχο την χρονική

στιγμή $t_1 = \frac{d}{v_2'} \cdot t_1 = 1s$. Έπειτα επειδή η κρούση του με τον τοίχο είναι ελαστική αλλάζει φορά κίνησης χωρίς να αλλάξει το μέτρο της ταχύτητάς του. Έτσι τη χρονική στιγμή $t_2 = 2s$ το Σ_1 θα συγκρουστεί με το Σ_3 που βρισκόταν στην αρχική του θέση. Επειδή η κρούση είναι κεντρική και ελαστική και τα σώματα Σ_2 και Σ_3 έχουν ίσες μάζες θα ανταλλάξουν ταχύτητες άρα το Σ_2 θα σταματήσει και το Σ_3 αρχίζει και κινείται με ταχύτητα $v_3'' = -4 \frac{m}{s}$.

Τη χρονική στιγμή $t' = 3s$ το Σ_3 θα έχει διανύσει απόσταση $x_3 = v_3''(t' - t_2) = 4m$.

Το Σ_1 μετά την 1^η κρούση και μέχρι τη χρονική στιγμή $t' = 3s$ διανύει απόσταση $x_1 = |v_1'| \cdot t' = 6m$. Άρα δεν έχει προλάβει ακόμα το Σ_3 να φτάσει το Σ_1 οπότε και οι ταχύτητες των σωμάτων τη χρονική στιγμή $t' = 3s$

είναι $v_1' = 2 \frac{m}{s}$ (προς τα δεξιά), $v_2'' = 0$ και

$v_3'' = -4 \frac{m}{s}$ (προς τα δεξιά).

γ) Επειδή $|v_3''| > |v_1'|$ τα σώματα Σ_3 και Σ_1 θα συγκρουστούν κάποια χρονική στιγμή t_3 . Όταν συγκρουστούν με αφετηρία τη στιγμή που το Σ_2 συγκρούεται με το Σ_3 πρέπει:

$$x_3' = x_1' + |v_1'| t_2 \Rightarrow |v_3''| t'' = |v_1'| t'' + 4 \Rightarrow t'' = 2s.$$

Οπότε $t_3 = t_2 + t'' \Rightarrow t_3 = 4s$.

Οι ταχύτητές τους μετά την κρούση είναι:

$$v_3''' = \frac{2m-m}{2m+m} v_3'' + \frac{2m}{2m+m} v_1' \Rightarrow v_3''' = -\frac{8}{3} \frac{m}{s}$$

$$v_1'' = \frac{m-2m}{2m+m} v_1' + \frac{2 \cdot 2m}{2m+m} v_3'' \Rightarrow v_1'' = -\frac{14}{3} \frac{m}{s}$$

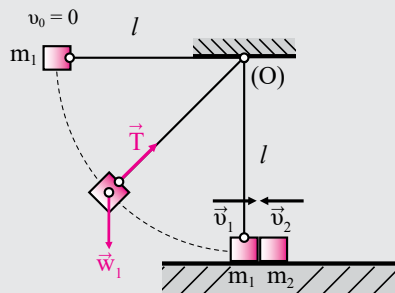
Επειδή $|v_3'''| < |v_1''|$ τα σώματα Σ_3 και Σ_1 δε θα συγκρουστούν άλλη φορά. Άρα ο **συνολικός αριθμός όλων των κρούσεων που πραγματοποιούνται είναι 4** (μαζί με την κρούση του Σ_2 με τον τοίχο).

δ) Ισχύει: $t_3 = 4s$

ε) Ισχύει:

$$\Pi = \frac{K_1''}{K_1} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} m v_1''^2}{\frac{1}{2} m v_0^2} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi = \frac{4900}{81} \%$$

1.66 α)



Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 . Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 = m_1 g l \Rightarrow |v_1| = \sqrt{2gl} \Rightarrow |v_1| = 4 \frac{m}{s}$$

Ορίζοντας ως θετική τη φορά προς τα δεξιά έχουμε:

$$v_1 = +4 \frac{m}{s}$$

β) Υπολογίζουμε τις αλγεβρικές τιμές τιμές των ταχυτήτων των 2 σωμάτων αμέσως μετά την κρούση:

Ισχύει:

$$0 = |v_k| - |\alpha| \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{|v_k|}{|\alpha|} \Rightarrow \Delta t = 4 \text{ s}$$

Η μέση ισχύς της τριβής ολίσθησης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\bar{P} = \frac{W_T}{\Delta t} \Rightarrow \bar{P} = -50 \text{ W}$$

1.68 α) Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα x'x. Προκύπτει:

$$m|v_\beta| \cdot \sigma \nu \nu \phi + M|v_0| = (m + M)|v_k| \Rightarrow$$

$$|v_k| = \frac{m|v_\beta| \cdot \sigma \nu \nu \phi + M|v_0|}{m + M} \Rightarrow |v_k| = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Για τη μεταβολή της ορμής του συστήματος λόγω της κρούσης έχουμε:

$$\Delta \vec{p}_{\sigma \nu \sigma} = \Delta \vec{p}_{\sigma \nu \sigma, x} + \Delta \vec{p}_{\sigma \nu \sigma, y} \Rightarrow$$

$$\Delta \vec{p}_{\sigma \nu \sigma} = \vec{0} + \Delta \vec{p}_y \Rightarrow |\Delta p_{\sigma \nu \sigma}| = m v_\beta \cdot \eta \mu 60^\circ \Rightarrow$$

$$|\Delta p| = 61 \cdot \sqrt{3} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

γ) Ισχύει:

$$\frac{dK}{dt} = -\mu(m + M)g v'_k \Rightarrow$$

$$v'_k = \frac{\frac{dK}{dt}}{-\mu(m + M)g} \Rightarrow v'_k = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Τελικά, έχουμε:

$$|p'_k| = (m + M)v'_k \Rightarrow |p'_k| = 60 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

δ) Ισχύει:

$$\frac{1}{2}(M + m)v_k''^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}(M + m)v_k^2 \Rightarrow$$

$$|v_k''| = \frac{v_k}{2} \Rightarrow |v_k''| = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ο ρυθμός με τον οποίο εκλύεται θερμότητα λόγω της τριβής ολίσθησης είναι:

$$\frac{dQ_T}{dt} = |-T v_k'| \Rightarrow \frac{dQ_T}{dt} = |-\mu(m + M)g v_k''| \Rightarrow$$

$$\frac{dQ_T}{dt} = 200 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

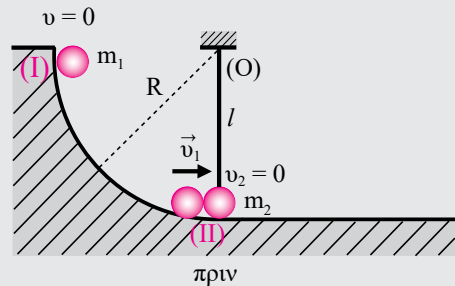
1.69 α) Για την κίνηση του m_1 από τη στιγμή που αφήνεται από το ανώτερο σημείο του τεταρτοκυκλίου και μέχρι τη βάση του, εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

$$\Theta.M.K.E._{(I) \rightarrow (II)}: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(II)} - K_{(I)} = W_{W_1} + W_{T_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = m_1 g R \Rightarrow$$

$$v_1 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

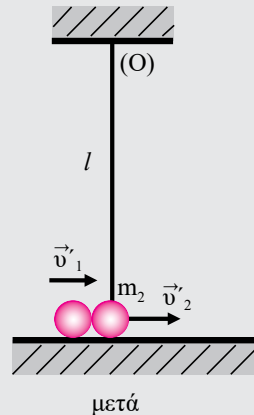


Αφού η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, η ταχύτητα του m_1 μετά την κρούση θα δίνεται από τον τύπο:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow m_1 = 2 \text{ kg}$$

β) Η ταχύτητα του m_2 μετά την κρούση θα δίνεται από τον τύπο:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v'_2 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Το % ποσοστό της αρχικής δυναμικής ενέργειας του σώματος m_1 που μεταβιβάστηκε στο m_2 , υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Pi\% = \frac{K'_2}{U_1} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{m_1 g R} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi\% = \frac{800}{9} \%$$

γ) Για την κίνηση του m_1 μετά την κρούση εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

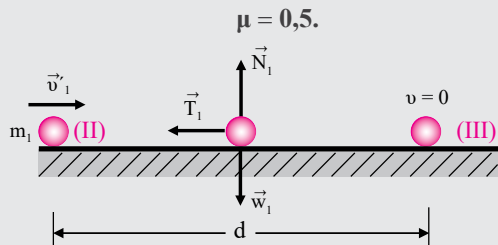
$$\text{Θ.Μ.Κ.Ε.}_{(II) \rightarrow (III)}: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(III)} - K_{(II)} = W_{T_1} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -T_1 d \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -\mu m_1 g d \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{v_1'^2}{2gd} \Rightarrow$$



δ) Για να μπορέσει το σώμα m_2 να εκτελέσει την ανακύκλωση, πρέπει να περάσει από το ανώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς του και εκεί το νήμα να είναι τεντωμένο δηλαδή: $T \geq 0$ ($T = 0$ οριακά).

Στη θέση αυτή (Α):

$$\Sigma F = F_k \Rightarrow T + W_2 = \frac{m_2 v^2}{l} \Rightarrow$$

$$T = \frac{m_2 v^2}{l} - m_2 g \quad (1)$$

Αλλά:

$$T \geq 0, \text{ άρα } (1) \Rightarrow \frac{m_2 v^2}{l} - m_2 g \geq 0 \Rightarrow$$

$$v \geq \sqrt{gl} \Rightarrow v_{\min} \geq \sqrt{gl} \Rightarrow$$

$$v_{\min} = \sqrt{18} \frac{m}{s}$$

Για την ταχύτητα που θα έπρεπε να είχε μετά την κρούση έτσι ώστε να φτάσει μέχρι το ανώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς του, εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

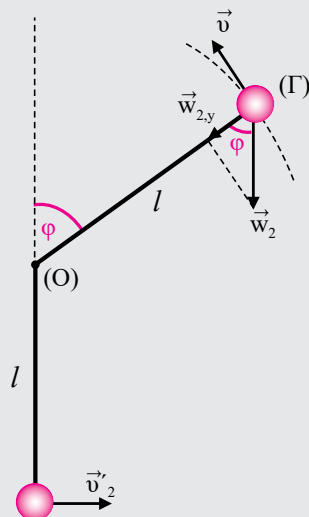
$$\text{Α.Δ.Μ.Ε.}: E_{\text{MHX}(\text{αρχ.})} = E_{\text{MHX}(\text{τελ.})} \Rightarrow$$

$$K_{(\text{αρχ.})} + U_{(\text{αρχ.})} = K_{(\text{τελ.})} + U_{(\text{τελ.})} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{\min}^2 + m_2 g 2l \Rightarrow$$

$$v_2' = \sqrt{90} \frac{m}{s} > 8 \frac{m}{s}$$

Άρα το m_2 δεν κάνει ανακύκλωση.



Στο ανώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς (θέση Γ) στο οποίο φθάνει τελικά το σώμα m_2 έχει ταχύτητα διάφορη από μηδέν και ισχύει:

$$\Sigma F = F_k \Rightarrow T + W_{2,y} = \frac{m_2 v^2}{l} \Rightarrow$$

$$T = \frac{m_2 v^2}{l} - m_2 g \sin \varphi$$

Στη θέση αυτή όμως το νήμα χαλαρώνει, οπότε:

$$T = 0 \Rightarrow \frac{m_2 v^2}{l} - m_2 g \sin \varphi = 0 \Rightarrow v^2 = g / \sin \varphi$$

Ισχύει επίσης λόγω διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:

$$\begin{aligned} \text{Α.Δ.Μ.Ε.: } E_{\text{MHX}(\text{αρχ.})} &= E_{\text{MHX}(\text{τελ.})} \Rightarrow \\ K_{(\text{αρχ.})} + U_{(\text{αρχ.})} &= K_{(\text{τελ.})} + U_{(\text{τελ.})} \Rightarrow \\ \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 &= \frac{1}{2} m_2 v^2 + m_2 g l (1 + \sin \varphi) \Rightarrow \\ 32 &= 9 \sin \varphi + 18 + 18 \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{14}{27} \end{aligned}$$

Άρα $v^2 = g / \sin \varphi = \frac{28}{3} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$. Οπότε έχουμε

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v^2 \Rightarrow K_2 = \frac{14}{3} \text{ J}$$

1.70 α) Για την κίνηση της σφαίρας μέχρι να συναντήσει την κεκλιμένη επιφάνεια έχουμε:

$$\begin{aligned} \Theta.\text{Μ.Κ.Ε.: } \Delta K &= \Sigma W_F \Rightarrow \\ K_{(\text{τελ.})} - K_{(\text{αρχ.})} &= W_w \Rightarrow \\ \frac{1}{2} m v^2 &= m g h \Rightarrow v = \sqrt{2 g h} \Rightarrow \\ v &= 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

β) Μετά την κρούση της σφαίρας με την κεκλιμένη επιφάνεια, η σφαίρα κινείται οριζόντια με ταχύτητα ίδιου μέτρου με αυτό που είχε πριν την κρούση της με αυτή.

Για τον συνολικό χρόνο έχουμε:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,4 \text{ s} \quad \text{και} \quad t_2 = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = 0,6 \text{ s}$$

$$\text{οπότε } t_{\text{ολ.}} = t_1 + t_2 \Rightarrow t_{\text{ολ.}} = 1 \text{ s}$$

γ) Για τη θέση του σημείου που η σφαίρα φτάνει στο έδαφος, έχουμε:

$$x = v \cdot t_2 \Rightarrow x = 2,4 \text{ m}$$

δ) $\Theta.\text{Μ.Κ.Ε.: } \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$

$$K_{(\text{τελ.})} - K_{(\text{αρχ.})} = W_w \Rightarrow$$

$$K_{(\text{τελ.})} - \frac{1}{2} m v^2 = m g (H - h) \Rightarrow$$

$$K_{(\text{τελ.})} = 52 \text{ J.}$$

1.71 α) Ισχύει:

$$|v_o'| = \frac{|v_o|}{5} \Rightarrow |v_o'| = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ο. προκύπτει:

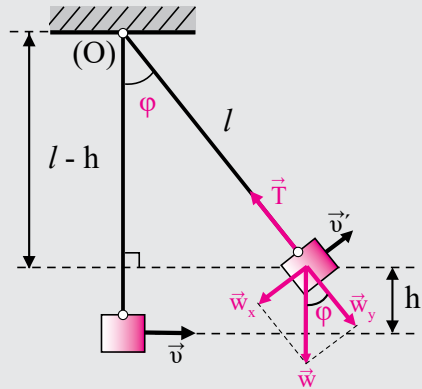
$$m |v_o| = m |v_o'| + M |v| \Rightarrow$$

$$|v| = \frac{m |v_o| - m |v_o'|}{M} \Rightarrow |v| = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Η απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι:

$$E_{\text{απωλ.}} = \frac{1}{2} m v_o^2 - \frac{1}{2} m v_o'^2 - \frac{1}{2} M v^2 \Rightarrow E_{\text{απωλ.}} = 464 \text{ J}$$

γ)



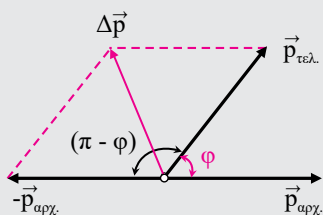
Ισχύει:

$$\sin 60^\circ = \frac{l-h}{l} \quad \text{ή} \quad h = \frac{l}{2}$$

Εφαρμόζουμε το $\Theta.\text{Μ.Κ.Ε.}$ για την κίνηση του σώματος μάζας M μετά την κρούση. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} M v'^2 - \frac{1}{2} M v^2 = -M g h \Rightarrow |v'| = \sqrt{v^2 - 2 g \frac{l}{2}} \Rightarrow$$

$$|v'| = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Έχουμε:

$$|p_{apx}| = M|v| \Rightarrow |p_{apx}| = 8 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

$$|p_{tel}| = M|v'| \Rightarrow |p_{tel}| = 4 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Προκύπτει:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{tel} - \vec{p}_{apx} \Rightarrow \Delta \vec{p} = \vec{p}_{tel} + (-\vec{p}_{apx}) \Rightarrow$$

$$|\Delta p| = \sqrt{p_{tel}^2 + p_{apx}^2 + 2p_{apx}p_{tel} \cdot \cos 120^\circ} \Rightarrow$$

$$|\Delta p| = 4\sqrt{3} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

δ) Ισχύει:

$$\Sigma F_y = F_k \Rightarrow T - w_y = F_k \Rightarrow$$

$$T = Mg \cdot \sin \varphi + F_k (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η τιμή της τάσης του νήματος T γίνεται μέγιστη όταν $\sin \varphi = 1$, δηλαδή $\varphi = 0^\circ$ (στην κατώτερη θέση αμέσως μετά την κρούση). Προκύπτει:

$$T = Mg + \frac{M \cdot v^2}{l} \Rightarrow T = \frac{140}{3} \text{ N}$$

1.72 Α) α) Οι 2 σφαίρες εκτελούν οριζόντιες βολές ταυτόχρονα. Κάθε χρονική στιγμή βρίσκονται στο ίδιο ύψος από το έδαφος. Όταν συγκρουστούν έχουμε:

$$x_1 + x_2 = d \Rightarrow v_{0,1}t_1 + v_{0,2}t_1 = d \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}$$

β) Για τις ταχύτητες των δύο σφαιρών πριν από την κρούση ισχύουν:

$$v_{1,y} = v_{2,y} = gt_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_1 = v_2 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Rightarrow v_1 = v_2 = 20\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Η γωνία φ που σχηματίζει η ταχύτητα των 2 σωμάτων πριν την κρούση με την οριζόντια διεύθυνση είναι:

$$\eta \mu \varphi = \frac{v_{1,y}}{v_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

οπότε η γωνία που σχηματίζουν οι 2 ταχύτητες $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ πριν την κρούση είναι:

$$\theta = 2\varphi = 90^\circ$$

$$\text{Α.Δ.Ο.: } \vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \Rightarrow$$

$$\sqrt{(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2} =$$

$$(m_1 + m_2) \cdot V \stackrel{m_1=m_2}{\Rightarrow} V = \frac{\sqrt{2}v_1}{2} \Rightarrow$$

$$V = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Στη συνέχεια το συσσωμάτωμα εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα κάτω από ύψος:

$$h = H - y = H - \frac{1}{2}gt_1^2 = 25 \text{ m}$$

Όταν φτάσει στο έδαφος ισχύει:

$$h = Vt'_1 + \frac{1}{2}gt_1'^2 \Rightarrow 5t_1'^2 + 20t'_1 - 25 = 0 \Rightarrow$$

$$t'_1 = 1 \text{ s}$$

Άρα η χρονική στιγμή t_2 που το συσσωμάτωμα φτάνει στο έδαφος είναι:

$$t_2 = t_1 + t'_1 \Rightarrow t_2 = 3 \text{ s}$$

Β) Όταν το συσσωμάτωμα φτάσει στο έδαφος έχει ταχύτητα:

$$v = V + gt'_1 = 30 \text{ m/s}$$

Αφού το συσσωμάτωμα έχει χάσει το 75% της αρχικής του κινητικής ενέργειας τότε μετά την κρούση με το έδαφος έχει το 25% = $\frac{1}{4}$ της αρχικής του κινητικής ενέργειας.

$$K' = \frac{K}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 \Rightarrow$$

$$v' = \frac{v}{2} = 15 \text{ m/s}$$

δ) Για το μέτρο της μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 |\Delta p| &= |p_{\text{μετά}} - p_{\text{πριν}}| = \\
 &= |(m_1 + m_2)v' - (-(m_1 + m_2)v)| = \\
 &= |(m_1 + m_2)(v' + v)| \Rightarrow \\
 |\Delta p| &= 9 \text{ kg} \cdot \text{m/s}
 \end{aligned}$$

ε) Θ.Μ.Κ.Ε.:

$$\begin{aligned}
 \Delta K &= \Sigma W_F \Rightarrow \\
 K_{(\text{τελ.})} - K_{(\text{αρχ.})} &= W_w \Rightarrow \\
 -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 &= -(m_1 + m_2)gh' \Rightarrow \\
 h' &= \frac{v'^2}{2g} \Rightarrow h = 11,25 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 2: Μηχανική στερεού σώματος

ΘΕΜΑ Α

- 2.1 δ) 2.2 β) 2.3 β) 2.4 δ)
 2.5 α) 2.6 α) 2.7 α) 2.8 γ)
 2.9 γ) 2.10 α) 2.11 β) 2.12 α)
 2.13 β) 2.14 α) 2.15 γ) 2.16 β)
 2.17 β) 2.18 γ) 2.19 δ)

- 2.20 α) Σ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ
 2.21 α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ
 2.22 α) Λ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ
 2.23 α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

2.24 Σωστή απάντηση είναι η γ).

1) $t_0 = 0 \rightarrow t_1 = 1 \text{ s}$

Ισχύει:

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{\Delta \theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{\omega_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t^2}{2\pi} \Rightarrow \\
 N &= \left(\frac{10 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1}{2\pi} \right) \text{περ.} \Rightarrow N = \frac{6}{\pi} \text{περ. (1)}
 \end{aligned}$$

2) $t_1 = 1 \text{ s} \rightarrow t_2 = 2 \text{ s}$

Ισχύει:

$$\begin{aligned}
 N' &= \frac{\Delta \theta'}{2\pi} \Rightarrow N' = \frac{\omega_1 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t^2}{2\pi} \Rightarrow \\
 N' &= \frac{(\omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t^2}{2\pi} \Rightarrow \\
 N' &= \left(\frac{14 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1}{2\pi} \right) \text{περ.} \Rightarrow N' = \frac{8}{\pi} \text{περ. (2)}
 \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$N' = \frac{4}{3} N$$

2.25 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Σώμα Σ_1 , ισχύει:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \frac{\omega - 0}{t_1} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \frac{\omega}{t_1}$$

Η χρονική εξίσωση της γωνιακής ταχύτητας του Σ_1 είναι:

$$\omega_{(1)} = \alpha_{\gamma\omega\nu,1} t \Rightarrow \omega_{(1)} = \frac{\omega}{t_1} t$$

Σώμα Σ_2 , ισχύει:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \frac{0,5\omega - 2\omega}{t_1} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \frac{-1,5\omega}{t_1}$$

Η χρονική εξίσωση της γωνιακής ταχύτητας του Σ_2 είναι:

$$\omega_{(2)} = 2\omega + \alpha_{\gamma\omega\nu,2}t \Rightarrow \omega_{(2)} = 2\omega - \frac{1,5\omega}{t_1}t$$

Τη χρονική στιγμή που οι γωνιακές ταχύτητες των δύο στερεών είναι ίσες, θα ισχύει:

$$\omega_{(1)} = \omega_{(2)} \Rightarrow \frac{\omega}{t_1}t = 2\omega - \frac{1,5\omega}{t_1}t \Rightarrow t = 0,8t_1$$

2.26 Σωστή απάντηση είναι η α).

Βρίσκουμε την αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιβράδυνσης κατά τη χρονική διάρκεια $2s \rightarrow 4s$. Ισχύει:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \left(\frac{10-20}{4-2} \right) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = -5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Υπολογίζουμε την αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας του στερεού τη χρονική στιγμή $t = 3 \text{ s}$. Προκύπτει:

$$\omega_3 = \omega_2 - |\alpha_{\gamma\omega\nu,2}| \cdot \Delta t \Rightarrow$$

$$\omega_3 = (20 - 5 \cdot 1) \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega_3 = 15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Με εμβαδομέτρηση προκύπτει:

$$\Delta\theta = \left[\frac{(10+15) \cdot 1}{2} + 2 \cdot 10 \right] \text{rad} \Rightarrow \Delta\theta = 32,5 \text{ rad}$$

Ο αριθμός των περιστροφών που εκτέλεσε το στερεό από τη χρονική στιγμή $t = 3 \text{ s}$ έως τη χρονική στιγμή $t = 6 \text{ s}$ είναι:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{16,25}{\pi} \text{ περ.}$$

2.27 Σωστή απάντηση είναι η β).

Ισχύει:

$$\alpha = \sqrt{\alpha_{\varepsilon}^2 + \alpha_{\kappa}^2} \Rightarrow \alpha = \sqrt{(\alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R)^2 + (\omega^2 \cdot R)^2} \Rightarrow$$

$$\alpha = R \cdot \sqrt{\alpha_{\gamma\omega\nu}^2 + \omega^4}$$

2.28 Σωστή απάντηση είναι η β).

Ισχύει:

$$\frac{s_{\Gamma}}{s_{\Delta}} = \frac{\frac{R}{2} \cdot \Delta\theta}{\left(R - \frac{R}{3}\right) \cdot \Delta\theta} \Rightarrow \frac{s_{\Gamma}}{s_{\Delta}} = \frac{\frac{R}{2} \cdot \omega \cdot \Delta t}{\left(R - \frac{R}{3}\right) \cdot \omega \cdot \Delta t} \Rightarrow$$

$$\frac{s_{\Gamma}}{s_{\Delta}} = \frac{3}{4}$$

2.29 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Βρίσκουμε την αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης κατά τη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow 5s$. Ισχύει:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \left(\frac{10-5}{5-0} \right) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,1} = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Υπολογίζουμε την αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 3 \text{ s}$. Προκύπτει:

$$\omega_3 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu,1} \cdot \Delta t \Rightarrow$$

$$\omega_3 = 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Βρίσκουμε την αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης κατά τη χρονική διάρκεια $5s \rightarrow 15s$. Ισχύει:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \left(\frac{-10-10}{15-5} \right) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = -2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Υπολογίζουμε την αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 13 \text{ s}$. Προκύπτει:

$$\omega_{13} = \omega_5 - |\alpha_{\gamma\omega v, 2}| \cdot \Delta t \Rightarrow$$

$$\omega_{13} = [10 - 2 \cdot (13 - 5)] \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega_{13} = -6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Προκύπτει:

$$\frac{\alpha_{\kappa 3}}{\alpha_{\kappa 13}} = \frac{\omega_3^2 \cdot R}{\omega_{13}^2 \cdot R} \Rightarrow \frac{\alpha_{\kappa 3}}{\alpha_{\kappa 13}} = \frac{16}{9}$$

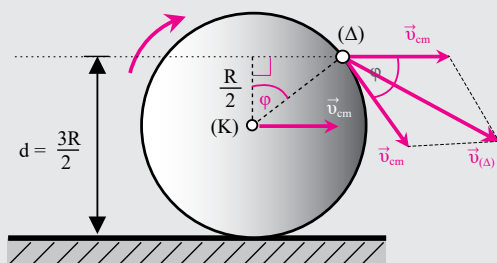
2.30 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Έστω ότι ο δίσκος θα ακινητοποιηθεί τη χρονική στιγμή t . Προκύπτει:

$$\omega_{\text{τελ}} = \omega_0 + E_1 + E_2$$

$$0 = 12 + 2 \cdot 2 + (t - 2) \cdot (-4) \Rightarrow t = 6 \text{ s}$$

2.31 Σωστή απάντηση είναι η γ).



Ισχύει:

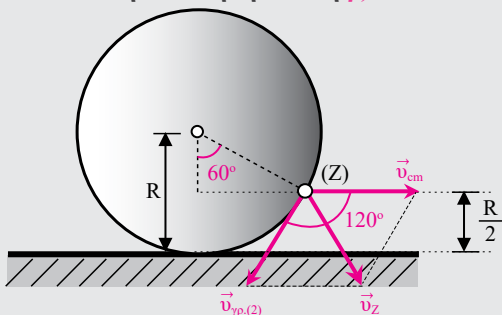
$$v_{\gamma p, \Delta} = v_{\text{cm}} = \omega R$$

Προκύπτει:

$$v_{\Delta} = \sqrt{v_{\gamma p, \Delta}^2 + v_{\text{cm}}^2 + 2v_{\gamma p, \Delta} v_{\text{cm}} \cdot \cos 60^\circ} \Rightarrow$$

$$v_{\Delta} = \sqrt{3} v_{\text{cm}}$$

2.32 Σωστή απάντηση είναι η β).



Ισχύει:

$$v_{\gamma p, Z} = v_{\text{cm}} = \omega R$$

Προκύπτει:

$$v_Z = \sqrt{v_{\gamma p, Z}^2 + v_{\text{cm}}^2 + 2v_{\gamma p, Z} v_{\text{cm}} \cdot \cos 120^\circ} \Rightarrow$$

$$v_Z = v_{\text{cm}}$$

2.33 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$\alpha_{\gamma\omega v, 1} = \frac{\omega_1}{t_1} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega v, 1} = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Επίσης ισχύει:

$$\alpha_{\gamma\omega v, 1} R_1 = \alpha_{\gamma\omega v, 2} R_2 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega v, 2} = \frac{\alpha_{\gamma\omega v, 1} R_1}{R_2} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega v, 2} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Ο αριθμός των περιστροφών που εκτελεί ο τροχός (1) είναι:

$$N_1 = \frac{\frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega v, 1} t_1^2}{2\pi} \Rightarrow N_1 = \left(\frac{\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 16}{2\pi} \right) \text{περ.} \Rightarrow$$

$$N_1 = \frac{20}{\pi} \text{περ.}$$

Ο αριθμός των περιστροφών που εκτελεί ο τροχός (2) είναι:

$$N_2 = \frac{\frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega v, 2} t_1^2}{2\pi} \Rightarrow N_2 = \left(\frac{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 16}{2\pi} \right) \text{περ.} \Rightarrow$$

$$N_2 = \frac{40}{\pi} \text{περ.}$$

2.34 Σωστή απάντηση είναι η β).

Επειδή $v_{\Delta} = \sqrt{2} v_{\text{cm}}$ το σημείο Δ ανήκει πάνω στην οριζόντια διάμετρο. Επομένως ισχύει:

$$\Gamma\Delta^2 = R^2 + O\Gamma^2 \Rightarrow \frac{5R^2}{4} = R^2 + O\Gamma^2 \Rightarrow$$

$$O\Gamma = \frac{R}{2}$$

Προκύπτει:

$$v_{\Gamma} = \omega R + \omega \frac{R}{2} \Rightarrow v_{\Gamma} = \frac{3v_{cm}}{2}$$

Τελικά έχουμε:

$$\frac{v_{\Gamma}}{v_{\Delta}} = \frac{\frac{3 \cdot v_{cm}}{2}}{\sqrt{2}v_{cm}} \Rightarrow \frac{v_{\Gamma}}{v_{\Delta}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4}$$

2.35 Σωστή απάντηση είναι η β).

Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$v_{\Delta,1} = v \Rightarrow \omega R + \omega \frac{R}{2} = v \Rightarrow \frac{3v_{cm}}{2} = v \Rightarrow v_{cm} = \frac{2v}{3}$$

Τη χρονική στιγμή t_2 ισχύει:

$$v_{\Delta,2} = \sqrt{v_{cm}^2 + \left(\frac{v_{cm}}{2}\right)^2} \Rightarrow v_{\Delta,2} = \frac{\sqrt{5}v_{cm}}{2} \Rightarrow v_{\Delta,2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2v}{3} \Rightarrow v_{\Delta,2} = \frac{\sqrt{5}}{3}v$$

2.36 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$v_{\Delta} = v_{cm} + \omega R_2 \Rightarrow v_{\Delta} = \omega R_1 + \omega R_2 \Rightarrow v_{\Delta} = \omega \frac{4R}{3}$$

Επίσης ισχύει:

$$v_K = v_{cm} + \omega R_1 \Rightarrow v_K = \omega R_1 + \omega R_1 \Rightarrow v_K = \omega \frac{2R}{3}$$

Τελικά προκύπτει:

$$\frac{v_{\Delta}}{v_K} = \frac{\omega \frac{4R}{3}}{\omega \frac{2R}{3}} \Rightarrow \frac{v_{\Delta}}{v_K} = 2$$

2.37 Σωστή απάντηση είναι η α).

$$\Delta x_A = \Delta x_{cm} + l \Rightarrow \Delta x = \Delta x_{cm} + \Delta \theta \cdot r \Rightarrow$$

$$\Delta x = \Delta x_{cm} + \frac{\Delta x_{cm}}{R} \cdot r \Rightarrow \Delta x = \Delta x_{cm} \left(1 + \frac{r}{R}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta x = \Delta x_{cm} \left(\frac{R+r}{R}\right) \Rightarrow \Delta x_{cm} = \frac{R}{R+r} \cdot \Delta x$$

2.38 Σωστή απάντηση είναι η β).

$$v_A = 2v_{cm}$$

$$\frac{S}{\Delta t} = 2 \frac{\Delta x_{cm}}{\Delta t} \Rightarrow S = 2\Delta x_{cm} \quad (1)$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{\gamma p} + \vec{v}_{cm} \Rightarrow v_B = v_{cm} - \omega \frac{R}{2} \Rightarrow$$

$$v_B = v_{cm} - \frac{v_{cm}}{2} \Rightarrow v_B = \frac{v_{cm}}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{S_B}{\Delta t} = \frac{\Delta x_{cm}}{2\Delta t} \Rightarrow S_B = \frac{S}{4}$$

2.39 Σωστή απάντηση είναι η γ).

A. $v_{\gamma p_{\text{τροχ}}} = v_{\Sigma_1} \Rightarrow \omega_{\text{τροχ}} r = 2\omega_1 R \Rightarrow$

$$\frac{\omega_{\text{τροχ}}}{\omega_1} = \frac{2R}{r} = \frac{2R}{\frac{R}{2}} = 4 \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_{\text{τροχ}}} = \frac{1}{4}$$

B. Σωστή απάντηση είναι η β).

$$v_{\Sigma_2} = 2v_{cm} \quad \text{οπότε} \quad h = 2\Delta x_{cm} \Rightarrow \Delta x_{cm} = \frac{h}{2}$$

$$\text{άρα} \quad \Delta x_A = \frac{h}{2}$$

2.40 Σωστή απάντηση είναι η β).

Ισχύει:

$$\frac{|\tau_{1,2}|}{|\tau_{3,4}|} = \frac{F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2R}{F_3 2R} \Rightarrow \frac{|\tau_{1,2}|}{|\tau_{3,4}|} = \frac{1}{2}$$

2.41 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Για να ανατραπεί ο κύβος θα πρέπει το μέτρο της ροπής της $\vec{F}$ ως προς τον άξονα περιστροφής του να είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της ροπής του βάρους ως προς τον ίδιο άξονα. Δηλαδή να ισχύει:

$$|\tau_F| > |\tau_B| \Rightarrow Fd > w \frac{a}{2} \Rightarrow F > \frac{wa}{2d}$$

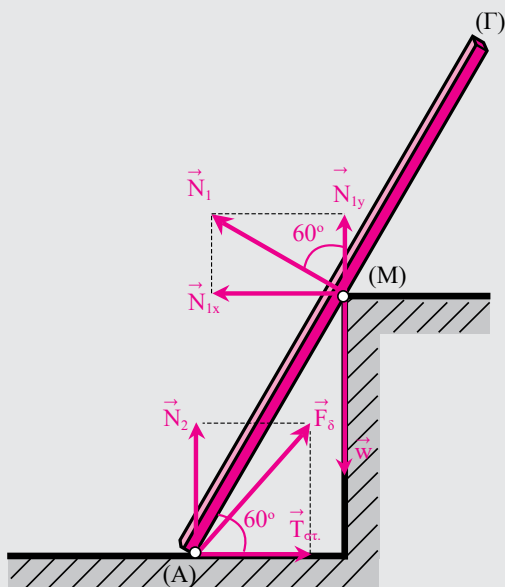
2.42 Σωστή απάντηση είναι η β).

Στη ράβδο ασκούνται η δύναμη $\vec{N}_1$ από το σκαλοπάτι, το βάρος της $\vec{w}$, η κάθετη δύναμη στήριξης $\vec{N}_2$ από το δάπεδο, καθώς και η δύναμη της στατικής τριβής $\vec{T}_{\text{στ}}$ από το δάπεδο.

Ισχύει:

$$\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow N_1 \frac{l}{2} - w \frac{l}{2} \cdot \sin 60^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$N_1 = \frac{w}{2} \Rightarrow N_1 = \frac{w}{2}$$



Από τη συνθήκη ισορροπίας στον οριζόντιο άξονα $x'x$ προκύπτει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_{στ} = N_{1x} \Rightarrow T_{στ} = N_1 \eta \mu 60^\circ \Rightarrow$$

$$T_{στ} = \frac{w}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow T_{στ} = \frac{\sqrt{3}w}{4}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow w = N_{1y} + N_2 \Rightarrow$$

$$w = N_1 \sin 60^\circ + N_2 \Rightarrow w = \frac{w}{4} + N_2 \Rightarrow$$

$$N_2 = \frac{3w}{4}$$

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_\delta$ που δέχεται η ράβδος από το δάπεδο είναι ίσο με:

$$F_\delta = \sqrt{T_{στ}^2 + N_2^2} \Rightarrow F_\delta = \sqrt{\frac{3w^2}{16} + \frac{9w^2}{16}} \Rightarrow$$

$$F_\delta = \frac{\sqrt{3}w}{2}$$

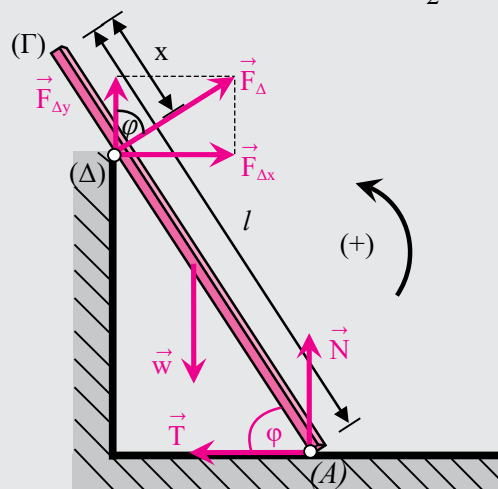
2.43 Α. Σωστή απάντηση είναι η **α**).

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{\Delta x} = T \Rightarrow F_\Delta \eta \mu \phi = \mu N \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\Delta y} + N = w \Rightarrow N = w - F_\Delta \sin \phi \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow F_\Delta \eta \mu \phi = \mu (w - F_\Delta \sin \phi) \Rightarrow$$

$$F_\Delta \eta \mu \phi = \mu w - \mu F_\Delta \sin \phi \Rightarrow F_\Delta = \frac{w}{2}$$

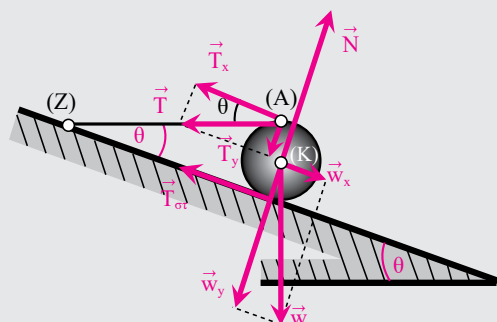


Β. Σωστή απάντηση είναι η **γ**).

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow F_\Delta (l - x) - w \frac{l}{2} \sin \phi = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{w}{2} (l - x) = w \frac{l}{2} \sin \phi \Rightarrow x = 0,2l = \frac{l}{5}$$

2.44 Α. Σωστή απάντηση είναι η **α**).



Για να ισορροπεί η σφαίρα πρέπει $\Sigma \tau_{(K)} = 0$. Ροπές προκαλούν οι $\vec{T}$ και η $\vec{T}_{\sigma}$. Έτσι πρέπει η ροπή της τριβής να προκαλεί ωρολογιακή περιστροφή ως προς το K. Για να γίνει αυτό πρέπει να είναι προς τα πάνω.

Β. Σωστή απάντηση είναι η β).

$$\Sigma \vec{\tau}_{(K)} = 0 \Rightarrow T \cdot R = T_{\sigma} \cdot R \Rightarrow T = T_{\sigma} \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_{\sigma} + T_x = w_x \Rightarrow$$

$$T_{\sigma} + T \sin \theta = mg \eta \mu \theta \Rightarrow T = \frac{mg \eta \mu \theta}{1 + \sin \theta} \quad (1)$$

Γ. Σωστή απάντηση είναι η α).

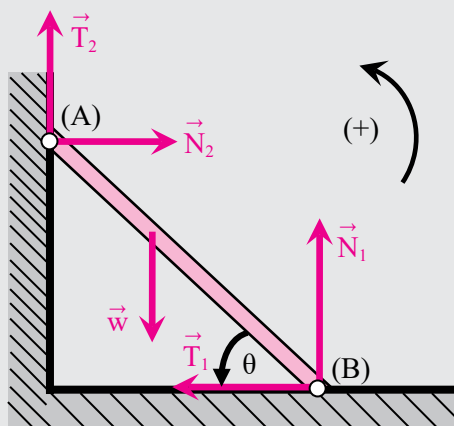
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = T_y + w_y = T \eta \mu \theta + mg \sin \theta \Rightarrow$$

$$N = \frac{mg \eta \mu \theta}{1 + \sin \theta} \eta \mu \theta + mg \sin \theta \Rightarrow$$

$$N = \frac{mg \eta \mu^2 \theta + mg \sin \theta + mg \sin^2 \theta}{1 + \sin \theta} \Rightarrow$$

$$N = \frac{mg + mg \sin \theta}{1 + \sin \theta} \Rightarrow N = mg$$

2.45 Σωστή απάντηση είναι η α).



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_1 = N_2 \Rightarrow \mu_1 N_1 = N_2 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + T_2 = w \Rightarrow N_1 + \mu_2 N_2 = w \Rightarrow N_1 + \mu_2 \mu_1 N_1 = w \Rightarrow N_1 (1 + \mu_1 \mu_2) = w \Rightarrow$$

$$N_1 = \frac{w}{1 + \mu_1 \mu_2} \quad \text{και} \quad N_2 = \frac{\mu_1 w}{1 + \mu_1 \mu_2}$$

$$\Sigma \vec{\tau}_{(B)} = 0 \Rightarrow w \frac{l}{2} \sin \theta = N_2 l \eta \mu \theta + T_2 l \sin \theta \Rightarrow$$

$$\frac{w}{2} \sin \theta = N_2 \eta \mu \theta + \mu_2 N_2 \sin \theta \Rightarrow$$

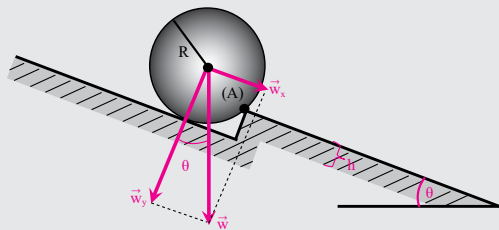
$$\frac{w}{2} \sin \theta = \frac{\mu_1 w}{1 + \mu_1 \mu_2} \eta \mu \theta + \mu_2 \frac{\mu_1 w}{1 + \mu_1 \mu_2} \sin \theta \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\mu_2 \mu_1}{1 + \mu_1 \mu_2} \sin \theta = \frac{\mu_1}{1 + \mu_1 \mu_2} \eta \mu \theta \Rightarrow$$

$$\sin \theta \frac{1 + \mu_1 \mu_2 - 2 \mu_1 \mu_2}{2(1 + \mu_1 \mu_2)} = \frac{\mu_1}{1 + \mu_1 \mu_2} \eta \mu \theta \Rightarrow$$

$$\epsilon \phi \theta = \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{2 \mu_1}$$

2.46 Σωστή απάντηση είναι η γ).



$$\tau_{w_x(A)} \geq \tau_{w_y(A)} \Rightarrow$$

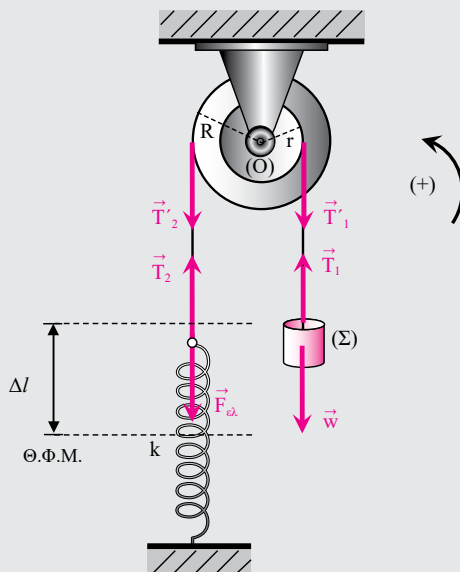
$$w_x (R - h) \geq w_y \sqrt{R^2 - (R - h)^2} \Rightarrow$$

$$w \cdot \eta \mu \theta \frac{R}{2} \geq w \cdot \sin \theta \cdot \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\eta \mu \theta \cdot \frac{R}{2} \geq \sin \theta \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\epsilon \phi \theta \geq \sqrt{3} \Rightarrow \theta_{\min} = 60^\circ$$

2.47 Σωστή απάντηση είναι η α).



Αφού το σώμα Σ ισορροπεί ισχύει ότι:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_1 = mg$$

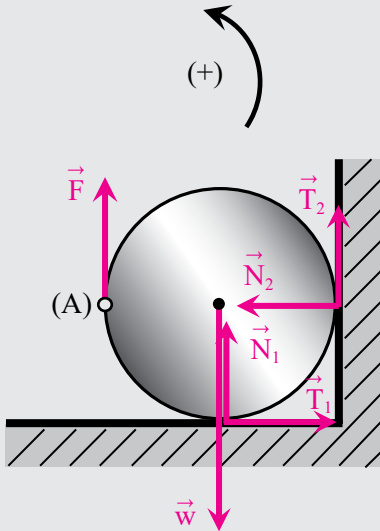
Το νήμα είναι αβαρές άρα $T'_1 = T_1 = mg$

Η τροχαλία ισορροπεί άρα ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow T'_2 R - T'_1 r = 0 \Rightarrow T'_2 = \frac{T'_1}{2} = \frac{mg}{2}$$

$$T'_2 = T_2 = F_{ελ} = k \Delta l \Rightarrow \frac{mg}{2} = k \Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{2k}$$

2.48 Σωστή απάντηση είναι η α).



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_1 = N_2 \Rightarrow \mu N_1 = N_2 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F + T_2 + N_1 = w \Rightarrow F + \mu N_2 + N_1 = w \quad (1)$$

$$F + \mu^2 N_1 + N_1 = w \Rightarrow F + 1,25 N_1 = w \quad (2)$$

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow -FR + T_2 R + T_1 R = 0 \Rightarrow$$

$$F = T_1 + T_2 \Rightarrow F = \mu N_1 + \mu N_2 \quad (1)$$

$$F = \mu N_1 + \mu^2 N_1 = 0,75 N_1 \Rightarrow N_1 = \frac{4F}{3} \quad (3)$$

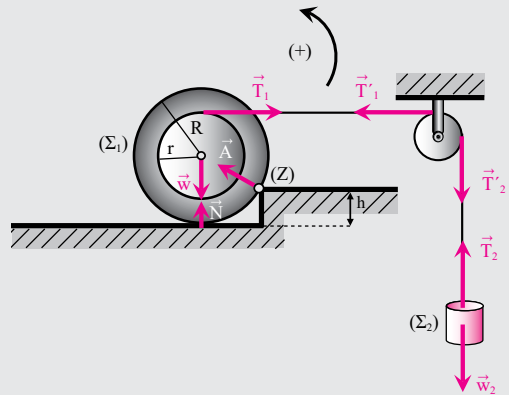
$$(2) \Rightarrow F + 1,25 \frac{4F}{3} = w \Rightarrow F = \frac{3w}{8}$$

2.49 Σωστή απάντηση είναι η α).

Το σώμα Σ₂ ισορροπεί άρα $\Sigma F = 0 \Rightarrow T_2 = m_2 g$

Η τροχαλία είναι αβαρής άρα:

$$T_1 = T'_1 = T_2 = T'_2 = m_2 g \quad (1)$$



Για να υπερπηδήσει το εμπόδιο πρέπει:

$$\tau_{T_1(Z)} \geq \tau_{w(Z)} \Rightarrow$$

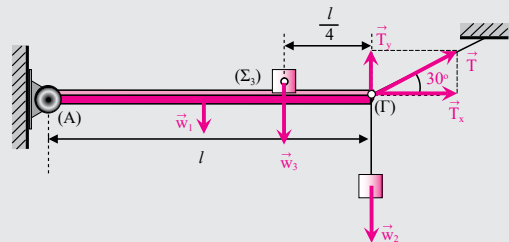
$$T_1 (R + r - h) \geq w \sqrt{R^2 - (R - h)^2} \Rightarrow$$

$$T_1 \left(R + \frac{2R}{3} - \frac{R}{2} \right) \geq w \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} \Rightarrow$$

$$T_1 \frac{7R}{6} \geq w \frac{R\sqrt{3}}{2} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} m_2 g \frac{7}{3} \geq mg\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$m_2 \geq \frac{3\sqrt{3}m}{7}$$

2.50 Σωστή απάντηση είναι η β).



Ισχύει:

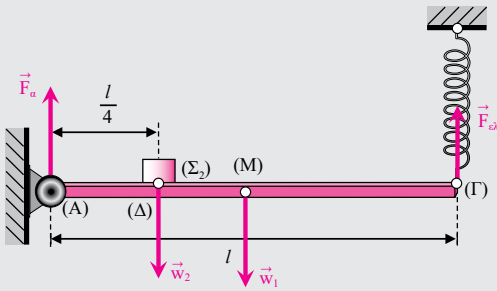
$$\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow T_{\theta p} \cdot \eta \mu 30^\circ = w_1 \frac{l}{2} + w_3 \frac{3l}{4} + w_2 l \Rightarrow$$

$$10w \frac{l}{2} = 2w \frac{l}{2} + w_3 \frac{3l}{4} + wl \Rightarrow w_3 = 4w$$

2.51 Σωστή απάντηση είναι η β).

Το μέτρο της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στη ράβδο είναι:

$$F_{ελ} = k \cdot \Delta l \Rightarrow F_{ελ} = k \cdot \frac{2w}{k} \Rightarrow F_{ελ} = 2w$$



Ισχύει:

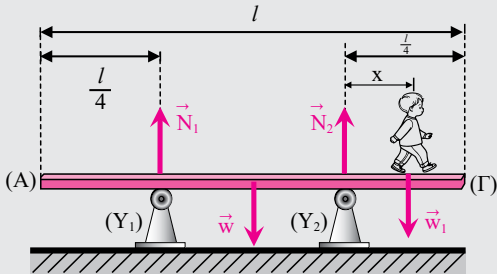
$$\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow F_{\alpha} l = w_2 \frac{l}{4} + w_1 \frac{l}{2} \Rightarrow$$

$$2wl = w_2 \frac{l}{4} + w \frac{l}{2} \Rightarrow w_2 = 6w$$

Από την ισορροπία της ράβδου προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\alpha} + F_{\epsilon\lambda} = w_1 + w_2 \Rightarrow F_{\alpha} = 5w$$

2.52 Σωστή απάντηση είναι η α).



Έστω x η θέση του παιδιού ως προς το υποστήριγμα (2).

Έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(2)} = 0 \Rightarrow -N_1 \frac{l}{2} + w \frac{l}{4} - w_1 x = 0 \Rightarrow$$

$$-N_1 \frac{l}{2} + w \frac{l}{4} - 2wx = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{2w}{l} \left(\frac{l}{4} - 2x \right)$$

Για να μην ανατρέπεται η ράβδος θα πρέπει:

$$N_1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2w}{l} \left(\frac{l}{4} - 2x \right) \geq 0 \Rightarrow$$

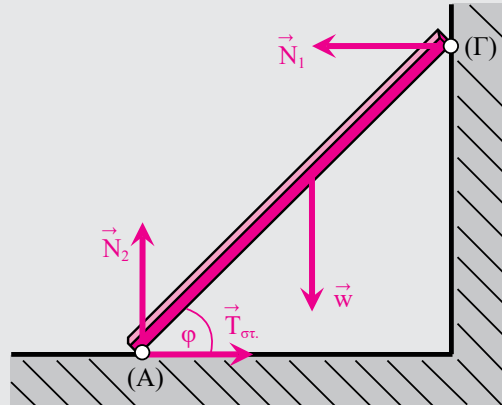
$$x \leq \frac{l}{8} \Rightarrow x_{\max} = \frac{l}{8}$$

2.53 Σωστή απάντηση είναι η β).

Στη ράβδο ασκούνται η δύναμη $\vec{N}_1$ από τον κατακόρυφο τοίχο, το βάρος της $\vec{w}$, η κάθετη δύναμη στήριξης $\vec{N}_2$ από το δάπεδο καθώς και η δύναμη της στατικής τριβής $\vec{T}_{\sigma\tau}$. Από το δάπεδο. Ισχύει:

$$\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow N_1 l \cdot \eta \mu \varphi - w \frac{l}{2} \cdot \sigma \upsilon \nu \varphi = 0 \Rightarrow$$

$$N_1 = \frac{3w}{8}$$



Από τη συνθήκη ισορροπίας στον οριζόντιο άξονα x'x προκύπτει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau} = N_1 \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{3w}{8}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα y'y έχουμε:

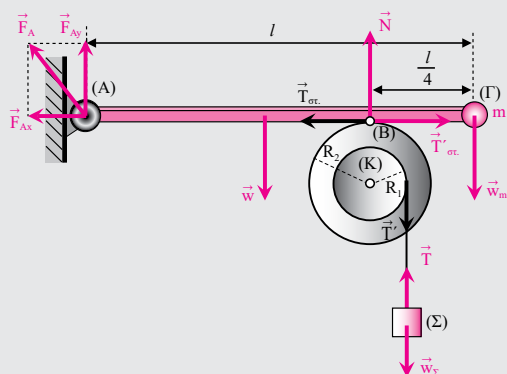
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 = w$$

Γενικά ισχύει:

$$T_{\sigma\tau} \leq \mu_{\sigma} N_2 \Rightarrow \frac{3w}{8} \leq \mu_{\sigma} w \Rightarrow \mu_{\sigma} \geq \frac{3}{8}$$

$$\mu_{\sigma, \min} = \frac{3}{8}$$

2.54 Σωστή απάντηση είναι η γ).



Από την ισορροπία της ράβδου προκύπτει:

$$\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow N \frac{3l}{4} = w \frac{l}{2} + \frac{w}{2} l \Rightarrow N = \frac{4w}{3}$$

Από την ισορροπία του σώματος Σ, προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = \frac{w}{2}$$

Από την ισορροπία του στερεού προκύπτει:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow TR = T_{\sigma} 2R \Rightarrow \frac{w}{2} = 2T_{\sigma} \Rightarrow$$

$$T_{\sigma} = \frac{w}{4}$$

Ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \vec{F}_{Ax} = T'_{\sigma} \Rightarrow \vec{F}_{Ax} = T_{\sigma} \Rightarrow \vec{F}_{Ax} = \frac{w}{4}$$

Επίσης ισχύει:

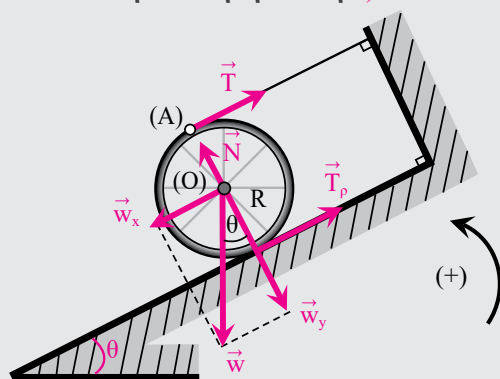
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{Ay} + N = w + \frac{w}{2} \Rightarrow F_{Ay} = \frac{w}{6}$$

Τελικά έχουμε:

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} \Rightarrow F_A = \sqrt{\frac{w^2}{16} + \frac{w^2}{36}} \Rightarrow$$

$$F_A = \sqrt{13} \frac{w}{12}$$

2.55 Σωστή απάντηση είναι η α).



$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow TR = T_p R \Rightarrow T = T_p \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T + T_p = w_x \Rightarrow$$

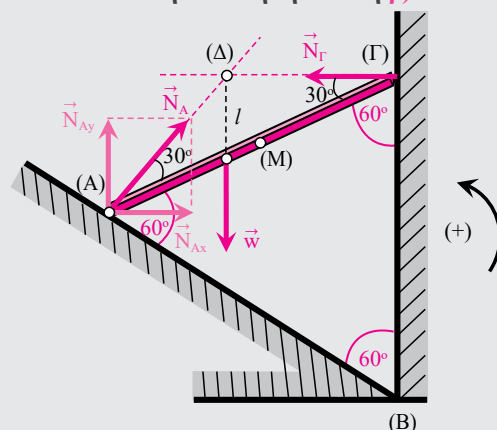
$$2T_p = mg \sin \theta \Rightarrow T_p = \frac{mg \sin \theta}{2} \quad (2)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w_y \Rightarrow N = mg \cos \theta \quad (3)$$

$$T_p = \mu_{op} N \Rightarrow \frac{(2)(3) mg \sin \theta}{2} = \mu_{op} mg \sin \theta \Rightarrow$$

$$\mu_{op} = \frac{\epsilon \phi \theta}{2}$$

2.56 A. Σωστή απάντηση είναι η β).



Η $\vec{N}_A$ και η $\vec{N}_G$ τέμνονται στο Δ και σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ. Για να ισορροπεί η δοκός πρέπει το $\vec{w}$ να διέρχεται από το Δ. Αν ήταν ομογενής η δοκός, ο φορέας του $\vec{w}$ δεν θα διερχόταν από το Δ αφού για να διερχόταν θα έπρεπε $\vec{w} \perp \text{ΑΓ}$, το οποίο είναι άτοπο.

B. Σωστή απάντηση είναι η α).

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow N_G l \sin 30^\circ - w x \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$N_G l = w x \sqrt{3} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{Ay} = w \Rightarrow N_A \sin 60^\circ = w \Rightarrow$$

$$N_A \frac{\sqrt{3}}{2} = w \quad (2)$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_G = N_{Ax} \Rightarrow N_G = N_A \cos 60^\circ \Rightarrow$$

$$N_G = \frac{N_A}{2} \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{(2)(3) N_A}{2} l = \frac{N_A \sqrt{3}}{2} x \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{l}{3}$$

2.57 Σωστή απάντηση είναι η α).

Εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής για το σφαιρίδιο προκύπτει:

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow mvR = mv' \frac{R}{2} \Rightarrow$$

$$m\omega R^2 = m\omega' \frac{R^2}{4} \Rightarrow \omega' = 4\omega$$

2.58 Σωστή απάντηση είναι η β).

Από την εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Στροφορμής έχουμε:

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow p_{\alpha} r_{\alpha} = p_{\pi} r_{\pi} \Rightarrow \frac{p_{\alpha}}{p_{\pi}} = \frac{r_{\pi}}{r_{\alpha}} \Rightarrow \frac{p_{\alpha}}{p_{\pi}} = \frac{3}{4}$$

2.59 Σωστή απάντηση είναι η β).

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της σφαίρας (1) είναι:

$$v_1 = \omega d \quad (1)$$

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της σφαίρας (2) είναι:

$$v_2 = \omega 3d \Rightarrow v_2 = 3v_1 \quad (2)$$

Για το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της σφαίρας (1), επίσης ισχύει:

$$L = mv_1 d \Rightarrow v_1 = \frac{L}{md} \quad (3)$$

Για την κινητική ενέργεια του συστήματος έχουμε:

$$K = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}m9v_1^2 \Rightarrow$$

$$K = 5mv_1^2 \Rightarrow K = 5m \frac{L^2}{m^2 d^2} \Rightarrow K = \frac{5L^2}{md^2}$$

ΘΕΜΑ Γ-Δ

2.60 α) Το νήμα είναι μη εκτατό και δεν γλιστρά στο αυλάκι του δίσκου, επομένως ισχύει:

$$v_z = v_A \quad \text{ή} \Rightarrow v_z = v_{\text{cm}} + \omega r \Rightarrow$$

$$\alpha_z = \alpha_{\gamma\omega\nu} R + \alpha_{\gamma\omega\nu} r \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_z}{R+r} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

β) Ο δίσκος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. Επομένως ισχύει:

$$\frac{dv_{\text{cm}}}{dt} = \alpha_{\text{cm}} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R \Rightarrow \frac{dv_{\text{cm}}}{dt} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

γ) Ισχύει:

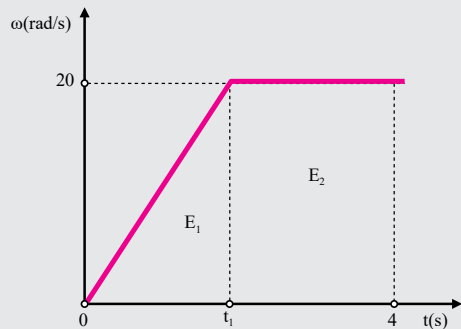
$$\Delta x_{\text{cm}} = \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} t_1^2 \Rightarrow \Delta x_{\text{cm}} = 16 \text{ m}$$

δ) Για το μήκος του νήματος που έχει ξετυλιχτεί έχουμε:

$$l_{\nu\eta\mu} = \Delta x_z - \Delta x_{\text{cm}} \Rightarrow l_{\nu\eta\mu} = \frac{1}{2} \alpha_z t_1^2 - \Delta x_{\text{cm}} \Rightarrow$$

$$l_{\nu\eta\mu} = 4 \text{ m}$$

2.61 α) Σχεδιάζουμε το διάγραμμα του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου σε συνάρτηση με τον χρόνο.



Από εμβαδομέτρηση προκύπτει:

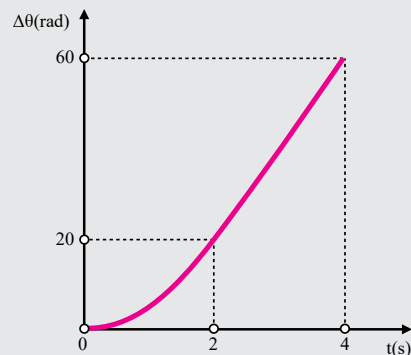
$$\frac{20t_1}{2} + 20(4-t_1) = 60 \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}$$

β) Ισχύει:

$$0 \rightarrow 2 \text{ s}: \Delta\theta_1 = E_1 \Rightarrow \Delta\theta_1 = 20 \text{ rad}$$

$$2 \text{ s} \rightarrow 4 \text{ s}: \Delta\theta_2 = E_2 \Rightarrow \Delta\theta_2 = 40 \text{ rad}$$

Το διάγραμμα της γωνίας $\Delta\theta$ που διαγράφει ο δίσκος σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι το εξής:



Επίσης ισχύει:

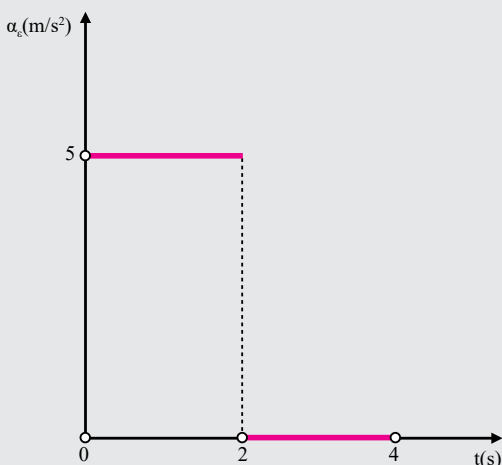
$0 \rightarrow 2\text{s}$:

$$\alpha_{\varepsilon,1} = \alpha_{\gamma\omega\nu,1} R \Rightarrow \alpha_{\varepsilon,1} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$2\text{s} \rightarrow 4\text{s}$:

$$\alpha_{\varepsilon,2} = \alpha_{\gamma\omega\nu,2} R \text{ ή } \alpha_{\varepsilon,2} = 0$$

Το διάγραμμα του μέτρου της επιτρόχιας επιτάχυνσης ενός σημείου της περιφέρειας του δίσκου σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι το εξής:



γ) Τη χρονική στιγμή $t = 1\text{ s}$ το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου είναι:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu,1} t \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Με εμβαδομέτρηση προκύπτει:

$$\Delta\theta = \left[\frac{(10+20) \cdot 1}{2} + 20 \cdot (3-2) \right] \text{rad} \Rightarrow$$

$$\Delta\theta = 35 \text{rad}$$

Το τόξο που διαγράφει το σημείο Δ είναι:

$$s = r \cdot \Delta\theta \Rightarrow s = 7 \text{ m}$$

δ) Το μέτρο της επιτάχυνσης ενός σημείου της περιφέρειας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 1\text{ s}$ είναι:

$$\alpha = \sqrt{\alpha_\kappa^2 + \alpha_\varepsilon^2} \Rightarrow \alpha = \sqrt{(\omega^2 R)^2 + (\alpha_{\gamma\omega\nu} R)^2} \Rightarrow$$

$$\alpha = 5\sqrt{101} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

2.62 α) Ισχύει:

$$0 = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega_0}{t_1} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Το μέτρο της επιτρόχιας επιβράδυνσης ενός σημείου της περιφέρειας του δίσκου είναι:

$$\alpha_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu} R \Rightarrow \alpha_\varepsilon = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

β) Προκύπτει:

$$\Delta\theta_{\text{ολ}} = \frac{\omega_0^2}{2\alpha_{\gamma\omega\nu}} \Rightarrow \Delta\theta_{\text{ολ}} = 25 \text{rad}$$

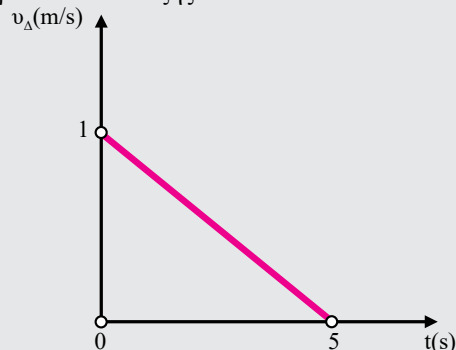
Το διάγραμμα της γωνίας $\Delta\theta$ που διαγράφει ο δίσκος σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι το εξής:



γ) Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Δ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι:

$$v_\Delta = \omega_0 r \Rightarrow v_\Delta = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Το διάγραμμα του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Δ σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι το εξής:



δ) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t_2 = 2 \text{ s}$ είναι:

$$\omega_2 = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2 \Rightarrow \omega_2 = 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

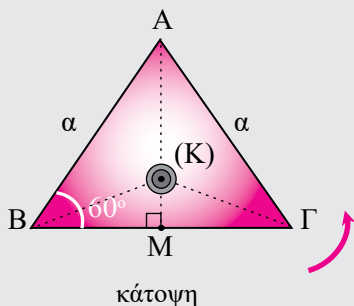
Ο αριθμός των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος κατά το τρίτο δευτερόλεπτο της κίνησής του υπολογίζεται από τον τύπο:

$$N = \frac{\Delta\theta_{2-3}}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{\omega_2 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t^2}{2\pi} \Rightarrow$$

$$N = \frac{2,5}{\pi} \text{ περ.}$$

2.63 α) Ισχύει:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1 \Rightarrow \omega = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



$$\eta\mu 60^\circ = \frac{(AM)}{\alpha} \Rightarrow (AM) = \alpha \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (AM) = 3 \text{ m}$$

$$(AK) = \frac{2}{3} (AM) = 2 \text{ m}$$

$$v_{\gamma p(A)} = \omega (AK) \Rightarrow v_{\gamma p(A)} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Έχουμε:

$$v_{\gamma p(Z)} = \omega \frac{1}{3} (\Gamma Z) \Rightarrow v_{\gamma p(Z)} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Προκύπτει:

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \Rightarrow \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2^2 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} t_2^2 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_2 = 2 \text{ s}$$

δ) Ισχύει:

$$\alpha_{\kappa} = \omega^2 (\Gamma K) = (\alpha_{\gamma\omega\nu} t_2)^2 (\Gamma K) \Rightarrow \alpha_{\kappa} = \frac{80 \text{ m}}{\text{s}^2}$$

2.64 α) Σύνθετη κίνηση (Επιβραδυνόμενη μεταφορική και ομαλή στροφική)

β) Ισχύει:

$$\alpha_{\text{cm}} = g \Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

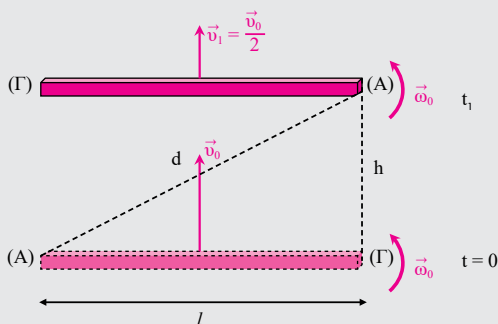
$$h = v_o t - \frac{1}{2} |\alpha_{\text{cm}}| t^2 \Rightarrow h = 0,8 \text{ m}$$

γ) Προκύπτει:

$$\Delta\theta = \omega_o t \Rightarrow \Delta\theta = 10\pi \text{ rad}$$

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow N = 5 \text{ περιστροφές}$$

δ) Έχουμε:



$$v = v_o - |\alpha_{\text{cm}}| t_1 \Rightarrow t_1 = 0,2 \text{ s} \Rightarrow$$

$$\Delta\theta = \omega_o t_1 \Rightarrow \Delta\theta = 5\pi \text{ rad}$$

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow N = 2,5 \text{ περιστροφές}$$

$$h' = v_o t_1 - \frac{1}{2} |\alpha_{\text{cm}}| t_1^2 \Rightarrow h' = 0,6 \text{ m}$$

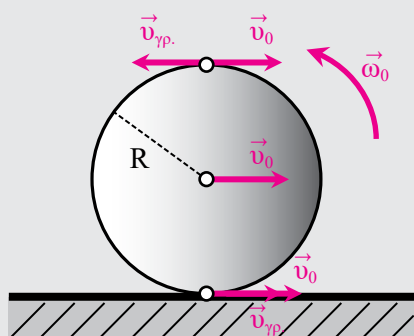
$$d = \sqrt{l^2 + h^2} \Rightarrow d = 1 \text{ m}$$

2.65 α) Για το κατώτερο σημείο ισχύει:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{\gamma p} + \vec{v}_0 \Rightarrow v_A = v_{\gamma p} + v_o \Rightarrow$$

$$v_A = \omega_o R + v_o \neq 0$$

Άρα η σφαίρα κυλίνεται ολισθαίνοντας.



β) Για το ανώτερο σημείο ισχύει:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{gp} + \vec{v}_0 \Rightarrow v_B = v_0 - \omega_0 R \Rightarrow v_B = 0$$

γ) Για το ανώτερο σημείο ισχύει:

$$v = v_0 - \alpha_{cm} t_1 \stackrel{v=0}{\Rightarrow} t_1 = \frac{v_0}{\alpha_{cm}} \Rightarrow t_1 = 5s$$

δ) Ισχύει:

$$\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega_0}{t_1} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 4 \frac{\text{rad}}{s^2}$$

2.66 α) Αφού όλα τα σημεία της ράβδου δεν έχουν την ίδια ταχύτητα τότε η σανίδα δεν εκτελεί μεταφορική κίνηση. Επιπλέον, αφού το κέντρο μάζας της έχει ταχύτητα δεν εκτελεί στροφική. Άρα η κίνηση της ράβδου είναι σύνθετη.

β) Ισχύει:

$$v_A = v_{cm} + v_{gp} \Rightarrow$$

$$3v_0 = v_0 + v_{gp} \Rightarrow$$

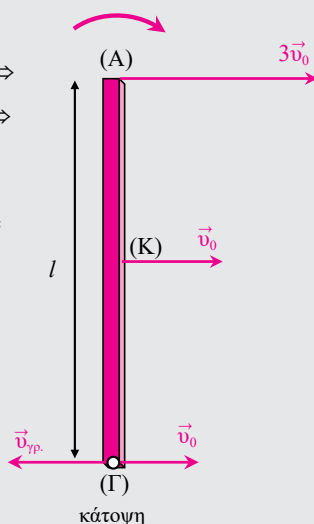
$$v_{gp} = 2v_0$$

$$v_{\Gamma} = v_{cm} - v_{gp} =$$

$$v_0 - 2v_0 \Rightarrow$$

$$v_{\Gamma} = -v_0 \Rightarrow$$

$$v_{\Gamma} = -4 \frac{m}{s}$$



γ) Έχουμε:

$$(t_1) \rightarrow v_{gp} = 2v_0 \Rightarrow$$

$$\omega \frac{l}{2} = 2v_0 \Rightarrow$$

$$v_0 = \frac{\omega l}{4}$$

Θέλουμε σε ένα σημείο Δ να ισχύει:

$$v_{\Delta} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{cm} = -\vec{v}_{gp(r)}$$

Άρα το σημείο Δ είναι μεταξύ των σημείων (Κ) και (Γ) οπότε κατά μέτρο ισχύει:

$$v_{cm} = v_{gp(r)} \Rightarrow v_0 = \omega r \Rightarrow$$

$$\frac{\omega l}{4} = \omega r \Rightarrow$$

$$r = \frac{l}{4} \Rightarrow r = 0,25m$$

$$\left. \begin{aligned} \delta) \quad v'_A = 4v_0 &\Rightarrow v_{cm} + \frac{\omega' l}{2} = 4v_0 \\ v'_\Gamma = 0 &\Rightarrow v_{cm} = \frac{\omega' l}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

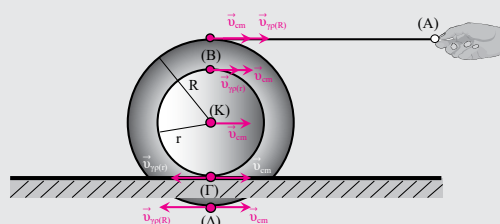
$$2v_{cm} = 4v_0 \Rightarrow v_{cm} = 2v_0 \Rightarrow v_{cm} = 8 \frac{m}{s}$$

$$\mathbf{2.67 \alpha)} \quad v_{\Gamma} = 0 \Rightarrow v_{cm} = v_{gp(r)} \Rightarrow v_{cm} = \omega r$$

$$v_A = v_{cm} + v_{gp(R)} \Rightarrow v_A = v_{cm} + \omega R \Rightarrow$$

$$v_A = v_{cm} + \frac{v_{cm}}{r} R \Rightarrow v_A = v_{cm} \left(1 + \frac{R}{r} \right) \Rightarrow$$

$$v_{cm} = 3 \frac{m}{s}$$



β) Προκύπτει:

$$v_B = v_{cm} + v_{\gamma p(r)} = v_{cm} + \omega r \Rightarrow$$

$$v_B = 2v_{cm} \Rightarrow v_B = 6 \frac{m}{s}$$

$$v_r = 0$$

$$v_A = v_{cm} - v_{\gamma p(R)} = v_{cm} - \omega R \Rightarrow$$

$$v_A = v_{cm} - \frac{v_{cm}}{r} R \Rightarrow$$

$$v_A = v_{cm} \left(1 - \frac{R}{r} \right) \Rightarrow$$

$$v_A = -3 \frac{m}{s}$$

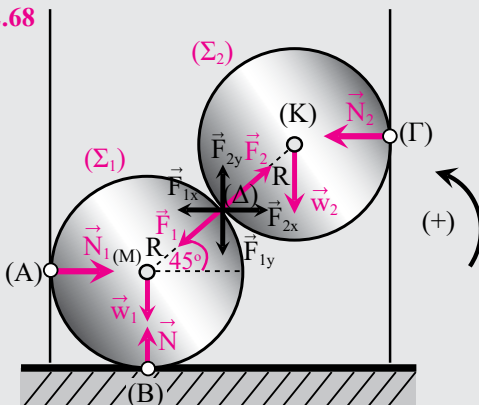
γ) Ισχύει:

$$l = \Delta\theta \cdot R \Rightarrow l = \frac{\Delta x}{r} \cdot R \Rightarrow l = 8 \text{ m}$$

δ) Προκύπτει:

$$N = \frac{\Delta x}{2\pi r} \Rightarrow N = \frac{4}{\pi} \text{ περιστροφές}$$

2.68



$$F_1 = F_2 \text{ (δράση αντίδραση)}$$

α) Για το Σ_1 : $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w_1 + F_{1y}$ (1)

Για το Σ_2 : $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{2y} = w_2$ (2)

Όμως $F_{1y} = F_{2y}$ άρα: (1), (2) $\Rightarrow$

$$N = w_1 + w_2 \Rightarrow N = 2Mg \Rightarrow N = 20 \text{ N}$$

β) Για το Σ_1 : $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_1 = F_{1x}$ (3)

Για το Σ_2 : $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_2 = F_{2x}$ (4)

Όμως $F_{1x} = F_{2x}$ άρα (3), (4) $\Rightarrow N_1 = N_2$

Για το Σ_1 : $\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow$

$$N_1 R \sin 45^\circ + w_1 R \sin 45^\circ - N R \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$N_1 + w_1 = N \Rightarrow N_1 = 10 \text{ N}$$

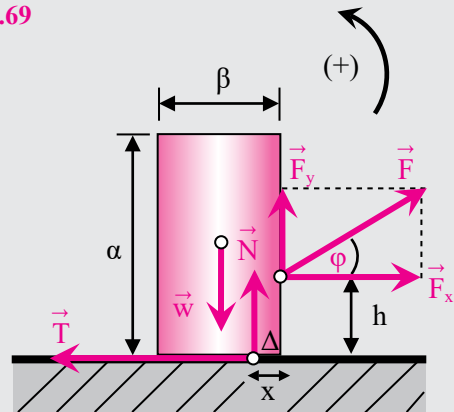
γ) Ισχύει:

$$N_1 = N_2 = 10 \text{ N}$$

δ) (3) $\Rightarrow N_1 = F_{1x} = F_1 \sin 45^\circ \Rightarrow F_1 = 10\sqrt{2} \text{ N}$

άρα $F_2 = F_1 = 10\sqrt{2} \text{ N}$

2.69



$$F_x = F \sin \varphi = 160 \text{ N} \text{ και } F_y = F \cos \varphi = 120 \text{ N}$$

α) $\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow F_y x - F_x h + w \left(\frac{\beta}{2} - x \right) = 0 \Rightarrow$

$$x = 0,2 \text{ m}$$

β) $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = T \Rightarrow T = 160 \text{ N}$

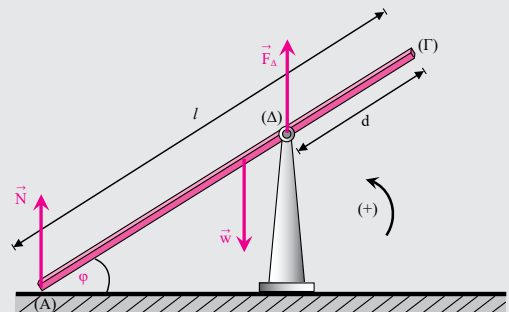
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + F_y = w \Rightarrow N = 280 \text{ N}$$

$$T = \mu N \Rightarrow \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{4}{7}$$

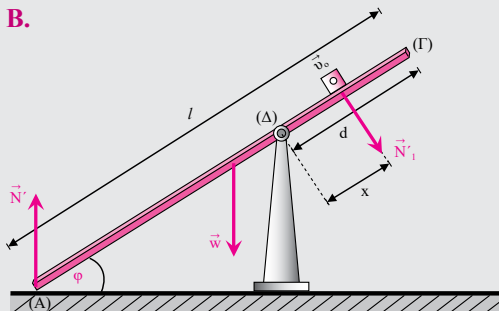
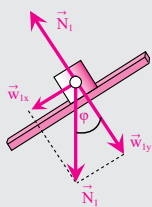
2.70 A. Ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow -N \frac{2l}{3} \sin \varphi + Mg \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3} \right) \cdot \sin \varphi = 0 \Rightarrow$$

$$N = 2,5 \text{ N}$$



B.



α) Για το σώμα μάζας m:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = w_{1y} = mg \sin \varphi \text{ και}$$

$$N'_1 = N_1 = mg \sin \varphi$$

Όταν χάνεται η επαφή $N' = 0$ άρα, οριακά:

$$\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow Mg \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3} \right) \sin \varphi - N'_1 x = 0 \Rightarrow$$

$$Mg \frac{l}{6} \sin \varphi = mg \sin \varphi x \Rightarrow x = 0,5m$$

άρα, το σώμα μάζας m έχει διανύσει απόσταση:

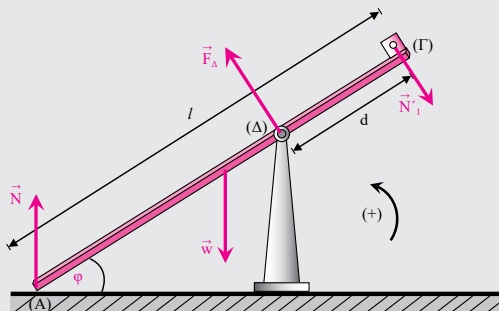
$$S = \frac{2l}{3} + x \Rightarrow S = 2,5m$$

$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow -w_{1x} = ma \Rightarrow$$

$$-mg \sin \varphi = ma \Rightarrow a = 8m/s^2$$

$$S = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow 2,5 = 7t - 4t^2 \Rightarrow t_1 = 0,5s$$

β) Όταν φτάσει το σώμα μάζας m στο Γ πρέπει $N > 0$



$$\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow$$

$$-N \frac{2l}{3} \sin \varphi + Mg \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3} \right) \sin \varphi - N'_1 \frac{l}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$-N \frac{2l}{3} \sin \varphi + Mg \frac{l}{6} \sin \varphi - mg \sin \varphi \frac{l}{3} = 0 \Rightarrow$$

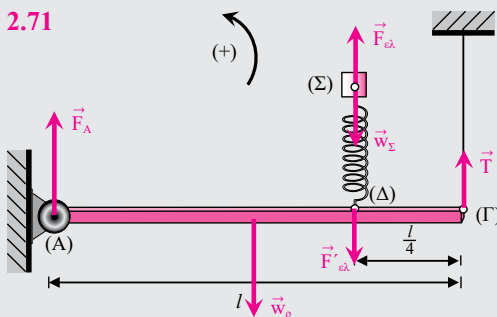
$$N = 2,5 - 5m$$

Θέλουμε:

$$N \geq 0 \Rightarrow 2,5 - 5m \geq 0 \Rightarrow$$

$$m \leq 0,5kg \Rightarrow m_{\max} = 0,5kg$$

2.71



A. Το σώμα Σ ισορροπεί:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w_{\Sigma} = mg \Rightarrow F_{ελ} = 10N$$

Ισχύει: $F'_{ελ} = F_{ελ} = 10N$

Η ράβδος ισορροπεί άρα:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow Tl - F'_{ελ} \frac{3l}{4} - w_p \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$T - F'_{ελ} \frac{3}{4} - \frac{Mg}{2} = 0 \Rightarrow T = 12,5N$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_A + T = w_p + F'_{ελ} \Rightarrow F_A = 7,5N$$

B. i) Τυχαία θέση της ταλάντωσης:

$$\Sigma F = -kx \Rightarrow F_{ελ} - mg = -kx \Rightarrow$$

$$F_{ελ} = 10 - 100x \text{ (SI)}$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow T = \frac{3}{4} F_{ελ} + \frac{Mg}{2} \Rightarrow T = 12,5 - 75x \text{ (S.I.)}$$

ii) Η τάση παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν $x = -A = -0,1m$ (κάτω ακραία)

Το σώμα φτάνει στην κάτω ακραία θέση τη

χρονική στιγμή $t_1 = \frac{3T}{4}$.

$$\text{Ισχύει: } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 0,2\pi s$$

$$\text{άρα } t_1 = 0,15\pi s$$

Γ. $T = 12,5 - 75x$

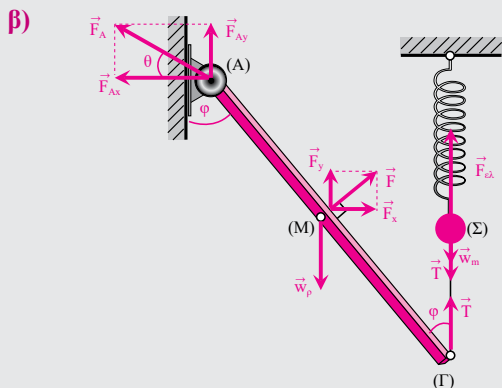
Για $T \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{6}$ άρα $x_{\max} = \frac{1}{6} \text{ m}$

2.72 α) Το μέτρο της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο σώμα Σ είναι:

$$F_{\varepsilon\lambda} = k \cdot \Delta l \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 40 \text{ N}$$

Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα το μέτρο της δύναμης που ασκεί το σώμα Σ στο ελατήριο είναι:

$$F'_{\varepsilon\lambda} = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 40 \text{ N}$$



Από την ισορροπία του σώματος Σ προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w_m + T \Rightarrow T = k \cdot \Delta l - mg \Rightarrow T = 20 \text{ N}$$

γ) Από την ισορροπία της ράβδου προκύπτει:

$$\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow F \frac{l}{2} + Tl \cdot \eta\mu\varphi - w_p \frac{l}{2} \cdot \eta\mu\varphi = 0 \Rightarrow M = \frac{F + 2T \cdot \eta\mu\varphi}{g \cdot \eta\mu\varphi} \Rightarrow M = 8 \text{ kg}$$

δ) Η ράβδος ισορροπεί. Επομένως ισχύουν:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{\alpha,x} = F_x \Rightarrow$$

$$F_{\alpha,x} = F \cdot \sigma\upsilon\upsilon\eta\varphi \Rightarrow F_{\alpha,x} = 10\sqrt{3} \text{ N}$$

και:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\alpha,y} + T + F_y = w_p \Rightarrow$$

$$F_{\alpha,y} = Mg - F \cdot \eta\mu\varphi - T \Rightarrow F_{\alpha,y} = 50 \text{ N}$$

Τελικά έχουμε:

$$F_{\alpha} = \sqrt{F_{\alpha,x}^2 + F_{\alpha,y}^2} \Rightarrow F_{\alpha} = 20\sqrt{7} \text{ N}$$

και:

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{F_{\alpha,y}}{F_{\alpha,x}} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

2.73 α) Ισχύει $A = d = 0,2 \text{ m}$. Επίσης έχουμε:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ισχύει $x = +A$ επομένως (με απόδειξη) η αρχική φάση είναι $\varphi_0 = \pi/2 \text{ rad}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης έχει τη μορφή:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

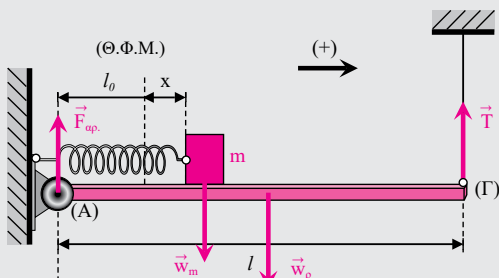
$$x = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{S.I.})$$

β) Από την ισορροπία της ράβδου έχουμε:

$$\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow Tl - w_m(l_0 + x) - w_p \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$T = 20 + 20 \cdot (0,2 + x) \Rightarrow$$

$$T = 24 + 20x (\text{S.I.}) \text{ για } -0,2\text{ m} \leq x \leq 0,2\text{ m}$$



γ) Ισχύει: $x = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{S.I.})$

Τελικά προκύπτει:

$$T = 24 + 20x \Rightarrow T = 24 + 20 \cdot 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$T = 24 + 4\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{S.I.})$$

δ) Τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$T' = 24 + 4\eta\mu\left(10 \cdot \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow T' = 24 \text{ N}$$

Από την ισορροπία της ράβδου έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\alpha p} = w_m + w_p - T' \Rightarrow F_{\alpha p} = 36 \text{ N}$$

2.74 α) Από την ισορροπία της ράβδου έχουμε:

$$\Sigma \tau_O = 0 \Rightarrow T \cdot \eta\mu\varphi \cdot l - mg l_0 - Mg \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$T = \frac{mg l_0 + Mg \frac{l}{2}}{\eta\mu\varphi \cdot l} \Rightarrow T = 55 \text{ N}$$

β) Ισχύει:

$$U_{ελ, \max} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta l_{\max}^2 \Rightarrow U_{ελ, \max} = \frac{1}{2} k \cdot A^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{2U_{ελ, \max}}{k}} \Rightarrow A = 0,5 \text{ m}$$

γ) Αν θεωρήσουμε ως θετική τη φορά προς τα δεξιά το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του Σ μεγιστοποιείται για δεύτερη φορά μετά την $t_0 = 0$ τη στιγμή που βρίσκεται στην ακραία αρνητική του θέση. Από την ισορροπία της ράβδου έχουμε:

$$\Sigma \tau_0 = 0 \Rightarrow$$

$$T' \cdot \eta \mu \phi \cdot l - mg(l_0 - A) + Mg \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$T' = \frac{mg(l_0 - A) + Mg \frac{l}{2}}{\eta \mu \phi \cdot l} \Rightarrow T' = 50 \text{ N}$$

δ) Το μέτρο της τάσης του νήματος θα έχει τη μέγιστη τιμή της κάθε φορά που το σώμα Σ θα βρίσκεται στην ακραία θετική του θέση. Από την ισορροπία της ράβδου έχουμε:

$$\Sigma \tau_0 = 0 \Rightarrow$$

$$T_{\max} \cdot \eta \mu \phi \cdot l - mg(l_0 + A) + Mg \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$T_{\max} = \frac{mg(l_0 + A) + Mg \frac{l}{2}}{\eta \mu \phi \cdot l} \Rightarrow T_{\max} = 60 \text{ N}$$

2.75 α) Από την ισορροπία του Σ_1 προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_1 = m_1 g \Rightarrow T_1 = 20 \text{ N}$$

Για τη διπλή τροχαλία ισχύει:

$$\Sigma \tau_0 = 0 \Rightarrow T_1 R_2 = T_2 R_1 \Rightarrow T_2 = \frac{T_1 R_2}{R_1} \Rightarrow T_2 = 40 \text{ N}$$

Από την ισορροπία του Σ_2 προκύπτει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_2 = F_{ελ} \Rightarrow T_2 = k \cdot \Delta l \Rightarrow$$

$$\Delta l = \frac{T_2}{k} \Rightarrow \Delta l = 0,2 \text{ m}$$

β) Το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι του δίσκου (2) επομένως ισχύει:

$$\alpha_{\epsilon} = \alpha = \alpha_{\gamma \omega \nu} R_2 \Rightarrow \alpha_{\epsilon} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

γ) Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_1 :

$$t_1 = \frac{3T}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{3 \cdot 2\pi \sqrt{\frac{m_2 + m_3}{k}}}{4} \Rightarrow t_1 = 0,3\pi \text{ s}$$

Ισχύει:

$$l_{\nu \eta \mu} = R_2 \cdot \Delta \theta \Rightarrow l_{\nu \eta \mu} = R_2 \cdot \frac{1}{2} \alpha_{\gamma \omega \nu} t_1^2 \Rightarrow$$

$$l_{\nu \eta \mu} = \frac{1}{2} \alpha_{\epsilon} t_1^2 \Rightarrow l_{\nu \eta \mu} = 1,8 \text{ m}$$

δ) Το πλάτος της α.α.τ. είναι:

$$A = \Delta l \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

Βρίσκουμε τη γωνιακή συχνότητα:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2 + m_3}} \Rightarrow \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$\Sigma F = -D_3 x \Rightarrow \Sigma F = -m_3 \omega^2 x \Rightarrow$$

$$T_{\sigma \tau} = -50x \text{ (S.I.)} (3)$$

Θέτοντας στη σχέση (3) όπου $x = -0,2 \text{ m}$ έχουμε:

$$T_{\sigma \tau} = -[50(-0,2)] \text{ N} \Rightarrow T_{\sigma \tau} = 10 \text{ N}$$

Προκύπτει:

$$T_{\sigma \tau} \leq T_{\sigma \tau, \max} \Rightarrow T_{\sigma \tau} \leq \mu_{\sigma} N_3 \Rightarrow \mu_{\sigma} \geq \frac{T_{\sigma \tau}}{m_3 g} \Rightarrow$$

$$\mu_{\sigma, \min} = \frac{T_{\sigma \tau}}{m_3 g} \Rightarrow \mu_{\sigma, \min} = \frac{T_{\sigma \tau}}{m_3 g} \Rightarrow \mu_{\sigma, \min} = 0,5$$

2.76 α) Από την ισορροπία του σώματος Σ_1 προκύπτει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = T_1 \Rightarrow T_1 = 10 \text{ N}$$

Από την ισορροπία της τροχαλίας προκύπτει:

$$\Sigma \tau_0 = 0 \Rightarrow T_1 R_2 = T_2 R_1 \Rightarrow T_2 = \frac{T_1 R_2}{R_1} \Rightarrow$$

$$T_2 = 20 \text{ N}$$

Από την ισορροπία του σώματος Σ_2 προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_2 = m_2 g \Rightarrow m_2 = \frac{T_2}{g} \Rightarrow m_2 = 2 \text{ kg}$$

β) Ισχύει:

$$\alpha = \alpha_{\gamma \omega \nu} R_1 \Rightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Για τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του Σ_2 , ισχύει:

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = m_2 \alpha \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 4 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

γ) Υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας του Σ_2 λίγο πριν την κρούση:

$$v_2 = \alpha \cdot \Delta t \text{ ή } v_2 = \alpha \sqrt{\frac{2h}{\alpha}} \Rightarrow v_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Από την Α.Δ.Ο. προκύπτει:

$$m_2 v_2 = (m_2 + m_3) v_k \text{ ή } v_k = \frac{m_2 v_2}{m_2 + m_3} \Rightarrow v_k = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Βρίσκουμε την αρχική απομάκρυνση του συσσωματώματος:

$$x = \frac{(m_2 + m_3)g}{k} - \frac{m_3 g}{k} \Rightarrow x = \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow x = 0,2 \text{ m}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας στην ταλάντωση. Προκύπτει:

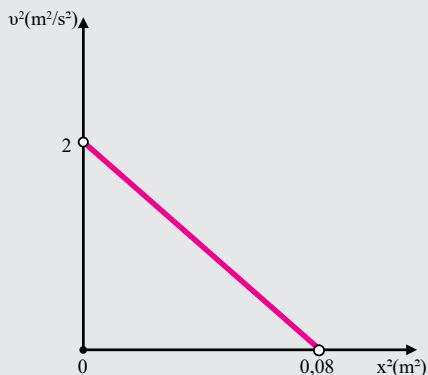
$$\frac{1}{2} (m_2 + m_3) v_k^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{(m_2 + m_3) v_k^2 + k x^2}{k}} \Rightarrow A = 0,2\sqrt{2} \text{ m}$$

δ) Ισχύει:

$$\frac{1}{2} (m_2 + m_3) v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow v^2 = 2 - 25 x^2 \text{ (S.I.)}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα έχει τη μορφή:



2.77 α) Ισχύει:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2 \cdot \Delta t \Rightarrow T = 0,1 \pi \text{ s}$$

Επίσης ισχύει:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow m = \frac{k T^2}{4\pi^2} \Rightarrow m = 0,5 \text{ kg}$$

β) Στη θέση ισορροπίας του σώματος έχουμε:

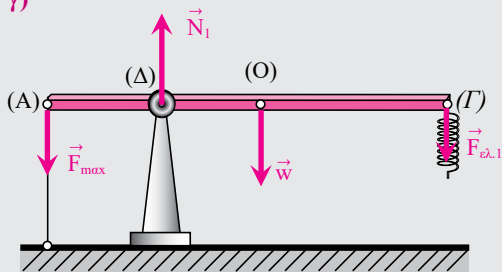
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow k \cdot \Delta l = mg \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} \Rightarrow$$

$$\Delta l = 0,025 \text{ m}$$

Επειδή ισχύει $A = d = 0,1 \text{ m}$ και επίσης $A > \Delta l$ προκύπτει ότι:

$$U_{\text{ελ}, \min} = 0$$

γ)



Τη στιγμή που το σώμα θα βρεθεί στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης του η δύναμη του ελατηρίου θα έχει μέτρο:

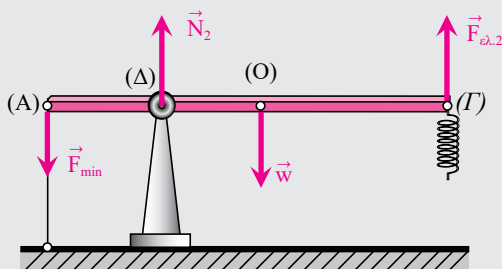
$$F_{\text{ελ},1} = k(A + \Delta l) \Rightarrow F_{\text{ελ},1} = 25 \text{ N}$$

Σε αυτή την περίπτωση η τάση του νήματος θα έχει τη μέγιστη τιμή της.

Η ράβδος ισορροπεί επομένως ισχύει:

$$\Sigma \tau_{\Delta} = 0 \text{ ή } T_{\max} \cdot A\Delta - Mg \cdot \Delta O - F_{\text{ελ},1} \cdot \Delta \Gamma = 0 \Rightarrow$$

$$T_{\max} = \frac{Mg \cdot \Delta O + F_{\text{ελ},1} \cdot \Delta \Gamma}{A\Delta} \Rightarrow T_{\max} = 175 \text{ N}$$



Τη στιγμή που το σώμα θα βρεθεί στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του η δύναμη του ελατηρίου θα έχει μέτρο:

$$F_{ελ,2} = k(A - \Delta l) \Rightarrow F_{ελ,2} = 15 \text{ N}$$

Σε αυτή την περίπτωση η τάση του νήματος θα έχει την ελάχιστη τιμή της.

Η ράβδος ισορροπεί επομένως ισχύει:

$$\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow T_{\min} \cdot A\Delta - Mg \cdot \Delta O + F_{ελ,2} \cdot \Delta \Gamma = 0 \Rightarrow$$

$$T_{\min} = \frac{Mg \cdot \Delta O - F_{ελ,2} \cdot \Delta \Gamma}{A\Delta} \Rightarrow T_{\min} = 55 \text{ N}$$

δ) Αναζητούμε την κατάλληλη τιμή της δύναμης του ελατηρίου έτσι ώστε οριακά το μέτρο της τάσης του νήματος να γίνει ίσο με μηδέν. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν το ελατήριο είναι συσπειρωμένο και επομένως η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά προς τα πάνω. Από την ισορροπία της ράβδου προκύπτει:

$$\Sigma \tau_A = 0 \quad -Mg \cdot \Delta O + F'_{ελ} \cdot \Delta \Gamma = 0 \Rightarrow$$

$$F'_{ελ} = \frac{Mg \cdot \Delta O}{\Delta \Gamma} \Rightarrow F'_{ελ} = \frac{100}{3} \text{ N}$$

Ισχύει:

$$F'_{ελ} = k(A_{\max} - \Delta l) \Rightarrow A_{\max} = \frac{F'_{ελ}}{k} + \Delta l \Rightarrow$$

$$A_{\max} = \frac{23}{120} \text{ m}$$

2.78 α) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι αρχικά:

$$\omega_1 = 2\pi f_1 \Rightarrow \omega_1 = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Το μέτρο της αρχικής στροφορμής του συστήματος είναι:

$$L_{\text{συσ,αρχ}} = L_1 + L_2 \Rightarrow L_{\text{συσ,αρχ}} = m v_1 \frac{l}{4} + m v_1 \frac{l}{4} \Rightarrow$$

$$L_{\text{συσ,αρχ}} = m \omega_1 \frac{l}{4} \frac{l}{4} + m \omega_1 \frac{l}{4} \frac{l}{4} \Rightarrow$$

$$L_{\text{συσ,αρχ}} = 2m \omega_1 \frac{l^2}{16} \Rightarrow$$

$$L_{\text{συσ,αρχ}} = 0,02 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

β) Από την εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Στροφορμής, έχουμε:

$$L_{\text{συσ,αρχ}} = L_{\text{συσ,τελ}} \Rightarrow 2m \omega_1 \frac{l^2}{16} = 2m \omega_2 \frac{l^2}{16} \Rightarrow$$

$$\omega_1 = 4\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{\omega_1}{4} \Rightarrow \omega_2 = 2,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για τη μεταβολή του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας έχουμε:

$$\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 \Rightarrow \Delta \omega = -7,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

γ) Η νέα συχνότητα περιστροφής είναι:

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} \Rightarrow f_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_2}{4} \Rightarrow f_2 = \frac{f_1}{4}$$

Το ποσοστό επί τοις εκατό της μεταβολής της συχνότητας είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{f_2 - f_1}{f_1} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{\frac{f_1}{4} - f_1}{f_1} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = -75\%$$

δ) Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$K_{\text{αρχ}} = 2 \cdot \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow K_{\text{αρχ}} = 2 \cdot \frac{1}{2} m \left(\omega_1 \frac{l}{4} \right)^2 \Rightarrow$$

$$K_{\text{αρχ}} = 0,1 \text{ J}$$

Η τελική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$K_{\text{τελ}} = 2 \cdot \frac{1}{2} m v_2^2 \Rightarrow K_{\text{τελ}} = 2 \cdot \frac{1}{2} m \left(\omega_2 \frac{l}{2} \right)^2 \Rightarrow$$

$$K_{\text{τελ}} = 0,025 \text{ J}$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι:

$$\Delta K = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \Rightarrow \Delta K = -0,075 \text{ J}$$

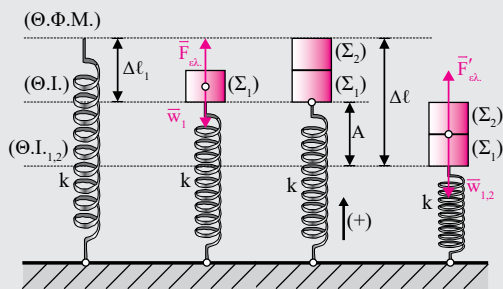
Κεφάλαιο 3: Ταλαντώσεις

ΘΕΜΑ Α

- 3.1 β) 3.2 γ) 3.3 δ) 3.4 α)
 3.5 γ) 3.6 β) 3.7 δ) 3.8 β)
 3.9 γ) 3.10 β) 3.11 α) 3.12 β)
 3.13 β) 3.14 β) 3.15 α) 3.16 β)
 3.17 α) 3.18 β) 3.19 γ) 3.20 β)
 3.21 β) 3.22 β) 3.23 γ) 3.24 γ)
 3.25 β) 3.26 α) 3.27 β) 3.28 β)
 3.29 δ) 3.30 γ) 3.31 α) 3.32 β)
 3.33 α) 3.34 α) 3.35 α) 3.36 δ)
 3.37 γ) 3.38 β) 3.39 β) 3.40 γ)

ΘΕΜΑ Β

3.41 Σωστή απάντηση το β).



Θεωρώντας ως θετική φορά, την ομόρροπη του βάρους του σώματος, τότε για τη θέση ισορροπίας του σώματος έχουμε:

$$(\Theta.Ι.) : \Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ.} + \vec{w}_1 = 0 \Rightarrow$$

$$F_{ελ.} - w_1 = 0 \Rightarrow F_{ελ.} = w_1 \Rightarrow$$

$$k\Delta l_1 = m_1 g \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{mg}{k} (1)$$

Στη θέση ισορροπίας του συστήματος σωμάτων έχουμε:

$$\Sigma \vec{F}'_y = 0 \Rightarrow \vec{F}'_{ελ.} + \vec{w}'_{1,2} = 0 \Rightarrow \vec{F}'_{ελ.} - w_{1,2} = 0 \Rightarrow$$

$$F_{ελ.} = w_{1,2} \Rightarrow k\Delta l = (m_1 + m_2)g \Rightarrow$$

$$\Delta l = \frac{2mg}{k} (2)$$

Το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων είναι:

$$A = \Delta l - \Delta l_1 \Rightarrow A = \frac{mg}{k} (3)$$

Η μέγιστη επιτάχυνση του συστήματος ισούται με:

$$\alpha_{\max} = \omega^2 A \Rightarrow \alpha_{\max} = \frac{k}{2m} A \Rightarrow$$

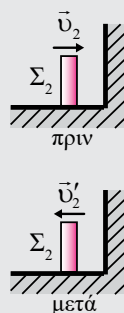
$$\alpha_{\max} = \frac{k}{2m} \frac{mg}{k} \Rightarrow \alpha_{\max} = \frac{g}{2}$$

3.42 Σωστή απάντηση το α).

Το σώμα Σ_2 μετά την εκτόξευσή του, εκτελεί Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με ταχύτητα μέτρου v_2 και μέχρι να συγκρουστεί με τον κατακόρυφο τοίχο θα έχει διανύσει απόσταση d . Επειδή η κρούση με τον τοίχο είναι κεντρική και ελαστική, η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 δε μεταβάλλεται, επομένως και το μέτρο της ταχύτητας που αποκτά μετά την κρούση δεν μεταβάλλεται, δηλαδή $v'_2 = v_2$. Έτσι για όλο το χρονικό διάστημα Δt_2 από τη στιγμή της εκτόξευσης και μέχρι να επιστρέψει στο σημείο (Γ), το σώμα Σ_2 έχει το ίδιο μέτρο ταχύτητας v_2 . Στο χρονικό αυτό διάστημα το σώμα Σ_2 διανύει απόσταση ίση με $2d$. Ισχύει:

$$2d = v_2 \cdot \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{2d}{v_2} (1)$$

Το σώμα Σ_1 μετά την εκτόξευσή του εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση με πλάτος A και περίοδο T . Το χρονικό διάστημα Δt_1 από τη στιγμή της εκτόξευσής του και μέχρι να επιστρέψει στο σημείο (Γ) (Θέση Ισορροπίας) για πρώτη φορά είναι:



Για τον χρόνο υποδιπλασιασμού του πλάτους t' , σε μια φθίνουσα ταλάντωση της οποίας το πλάτος μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο, σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$, έχουμε:

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \xrightarrow{A=\frac{A_0}{2}} \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t'} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t'} \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(e^{-\Lambda t'}) \Rightarrow -\ln 2 = -\Lambda t' \Rightarrow$$

$$t' = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$

Έτσι για τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 αντίστοιχα ισχύει:

$$t_1 = \frac{\ln 2}{\Lambda_1} (1) \text{ και } t_2 = \frac{\ln 2}{\Lambda_2} (2)$$

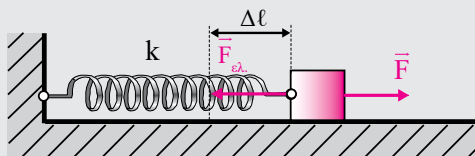
$$\text{Όμως } t_2 = 2t_1 \Rightarrow \frac{\ln 2}{\Lambda_2} = 2 \cdot \frac{\ln 2}{\Lambda_1} \Rightarrow \Lambda_1 = 2\Lambda_2$$

3.45 Σωστή απάντηση το γ).

Πείραμα 1: Στην περίπτωση αυτή η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης και η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου δεν ταυτίζονται. Για τον υπολογισμό της θέσης ισορροπίας έχουμε:

$$\Theta.I.: \Sigma F = 0 \Rightarrow k \cdot \Delta l = F \Rightarrow \Delta l = \frac{F}{k} (1)$$

Θ.Φ.Μ. Θ.Ι.



Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ που το σώμα βρίσκεται στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, η ταχύτητα του σώματος είναι μηδέν ($v = 0$), τότε η θέση αυτή είναι μία από τις 2 ακραίες θέσεις της ταλάντωσης του.

$$\text{Οπότε } A_1 = \Delta l \Rightarrow A_1 = \frac{F}{k} (2)$$

Πείραμα 2: Στην περίπτωση αυτή η ενέργεια που προσφέρεται στο σύστημα μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$ αποτελεί την ολική ενέργεια της ταλάντωσης που θα εκτελέσει στη συνέχεια το σώμα μετά την κατάργηση της δύναμης.

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ θα γίνει ίσο με το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου όταν το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta l = \frac{F}{k}$ όπως αποδείχτηκε στην περίπτωση του πειράματος 1. Έχουμε:

$$E_{\text{ολ.}(2)} = W_F \Rightarrow \frac{1}{2} k A_2^2 = F \cdot \Delta l \xrightarrow{\Delta l = \frac{F}{k}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} k A_2^2 = F \cdot \frac{F}{k} \Rightarrow A_2^2 = 2 \cdot \frac{F^2}{k^2} \Rightarrow A_2 = \sqrt{2} \cdot \frac{F}{k} (2)$$

$$A_2 = \sqrt{2} A_1$$

3.46 Σωστή απάντηση το β).

Τη χρονική στιγμή t_1 το πλάτος της ταλάντωσης του αρμονικού ταλαντωτή έχει υποδιπλασιαστεί. Οπότε έχουμε:

$$A = A_0 e^{-\left(\frac{\ln 2}{2}\right)t} \xrightarrow{t=t_1, A=\frac{A_0}{2}} \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\left(\frac{\ln 2}{2}\right)t_1} \Rightarrow$$

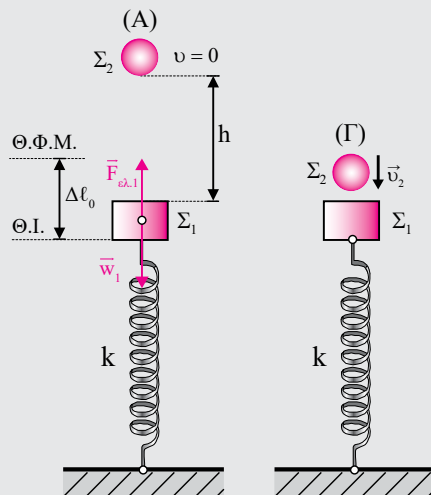
$$e^{-\left(\frac{\ln 2}{2}\right)t_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\left(\frac{\ln 2}{2}\right) \cdot t_1 = -\ln 2 \Rightarrow t_1 = 2s$$

Για τον αριθμό N των ταλαντώσεων που εκτελεί ο αρμονικός ταλαντωτής μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$N = \frac{t_1}{T} = 4 \text{ ταλαντώσεις}$$

3.47 Σωστή απάντηση το γ).

Για τα δύο πειράματα ισχύει:



Μελετάμε την κίνηση του σώματος Σ_2 κατά την πτώση του από ύψος h . Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.) για τις θέσεις Α, Γ θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο όπου βρίσκεται το σημείο Γ:

$$E_{\text{MHX.A}} = E_{\text{MHX.Γ}} \Rightarrow K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \Rightarrow$$

$$0 + m_2gh = \frac{1}{2}m_2v_2^2 + 0 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

$$v_2 = 2\sqrt{g\Delta\ell_0} \quad (1)$$

Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 ισχύει:

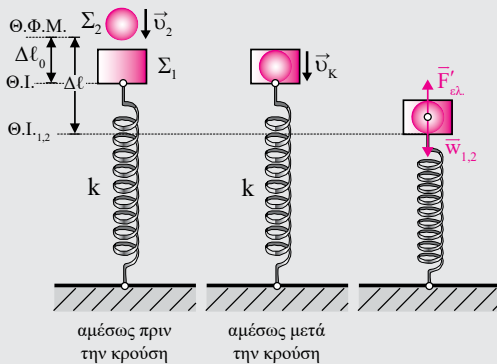
$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{\text{ελ1}} + \vec{w} = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ1}} - w_1 = 0 \Rightarrow$$

$$F_{\text{ελ1}} = m_1g \Rightarrow k\Delta\ell_0 = m_1g \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{m_1g}{k} \quad (2)$$

Η σχέση (1) λόγω της (2) γίνεται:

$$v_2 = 2g\sqrt{\frac{m_1}{k}} \quad (3)$$

Πείραμα 1



Το σύστημα των δύο σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι μονωμένο οπότε ισχύει η Αρχή διατήρησης της Ορμής (Α.Δ.Ο):

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}} \Rightarrow m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_k \Rightarrow$$

$$v_k = \frac{v_2}{2} \Rightarrow v_k = g\sqrt{\frac{m_1}{k}} \quad (4)$$

Για τη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος (Ν.Θ.Ι) ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow \vec{F}'_{\text{ελ}} + \vec{w} = 0 \Rightarrow F'_{\text{ελ}} - w_{1,2} = 0 \Rightarrow$$

$$F'_{\text{ελ}} = (m_1 + m_2)g \Rightarrow k\Delta\ell = 2m_1g \Rightarrow \Delta\ell = \frac{2m_1g}{k} \quad (5)$$

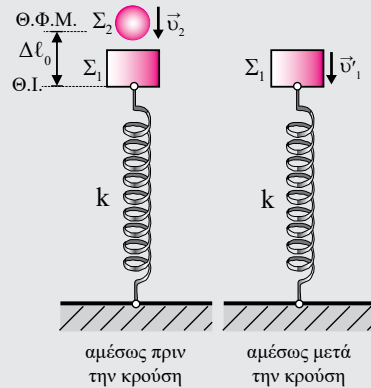
Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας (Α.Δ.Ε.Τ.) για τη θέση της κρούσης.

$$(Α.Δ.Ε.Τ.) \text{ για } y = \Delta l - \Delta l_0 \Rightarrow y = \frac{m_1g}{k} \quad (6)$$

$$E_1 = K + U \Rightarrow E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_k^2 + \frac{1}{2}ky^2 \Rightarrow$$

$$E_1 = \frac{3m_1^2g^2}{2k} \quad (7)$$

Πείραμα 2



Η κρούση των δύο σωμάτων είναι κεντρική και ελαστική. Τα σώματα έχουν ίσες μάζες άρα ανταλλάσσουν ταχύτητες. Οπότε:

$$v'_1 = v_2 = 2g\sqrt{\frac{m_1}{k}} \quad (8)$$

Η ταχύτητα αυτή είναι η μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα ταλάντωσης του σώματος Σ_1 εφόσον η κρούση γίνεται στη θέση ισορροπίας του. Άρα $v'_1 = v_{\text{max}}$ (9)

Η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Σ_1 μετά την κρούση είναι:

$$E_2 = \frac{1}{2}m_1 \cdot v_{\text{max}}^2 \Rightarrow E_2 = \frac{2m_1^2g^2}{k} \quad (10)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (7), (10) προκύπτει:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{3}{4}$$

3.48 Σωστή απάντηση το β).

Έστω A_1 και A_2 το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης μετά από μία και μετά από δύο περιόδους αντίστοιχα. Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $A_1 = \frac{A_0}{2}$.

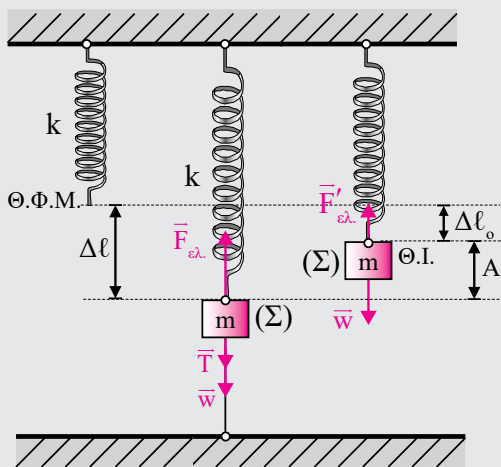
Από θεωρία γνωρίζουμε ότι ο λόγος δύο δι-
αδοχικών μεγίστων απομακρύνσεων προς την
ίδια κατεύθυνση παραμένει σταθερός οπότε:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow \frac{A_0}{\frac{A_0}{2}} = \frac{2}{A_2} \Rightarrow A_2 = \frac{A_0}{4}$$

Το έργο της δύναμης που αντιστέκεται στην
κίνηση του σώματος από τη χρονική στιγμή
 $t_1 = T$ έως τη χρονική στιγμή $t_2 = 2T$ είναι:

$$\begin{aligned} W_{F_{\text{αντ.}}} &= E_2 - E_1 = \frac{1}{2} D A_2^2 - \frac{1}{2} D A_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} D \cdot \left(\frac{A_0}{4}\right)^2 - \frac{1}{2} D \cdot \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 = \frac{E_0}{16} - \frac{E_0}{4} \Rightarrow \\ W_{F_{\text{αντ.}}} &= -\frac{3E_0}{16} \end{aligned}$$

3.49 Σωστή απάντηση το β).



Αρχικά το σώμα ισορροπεί με τη βοήθεια κα-
τακόρυφου αβαρούς και μη εκτατού νήματος
επομένως ισχύει:

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{F} &= 0 \Rightarrow \vec{F}_{\text{ελ}} + \vec{T} + \vec{w} = 0 \Rightarrow \\ F_{\text{ελ}} - T - w &= 0 \Rightarrow F_{\text{ελ}} = T + mg \Rightarrow \\ k\Delta\ell &= 2mg \Rightarrow \Delta\ell = \frac{2mg}{k} \quad (1) \end{aligned}$$

Για τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}'_{\text{ελ}} + \vec{w} = 0 \Rightarrow F'_{\text{ελ}} - w = 0 \Rightarrow$$

$$F'_{\text{ελ}} = w \Rightarrow k\Delta\ell_0 = mg \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{mg}{k} \quad (2)$$

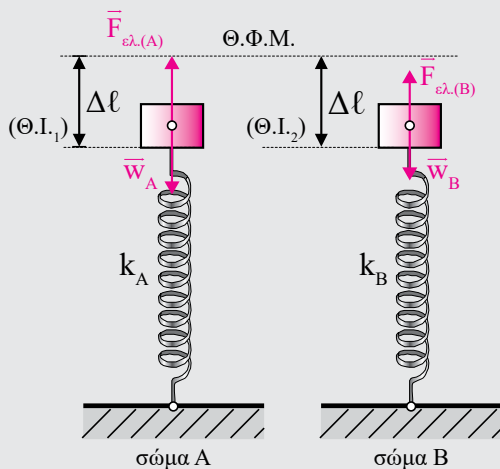
Η θέση που κόβεται το νήμα αποτελεί ακραία
θέση για την ταλάντωση του σώματος άρα το
πλάτος της ταλάντωσης θα είναι:

$$A = \Delta\ell - \Delta\ell_0 \Rightarrow A = \frac{2mg}{k} - \frac{mg}{k} \Rightarrow A = \frac{mg}{k} \quad (3)$$

Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου
θα είναι:

$$\begin{aligned} U_{\text{ελ,max}} &= \frac{1}{2} k (\Delta\ell_0 + A)^2 \Rightarrow \\ U_{\text{ελ,max}} &= \frac{1}{2} k \left(\frac{2mg}{k}\right)^2 \Rightarrow \\ U_{\text{ελ,max}} &= 2 \frac{m^2 g^2}{k} \end{aligned}$$

3.50 Σωστή απάντηση το α).



Για τη θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) του κάθε σώμα-
τος ισχύει:

Σώμα Α:

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{F} &= 0 \Rightarrow \vec{F}_{\text{ελ,(A)}} + \vec{w}_A = 0 \Rightarrow \\ F_{\text{ελ,(A)}} - w_A &= 0 \Rightarrow k_A \Delta\ell = m_A g \quad (1) \end{aligned}$$

Σώμα Β:

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{F} &= 0 \Rightarrow \vec{F}_{\text{ελ,(B)}} + \vec{w}_B = 0 \Rightarrow \\ F_{\text{ελ,(B)}} - w_B &= 0 \Rightarrow k_B \Delta\ell = m_B g \quad (2) \end{aligned}$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις (1) και (2) οπότε
έχουμε:

$$\frac{k_A}{k_B} = \frac{m_A}{m_B} \xRightarrow{m_A=2m_B} k_A = 2k_B \Rightarrow m_A \omega_A^2 = 2m_B \omega_B^2$$

$$\xRightarrow{m_A=2m_B} 2m_B \omega_A^2 = 2m_B \omega_B^2 \Rightarrow \omega_A = \omega_B \quad (3)$$

Για τις μέγιστες επιταχύνσεις που αποκτούν τα δύο σώματα κατά τη διάρκεια των ταλαντώσεών τους έχουμε:

$$\alpha_{A(\max)} = \omega_A^2 d \quad (3)$$

$$\alpha_{B(\max)} = \omega_B^2 d \Rightarrow \alpha_{A(\max)} = \alpha_{B(\max)}$$

3.51 Σωστή απάντηση το β).

Ο ρυθμός με τον οποίο μετατρέπεται η μηχανική ενέργεια σε θερμότητα εκφράζεται μέσω των δυνάμεων αντίστασης, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta W_{F_{\text{avt.}}}}{\Delta t} = \frac{F_{\text{avt.}} \cdot \Delta x}{\Delta t} \stackrel{F_{\text{avt.}} = -b \cdot v}{=} \frac{-b \cdot v \cdot \Delta x}{\Delta t}$$

$$= -b \cdot v \cdot v \Rightarrow \frac{\Delta W_{F_{\text{avt.}}}}{\Delta t} = -b \cdot v^2$$

Οπότε ο ρυθμός με τον οποίο μετατρέπεται η μηχανική ενέργεια σε θερμότητα είναι ανάλογος του τετραγώνου της ταχύτητας του σώματος.

3.52 Σωστή απάντηση είναι το α).

Αρχικά εκτρέπουμε το σώμα κατά d και το αφήνουμε ελεύθερο, άρα $d = A$.

Όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση φυσικού μήκους του, που είναι και θέση ισορροπίας έχει ταχύτητα $v_{\max}$. Ταυτόχρονα επιδρά και το δεύτερο ελατήριο στο σώμα χωρίς να του αλλάξει τη θέση ισορροπίας. Επομένως:

$$v_{\max} = v'_{\max} \Rightarrow \omega d = \omega' A' \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} d = \sqrt{\frac{4k}{m}} A' \Rightarrow A' = \frac{d}{2}$$

Το σώμα από την $t = 0$ έχει διανύσει απόσταση $s = d + A' = d + \frac{d}{2} = 1,5d$

3.53 Α) Σωστή απάντηση είναι το β).

Από τη συνθήκη ισορροπίας προκύπτει:

$$(\Theta.I.): \Sigma F = 0 \Rightarrow F = F_{\text{ελ}} \Rightarrow F = k\Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{F}{k}$$

Την $t = 0$ το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση της ταλάντωσης ($v = 0$), οπότε $A = \Delta l = \frac{F}{k}$

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} k \left(\frac{F}{k} \right)^2 \quad \text{άρα} \quad E = \frac{F^2}{2k}$$

Β) Σωστή απάντηση είναι το α).

Πριν την κατάργηση της $\vec{F}$ το σώμα ταλαντώνεται με πλάτος $A_1 = \Delta l$. Η $\vec{F}$ καταργείται όταν η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου παίρνει τη μέγιστη τιμή της, δηλαδή όταν απέχει από τη θέση φυσικού μήκους $2\Delta l$. Αυτό σημαίνει ότι τόσο θα είναι και το νέο πλάτος της ταλάντωσης.

Για τις ολικές ενέργειες ισχύει:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2} k A_1^2}{\frac{1}{2} k A_2^2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{\Delta l^2}{(2\Delta l)^2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{4}$$

3.54 Σωστή απάντηση είναι το α).

Από τη συνθήκη ισορροπίας προκύπτει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow w = F_{\text{ελ}} \Rightarrow mg = k\Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k}$$

Εφαρμόζοντας Αρχή Διατήρησης Ενέργειας Ταλάντωσης για τη χρονική στιγμή που το σώμα έρχεται σε επαφή με το ελατήριο:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k \Delta l^2 \quad (1)$$

Όταν το σώμα έρθει σε επαφή με το ελατήριο θα έχει ταχύτητα:

$$v = gt = g \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Επίσης, το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι:

$$A = d - \Delta l$$

Οπότε η (1) γίνεται:

$$k(d - \Delta l)^2 = m(\sqrt{2gh})^2 + k\Delta l^2 \Rightarrow$$

$$kd^2 - 2kd\Delta l + k\Delta l^2 = 2mgh + k\Delta l^2 \Rightarrow$$

$$kd^2 - 2kd\Delta l = 2mgh$$

$$kd^2 - 2kd \frac{mg}{k} = 2mgh \Rightarrow$$

$$kd^2 = 2mgh + 2dmg \Rightarrow m = \frac{kd^2}{2g(h+d)}$$

3.55 Σωστή απάντηση είναι το β).

Παίρνουμε συνθήκη ισορροπίας για το χρονικό διάστημα που ασκείται η $\vec{F}$.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = F_{ελ} \Rightarrow F = k\Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{F}{k} = A$$

Όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση μηδενικής επιτάχυνσης, δηλαδή τη θέση ισορροπίας, η δύναμη υποδιπλασιάζεται. Για τη νέα θέση ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow \frac{F}{2} = F_{ελ} \Rightarrow \frac{F}{2} = k\Delta l' \Rightarrow \Delta l' = \frac{F}{2k} = \frac{A}{2}$$

Άρα η δύναμη υποδιπλασιάστηκε όταν το σώμα απείχε από τη νέα θέση ισορροπίας του $\Delta l'$.

Επίσης κατά τον υποδιπλασιασμό το σώμα διερχόταν από τη θέση ισορροπίας του, άρα είναι μέγιστη ταχύτητα $v = v_{\max} = \omega A = \omega \frac{F}{k}$.

Εφαρμόζοντας Αρχή Διατήρησης Ενέργειας Ταλάντωσης για τη χρονική στιγμή που η δύναμη υποδιπλασιάζεται, έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} kA'^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} k\Delta l'^2 \Rightarrow$$

$$kA'^2 = m\omega^2 A^2 + k \frac{A^2}{4} \Rightarrow A' = \frac{A\sqrt{5}}{2}$$

3.56 Σωστή απάντηση είναι το β).

Από τους τύπους της ταχύτητας μετά την ελαστική κρούση του m_2 με το m_3 και θέτοντας θετική φορά προς τα δεξιά παίρνουμε:

$$v'_2 = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} v_2 + \frac{2m_3}{m_2 + m_3} v_0 = \frac{2m}{3m} v_0 \Rightarrow$$

$$v'_2 = \frac{2}{3} v_0$$

και

$$v'_3 = \frac{m_3 - m_2}{m_2 + m_3} v_0 + \frac{2m_2}{m_2 + m_3} v_2 = -\frac{m}{3m} v_0 \Rightarrow$$

$$v'_3 = -\frac{1}{3} v_0$$

Οπότε το σώμα μάζας m_3 μετά την κρούση με το m_2 συνεχίζει προς τα αριστερά με ταχύτητα

τα μέτρον $\frac{1}{3} v_0$, με την οποία και συγκρούεται με το σώμα μάζας m_1 .

Από τους τύπους της ταχύτητας μετά την ελαστική κρούση του m_1 με το m_3 παίρνουμε:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_3}{m_1 + m_3} v_1 + \frac{2m_3}{m_1 + m_3} \left(-\frac{v_0}{3} \right) = -\frac{2m}{2m} \frac{v_0}{3} \Rightarrow v'_1 = -\frac{1}{3} v_0$$

Επειδή οι κρούσεις έγιναν στις θέσεις ισορροπίας των σωμάτων m_1 και m_2 αντίστοιχα, οι ταχύτητες που απέκτησαν τα σώματα μετά τις κρούσεις είναι οι μέγιστες. Η ολική ενέργεια λοιπόν θα ισούται με την κινητική ενέργεια στη θέση της κρούσης.

$$E_1 = K_{\max 1} \Rightarrow \frac{1}{2} k_1 A^2 = \frac{1}{2} m v_1'^2 \Rightarrow k_1 A^2 = \frac{m v_0^2}{9} \quad (1)$$

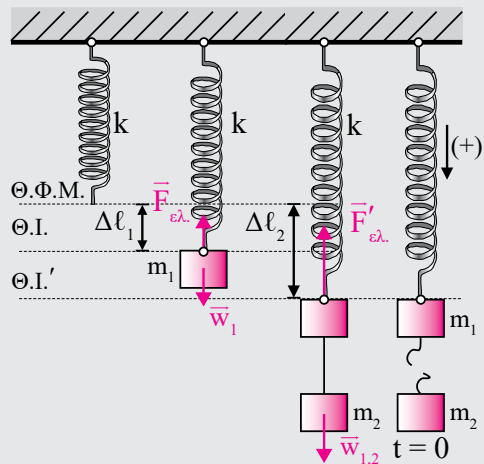
και

$$E_2 = K_{\max 2} \Rightarrow \frac{1}{2} k_2 4A^2 = \frac{1}{2} 2m v_2'^2 \Rightarrow$$

$$k_2 4A^2 = \frac{8m v_0^2}{9} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις (1), (2) ισχύει:

$$\frac{k_1}{4k_2} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{2}$$

3.57 Σωστή απάντηση είναι α).

Στην αρχική θέση ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow w_{1,2} = F'_{ελ} \Rightarrow$$

$$(m_1 + m_2)g = k \cdot \Delta l_2 \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$$

Στη νέα θέση ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow w_1 = F_{ελ} \Rightarrow m_1 g = k \cdot \Delta l_1 \Rightarrow$$

$$\Delta l_1 = \frac{m_1 g}{k}$$

Για το πλάτος της ταλάντωσης έχουμε:

$$A = \Delta l_2 - \Delta l_1 \Rightarrow A = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} - \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow$$

$$A = \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow A = \frac{4mg}{k}$$

Η μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου μετά το κόψιμο του νήματος είναι:

$$U_{ελ,max} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta l_{max}^2 \Rightarrow U_{ελ,max} = \frac{1}{2} k \cdot (\Delta l_1 + A)^2 \Rightarrow$$

$$U_{ελ,max} = \frac{1}{2} k \cdot \left(\frac{mg}{k} + \frac{4mg}{k} \right)^2 \Rightarrow$$

$$U_{ελ,max} = \frac{25m^2 g^2}{2k}$$

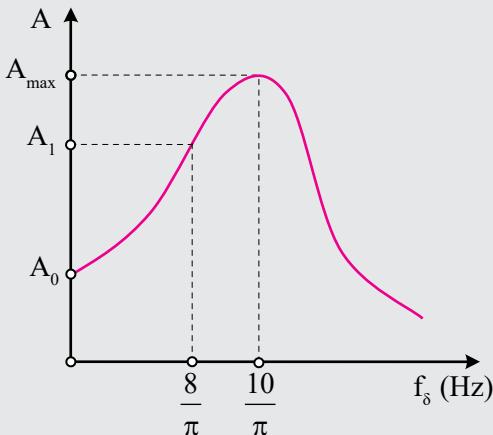
3.58 i) Σωστή απάντηση είναι η α).

Η ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f_0 = \frac{10}{\pi} \text{ Hz}$$

Η συχνότητα της εξωτερικής περιοδικής δύναμης (διεγέρτης) είναι:

$$f_{\delta} = \frac{\omega_{\delta}}{2\pi} \Rightarrow f_{\delta} = \frac{16}{2\pi} \text{ Hz} \Rightarrow f_{\delta} = \frac{8}{\pi} \text{ Hz}$$

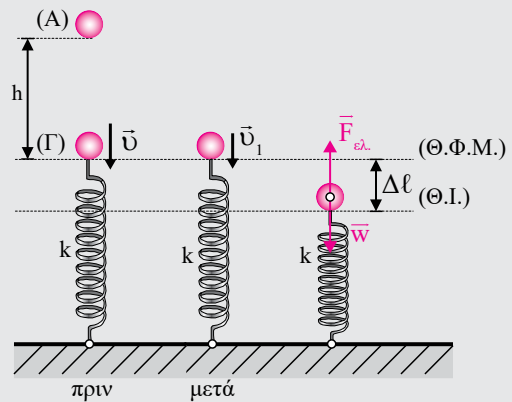


Με τη βοήθεια του παραπάνω διαγράμματος προκύπτει ότι με τη μείωση της συχνότητας του διεγέρτη, το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται συνεχώς.

ii) Σωστή απάντηση είναι η γ).

Με τη βοήθεια του παραπάνω διαγράμματος προκύπτει ότι με την αύξηση της συχνότητας του διεγέρτη το πλάτος της ταλάντωσης αρχικά αυξάνεται και έπειτα μειώνεται.

3.59 Σωστή απάντηση είναι α).



Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος από τη θέση Α μέχρι τη θέση Γ. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} m v^2 - 0 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Ισχύει:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v_1 = \frac{v}{2} \Rightarrow v_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{2}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w \Rightarrow k \cdot \Delta l = mg \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k}$$

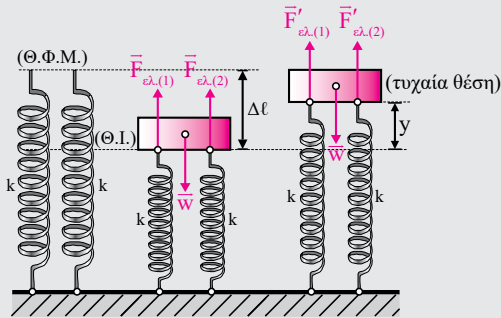
Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} k \Delta l^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4} m 2gh + k \left(\frac{mg}{k} \right)^2 = k A^2 \Rightarrow$$

$$\frac{3m^2 g^2}{k} + \frac{m^2 g^2}{k} = k A^2 \Rightarrow A = \frac{2mg}{k}$$

3.60 Σωστή απάντηση είναι α).



Από τη συνθήκη ισορροπίας στη θέση ισορροπίας προκύπτει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow W = F_{ελ,1} + F_{ελ,2} \Rightarrow W = 2k \cdot \Delta l(1).$$

Στην τυχαία θέση ισχύει:

$$\Sigma F = -W + F'_{ελ,1} + F'_{ελ,2} \Rightarrow$$

$$\Sigma F = -W + k \cdot (\Delta l - y) + k \cdot (\Delta l - y) \Rightarrow$$

$$\Sigma F = -2ky$$

Επομένως το σύστημα σώμα-ελατήριο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D = 2k$.

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$mg = 2k \cdot \Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{2k}$$

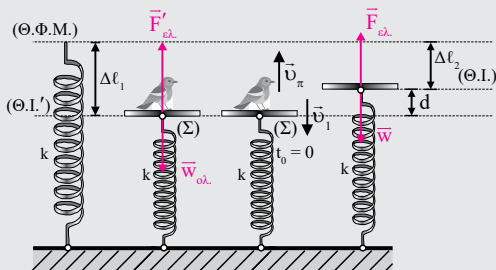
Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2} m v_{εκ}^2 + \frac{1}{2} 2k \Delta l^2 = \frac{1}{2} 2k A^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{m v_{εκ}^2 + 2k \Delta l^2}{2k}} \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{m \frac{3g^2 m}{2k} + 2k \frac{m^2 g^2}{4k^2}}{2k}} \Rightarrow A = \frac{mg}{k}$$

3.61 Σωστή απάντηση είναι γ).



Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. Προκύπτει:

$$0 = m v_{\pi} - m v_1 \Rightarrow v_1 = v_{\pi}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στη Θ.Ι. έχουμε:

$$F'_{ελ} = W_{ολ} \Rightarrow k \cdot \Delta l_1 = 2mg \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{2mg}{k}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στη Θ.Ι. έχουμε:

$$F_{ελ} = W \Rightarrow k \cdot \Delta l_2 = mg \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{mg}{k}$$

Προκύπτει:

$$d = \Delta l_1 - \Delta l_2 \Rightarrow d = \frac{mg}{k}$$

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2} m v_{\pi}^2 + \frac{1}{2} k d^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow$$

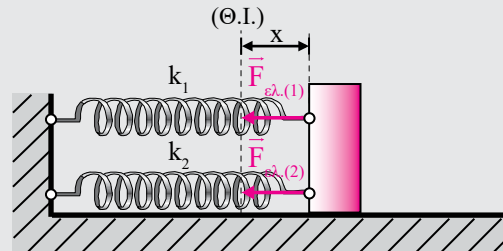
$$m \frac{8g^2}{k} + k \left(\frac{mg}{k} \right)^2 = k A^2 \Rightarrow A = \frac{3mg}{k}$$

Η μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου μετά το κόψιμο του νήματος είναι:

$$U_{ελ,max} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta l_{max}^2 \Rightarrow U_{ελ,max} = \frac{1}{2} k \cdot (\Delta l_2 + A)^2 \Rightarrow$$

$$U_{ελ,max} = \frac{1}{2} k \cdot \left(\frac{mg}{k} + \frac{3mg}{k} \right)^2 \Rightarrow U_{ελ,max} = \frac{8m^2 g^2}{k}$$

3.62 Σωστή απάντηση είναι η α).



Σε μια τυχαία θέση ισχύει:

$$\Sigma F = -F'_{ελ,1} - F'_{ελ,2} \Rightarrow \Sigma F = -(k_1 + k_2) x$$

Επομένως το σώμα Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k_1 + k_2 \Rightarrow D = 2k$

Έχουμε:

$$W_F = E \Rightarrow Fd = \frac{1}{2} 2k A^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{Fd}{k}}$$

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow K + \frac{1}{2} 2k \cdot d^2 = \frac{1}{2} 2kA^2 \Rightarrow$$

$$K = k \frac{Fd}{k} - k \cdot d^2 \Rightarrow k = d(F - kd)$$

3.63 Σωστή απάντηση είναι το β).

Στο σώμα ασκούνται δύο δυνάμεις, το βάρος και η τάση του νήματος που παίζουν τον ρόλο της δύναμης επαναφοράς.

$$\Sigma F = F_{\epsilon\pi\alpha\nu} \Rightarrow w - T = -Kx \Rightarrow T = w + Kx$$

Για να μη χαλαρώσει το νήμα πρέπει η ελάχιστη τιμή της τάσης του νήματος να είναι:

$$T_{\min} \geq 0$$

Η τάση του νήματος παίρνει την ελάχιστη τιμή της στην ακραία θέση -Α. Άρα :

$$T_{\min} = w - kA \Rightarrow T_{\min} = mg - kA$$

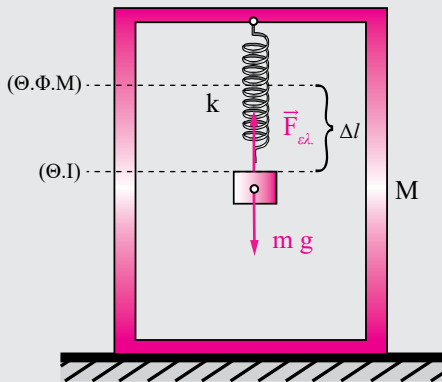
Αφού πρέπει:

$$T_{\min} \geq 0 \Rightarrow mg - kA \geq 0 \Rightarrow A \leq \frac{mg}{k}$$

άρα το μέγιστο πλάτος πρέπει να είναι:

$$A_{\max} = \frac{mg}{k}$$

3.64 Σωστή απάντηση είναι το γ).



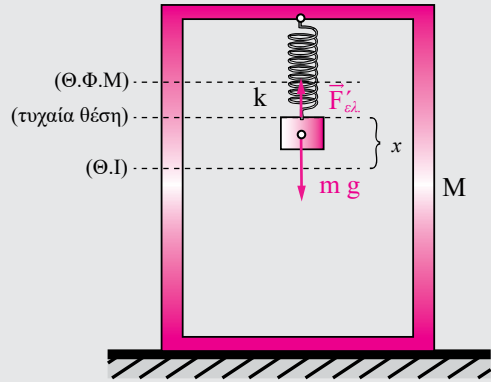
Αρχικά το σώμα μάζας m ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα. Έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow w = F_{\epsilon\lambda} \Rightarrow mg = k\Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k}$$

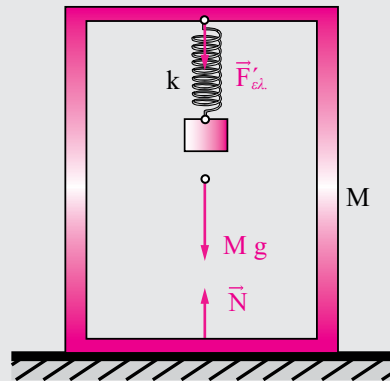
Σε μια τυχαία θέση της ταλάντωσης του σώματος, μάζας m, έχουμε:

$$\Sigma F = -kx \Rightarrow F'_{\epsilon\lambda} - w = -kx \Rightarrow$$

$$F'_{\epsilon\lambda} = mg - kx \quad (1)$$



Στο ακόλουθο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο, μάζας M, την ίδια στιγμή. Επειδή το κιβώτιο ισορροπεί, πρέπει:



$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N - F'_{\epsilon\lambda} - Mg = 0 \Rightarrow N = F'_{\epsilon\lambda} + Mg \Rightarrow$$

$$N = mg - kx + Mg \quad (2)$$

Για να μη χαθεί η επαφή πρέπει:

$$N \geq 0 \Rightarrow mg - kx + Mg \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{(m+M)g}{k} \Rightarrow$$

$$x_{\max} = \frac{(m+M)g}{k} \Rightarrow A = \frac{(M+m)g}{k}$$

3.65 Σωστή απάντηση είναι το α).

Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για το σώμα μάζας m_2 :

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow U_{αρχ} = K_{τελ} \Rightarrow m_2 gh = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

όπου v_2 είναι η ταχύτητα του σώματος μάζας m_2 ελάχιστα πριν την κρούση.

Υπολογίζουμε την κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση εφαρμόζοντας Αρχή Διατήρησης της Ορμής:

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow m_2 v_2 = (m_2 + m_1) v_k \Rightarrow$$

$$m v_2 = 2m v_k \Rightarrow v_k = \frac{v_2}{2}$$

$$\text{οπότε η } v_k \text{ γίνεται: } v_k = \frac{v_2}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2gh} \quad (1)$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας του m_1 :

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg = k \Delta l_1 \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{mg}{k}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)g = k \Delta l \Rightarrow$$

$$2mg = k \Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{2mg}{k} = 2 \Delta l_1$$

Από την Αρχή Διατήρησης Ενέργειας Ταλάντωσης για το συσσωμάτωμα τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση παίρνουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_k^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad (2)$$

όπου x η απόσταση της θέσης ισορροπίας του συσσωματώματος από τη θέση που έγινε η κρούση, για την οποία ισχύει:

$$x = \Delta l - \Delta l_1 = \Delta l_1 = \frac{mg}{k} \quad (3)$$

Η (2) λόγω της (1) και της (3) γίνεται:

$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} 2m \frac{1}{4} 2gh_{\max} + \frac{1}{2} k \frac{m^2 g^2}{k^2} \Rightarrow$$

$$k A^2 = mgh_{\max} + \frac{m^2 g^2}{k} \quad (4)$$

Σε τυχαία θέση της ταλάντωσης του συσσωματώματος πάνω από τη Θ.Φ.Μ. ισχύει:

$$\Sigma F = F_{\epsilon\pi\alpha\nu} \Rightarrow -w_{\sigma\upsilon\sigma} - F_{\epsilon\lambda} = -kx \Rightarrow$$

$$F_{\epsilon\lambda} = kx - (m_1 + m_2)g \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} = kx - 2mg \quad (5)$$

Στο σώμα μάζας m_3 ασκούνται οι δυνάμεις του βάρους, της επαφής με το δάπεδο και της

αντίδρασης της δύναμης του ελατηρίου. Από τη συνθήκη ισορροπίας του έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N + F'_{\epsilon\lambda} - m_3 g = 0 \Rightarrow$$

(5)

$$N + F'_{\epsilon\lambda} - 2mg = 0 \Rightarrow N + kx - 2mg - 2mg = 0 \Rightarrow$$

$$N = 4mg - kx$$

όπου $F'_{\epsilon\lambda} = F_{\epsilon\lambda}$ ως δυνάμεις δράσης-αντίδρασης.

Για να μη χαθεί η επαφή πρέπει:

$$N \geq 0 \Rightarrow 4mg - kA \geq 0 \text{ και } A \leq \frac{4mg}{k} \quad (6)$$

άρα το μέγιστο πλάτος πρέπει να είναι:

$$A_{\max} = \frac{4mg}{k} \quad (7)$$

Η (4) λόγω της (1) και της (7) γίνεται:

$$k \frac{16m^2 g^2}{k^2} = mgh_{\max} + \frac{m^2 g^2}{k} \Rightarrow h_{\max} = \frac{15mg}{k}$$

3.66 Σωστή απάντηση είναι το α).

Στο σώμα, μάζας M , ασκούνται δύο δυνάμεις, η στατική τριβή και η αντίδραση της δύναμης ελατηρίου από το σώμα m που εκτελεί ταλάντωση. Το σώμα μάζας M παραμένει ακίνητο άρα:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau} - F'_{\epsilon\lambda} = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau} = F'_{\epsilon\lambda}$$

όπου $F'_{\epsilon\lambda} = F_{\epsilon\lambda}$ ως δυνάμεις δράσης-αντίδρασης.

Η στατική τριβή παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν το σώμα μάζας m βρίσκεται σε ακραία θέση και η δύναμη του ελατηρίου είναι μέγιστη, επομένως:

$$T_{\sigma\tau, \max} = F'_{\epsilon\lambda, \max} \Rightarrow \mu N = kA \Rightarrow$$

$$\mu Mg = kA \Rightarrow \mu 2mg = kA \quad (1)$$

Το σώμα μάζας m εκτοξεύεται με ταχύτητα v_0 από τη θέση ισορροπίας του, άρα είναι η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά και ισχύει:

$$v_0 = \omega A \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} A \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{k}} v_0$$

Οπότε η (1) γίνεται:

$$\mu 2mg = k \sqrt{\frac{m}{k}} v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{2\mu mg}{k} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$$

$$v_0 = 2\mu g \sqrt{\frac{m^2 k}{mk^2}} \Rightarrow v_0 = 2\mu g \sqrt{\frac{m}{k}}$$

ΘΕΜΑ Γ

3.67 α) Από την εξίσωση της απομάκρυνσης του συστήματος συμπεραίνουμε τα εξής:

$$A = 0,1\text{m}, \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{rad}$$

$$\text{Ισχύει } k = (m_1 + m_2) \omega^2 \Rightarrow k = 400 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

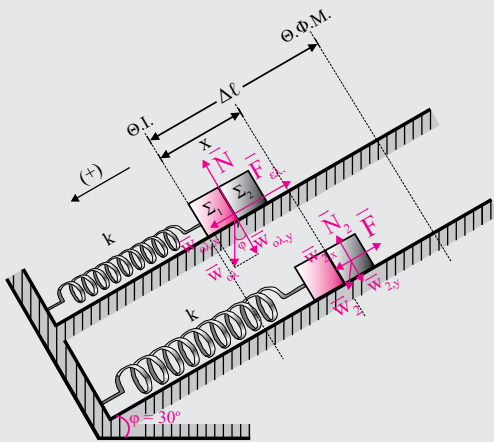
$$\text{και } D_1 = m_1 \omega^2 \Rightarrow D_1 = 300 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

β) Έστω ότι η επαφή χάνεται σε απομάκρυνση x από τη Θέση Ισορροπίας (Θ.Ι.).

Ισχύει:

$$\Sigma F_{x2} = -D_2 x \Rightarrow F - w_{2x} = -m_2 \omega^2 x \Rightarrow$$

$$F = m_2 g \eta \mu \varphi + m_2 \omega^2 x$$



Η επαφή χάνεται όταν $F = 0$, οπότε:

$$x = -\frac{g \eta \mu \varphi}{\omega^2} \Rightarrow x = -0,05\text{m} \text{ δηλαδή σε απόσταση } 0,05\text{m} \text{ πάνω από τη } (\Theta.Ι.)$$

Στη Θ.Ι. ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w_{ολx} \Rightarrow$$

$$k \Delta l = (m_1 + m_2) g \cdot \eta \mu \varphi \Rightarrow \Delta l = 0,05\text{m},$$

άρα η επαφή χάνεται στη θέση φυσικού μήκους (Θ.Φ.Μ.).

γ) Για τον υπολογισμό της χρονικής στιγμής εργαζόμαστε t_1 ως εξής:

$$x = 0,1 \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$$

$$-0,05 = 0,1 \eta \mu \left(10t_1 + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \eta \mu \left(10t_1 + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$t_1 = \frac{\pi}{15} \text{s}$$

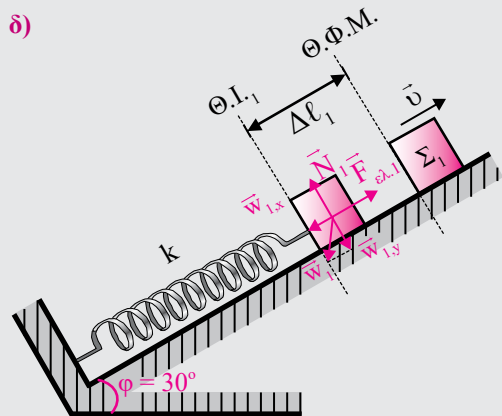
Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης Ενέργειας της ταλάντωσης για τη θέση $x = 0,05\text{m}$:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow$$

$$(m_1 + m_2) v^2 = k A^2 + k x^2$$

$$v^2 = \frac{k(A^2 - x^2)}{m_1 + m_2} \Rightarrow |v| = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ)



Το σώμα Σ_1 μετά τον αποχωρισμό έχει ταχύ-

$$\text{τητα } v_1 = v = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s.}$$

Για τη Θ.Ι. ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{ελ1} = w_{1x} \Rightarrow k \Delta l_1 = m_1 g \eta \mu \varphi \Rightarrow$$

$$\Delta l_1 = \frac{m_1 g \eta \mu \varphi}{k} \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{3}{80} \text{m}$$

Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης Ενέργειας της ταλάντωσης για τη θέση $x = \Delta l_1$:

$$E = K + U \Rightarrow E = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} k \Delta l_1^2 \Rightarrow$$

$$E = 1,40625 \text{J}$$

3.68 α) Σε κάθε ταλάντωση η κινητική ενέργεια μεγιστοποιείται 2 φορές επομένως σε $\Delta t = 16 \text{ s}$ ο ταλαντωτής εκτελεί 4 ταλαντώσεις. Ισχύει:

$$T = \frac{\Delta t}{N} \Rightarrow T = 4s$$

β) Ισχύει:

$$D = m\omega^2 \Rightarrow D = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \Rightarrow D = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Υπολογίζουμε το πλάτος της ταλάντωσης:

$$E_{\pi\sigma\sigma\phi} = E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E_{\pi\sigma\sigma\phi}}{D}} \Rightarrow A = 0,4\text{m}$$

Το διανυόμενο διάστημα σε χρόνο μιας περιόδου είναι:

$$s = 4A \Rightarrow s = 1,6 \text{ m}$$

γ) Έχουμε:

$$U = \frac{25}{100} E \Rightarrow \frac{1}{2} D x^2 = \frac{25}{100} \cdot \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow$$

$$|x| = \frac{A}{2} \Rightarrow |x| = 0,2m$$

Για το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας ισχύει:

$$\frac{dv}{dt} = \alpha = -\omega^2 x \Rightarrow \left| \frac{dv}{dt} \right| = \omega^2 |x| \Rightarrow$$

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 |x| \Rightarrow$$

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| = 0,5 \frac{m}{s^2}$$

δ) Την χρονική στιγμή t_1 ο ταλαντωτής βρίσκεται στη θέση $x_1 = +0,2 \text{ m}$ με $v > 0$. Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow$$

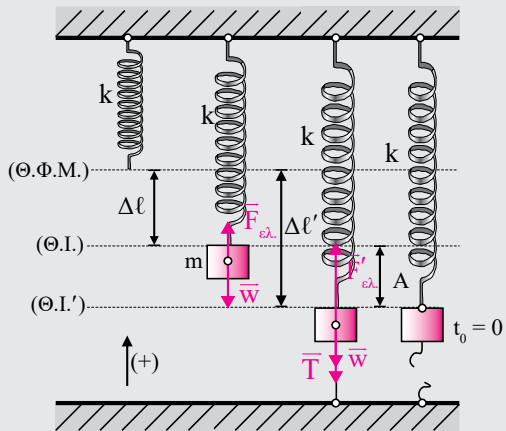
$$v_1 = +\sqrt{\frac{DA^2 - Dx_1^2}{m}} \Rightarrow v_1 = +0,1 \cdot \sqrt{30} \frac{m}{s}$$

Για τον ζητούμενο ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v_1 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -Dx_1 v_1 \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -\sqrt{30} \frac{J}{s}$$

3.69 a)



Η περίοδος ταλάντωσης του σώματος είναι διπλάσια από την περίοδο με την οποία μεταβάλλεται η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης, δηλαδή:

$$T = 0, 2\pi s$$

Ισχύει:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow m = \frac{T^2 k}{4\pi^2} \quad \text{ñ} \quad m = 2 \text{ kg}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στη Θ.Ι. έχουμε:

$$F_{\varepsilon\lambda} = w \Rightarrow k \cdot \Delta l = mg \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} \Rightarrow \Delta l = 0,1\text{m}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στη Θ.Ι.΄ έχουμε:

$$F'_{\varepsilon\lambda} = w + T \Rightarrow k \cdot \Delta l' = mg + T \Rightarrow$$

$$\Delta l' = \frac{T + mg}{k} \Rightarrow \Delta l' = 0,2m$$

Το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι:

$$A = \Delta l' - \Delta l \Rightarrow A = 0,1 \text{ m}$$

β) Ισχύει:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Τη χρονική στιγμή t_1 : ισχύει $x_1 = +0,05\text{m} = +A/2$ με $v_1 > 0$.

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Τα-
λάντωσης προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow$$

$$v_1 = +\omega\sqrt{A^2 - x_1^2} \Rightarrow v_1 = +0,5\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για τον ζητούμενο ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v_1 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -kx_1 v_1 \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -5\sqrt{3} \frac{J}{s}$$

γ) Αρχικά ($t_0 = 0$): $x_{\text{αρχ}} = -0,1 \text{ m}$, $\Delta l_{\text{αρχ}} = 0,2 \text{ m}$
Τελικά (t_1): $x_{\text{τελ}} = +0,05 \text{ m}$, $\Delta l_{\text{τελ}} = 0,05 \text{ m}$.
Το έργο της δύναμης επαναφοράς για τη συγκεκριμένη μετάβαση είναι:

$$W_{F_{\text{επ}}} = \frac{1}{2} kx_{\text{αρχ}}^2 - \frac{1}{2} kx_{\text{τελ}}^2 \Rightarrow$$

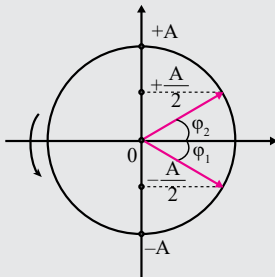
$$W_{F_{\text{επ}}} = 0,75 \text{ J}$$

Το έργο της δύναμης του ελατηρίου για τη συγκεκριμένη μετάβαση είναι:

$$W_{F_{\text{ελ}}} = \frac{1}{2} k\Delta l_{\text{αρχ}}^2 - \frac{1}{2} k\Delta l_{\text{τελ}}^2 \Rightarrow$$

$$W_{F_{\text{ελ}}} = 3,75 \text{ J}$$

δ) Υπολογίζουμε τον ελάχιστο χρόνο μετάβασης από τη θέση $x = -A/2$ στη θέση $x = +A/2$ με τη βοήθεια του περιστρεφόμενου διανύσματος:



Ισχύει:

$$\eta\mu\phi_1 = \frac{A/2}{A} \Rightarrow \eta\mu\phi_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi_1 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Επίσης, ισχύει:

$$\frac{A/2}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu\phi_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi_2 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

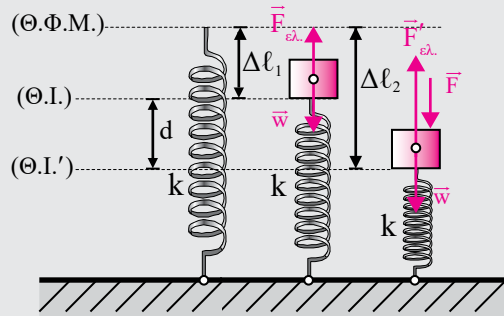
Έχουμε:

$$\Delta\phi = \phi_1 + \phi_2 \Rightarrow \Delta\phi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Για την ελάχιστη χρονική διάρκεια μετάβασης προκύπτει:

$$\Delta\phi = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{30} \text{ s}$$

3.70 α)



Από τη συνθήκη ισορροπίας στη Θ.Ι. έχουμε:

$$F_{\text{ελ}} = w \Rightarrow k \cdot \Delta l_1 = mg \Rightarrow$$

$$\Delta l_1 = \frac{mg}{k} \Rightarrow \Delta l_1 = 0,1 \text{ m}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στη Θ.Ι.΄ έχουμε:

$$F'_{\text{ελ}} = w + F \Rightarrow k \cdot \Delta l_2 = mg + F \Rightarrow$$

$$\Delta l_2 = \frac{mg + F}{k} \Rightarrow \Delta l_2 = 0,2 \text{ m}$$

Προκύπτει:

$$A = d = \Delta l_2 - \Delta l_1 \Rightarrow A = 0,1 \text{ m}$$

Επίσης, ισχύει:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 0,2\pi \text{ s}$$

Έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την αρχική φάση ϕ_0 της ταλάντωσης.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, $x = +0,1 \text{ m}$, $v = 0$.

Από τη σχέση $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ παίρνουμε:

$$0,1 = 0,1\eta\mu\phi_0 \Rightarrow \eta\mu\phi_0 = 1 \Rightarrow \eta\mu\phi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2}$$

Από τις ομάδες λύσεων της παραπάνω τριγωνομετρικής εξίσωσης και λαμβάνοντας υπόψη ότι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$ προκύπτει η λύση:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Τελικά προκύπτει:

$$v = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$v = 1 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{S.I.})$$

β) Τη χρονική στιγμή $t_{\text{αρχ}} = \frac{T}{4}$ η ταχύτητα του σώματος είναι:

$$v_{\text{αρχ}} = \left[1 \sin\left(10 \cdot \frac{0,2\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right] \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{\text{αρχ}} = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Τη χρονική στιγμή που το σώμα διέρχεται από τη Θ.Φ.Μ. ισχύει $v_{\text{τελ}} = 0$.

Προκύπτει:

$$\Delta p = mv_{\text{τελ}} - mv_{\text{αρχ}} \Rightarrow \Delta p = 4 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής είναι:

$|\Delta p| = 4 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$ με διεύθυνση κατακόρυφη και φορά προς τα κάτω.

γ) Θέση (1):

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow 4K = E \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{kA^2}{4m}} \Rightarrow |v_1| = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Θέση (2):

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow 2K = E \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} mv_2^2 = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{kA^2}{2m}} \Rightarrow |v_2| = 0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Τελικά προκύπτει:

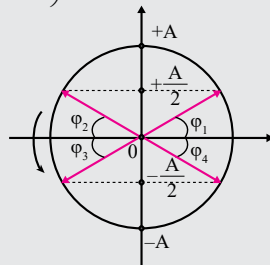
$$|\Delta p| = |p_{\text{τελ}}| - |p_{\text{αρχ}}| \Rightarrow |\Delta p| = |mv_2| - |mv_1| \Rightarrow$$

$$|\Delta p| = 0,8 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ) Βρίσκουμε τις θέσεις όπου $v = \frac{\sqrt{3}v_{\text{max}}}{2}$ εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης. Ισχύει:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{\sqrt{3}}{2} v_{\text{max}} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow x = \pm \frac{A}{2}$$



Κάνουμε χρήση του περιστρεφόμενου διανύσματος. Έχουμε:

$$\eta \mu \varphi_1 = \frac{A/2}{A} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Προκύπτει:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Ισχύει:

$$\Delta \varphi = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{\omega} \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{\pi}{15} \text{ s}$$

3.71 α) Ισχύει:

$$d = \frac{1}{2} \alpha \cdot \Delta t^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2d}{\alpha}} \Rightarrow \Delta t = 0,2 \text{ s}$$

Προκύπτει:

$$v = \alpha \cdot \Delta t \Rightarrow v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kd^2 = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{mv^2 + kd^2}{k}} \Rightarrow A = 0,4 \text{ m}$$

γ) Ισχύει:

$$\frac{dp}{dt}_{\max} = kA \Rightarrow \frac{dp}{dt}_{\max} = 40 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

δ) Από τη συνθήκη ισορροπίας στη Θ.Ι. έχουμε:

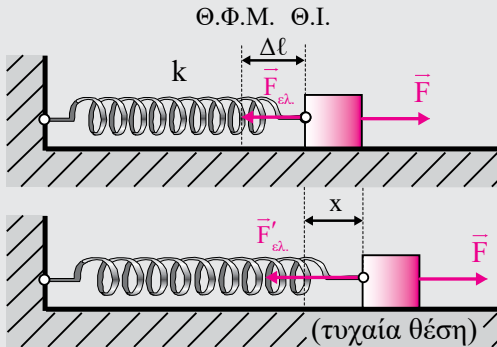
$$F_{\varepsilon\lambda} = w \Rightarrow k \cdot \Delta l = mg \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} \Rightarrow \Delta l = 0,3 \text{ m}$$

Προκύπτει:

$$F_{\varepsilon\lambda, \max} = k \cdot \Delta l_{\max} \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda, \max} = k \cdot (\Delta l + A) \Rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\lambda, \max} = 70 \text{ N}$$

3.72 α)



Από τη συνθήκη ισορροπίας στη θέση ισορροπίας προκύπτει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow F = k \cdot \Delta l (1)$$

Στην τυχαία θέση ισχύει:

$$\Sigma F = F - F'_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow \Sigma F = F - k \cdot (\Delta l + x) \Rightarrow \Sigma F = -kx$$

Επομένως το σύστημα σώμα Σ-ελατήριο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$.

β) Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\Delta l = \frac{F}{k} \Rightarrow \Delta l = 0,8 \text{ m}$$

Ισχύει:

$$A = \Delta l \Rightarrow A = 0,8 \text{ m}$$

Για τη μέγιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος, έχουμε:

$$\frac{dp}{dt}_{\max} = kA \Rightarrow \frac{dp}{dt}_{\max} = 160 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

γ) Ισχύει:

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta l^2 \Rightarrow \Delta l = \sqrt{\frac{2U_{\varepsilon\lambda}}{k}} \Rightarrow \Delta l = 1,6 \text{ m}$$

Επομένως η δύναμη καταργείται στην ακραία θετική θέση. Το νέο πλάτος της ταλάντωσης είναι:

$$A' = 2A \Rightarrow A' = 1,6 \text{ m}$$

δ) i. Ισχύει:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την αρχική φάση φ_0 της ταλάντωσης.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, $x = +1,6 \text{ m}$, $v = 0$.

Από τη σχέση $x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$ παίρνουμε:

$$1,6 = 1,6 \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = \eta \mu \frac{\pi}{2}$$

Από τις ομάδες λύσεων της παραπάνω τριγωνομετρικής εξίσωσης και λαμβάνοντας υπόψη ότι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$ προκύπτει η λύση:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Τελικά προκύπτει:

$$x = A' \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$x = 1,6 \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) (\text{S.I.})$$

ii. Την $t_0 = 0$ έχουμε $x_{\text{αρχ}} = +1,6 \text{ m}$.

Την $t_1 = \frac{\pi}{6} \text{ s}$ έχουμε:

$$x_{\text{τελ}} = 1,6 \eta \mu \left(10 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow x_{\text{τελ}} = 0,8 \text{ m}$$

Τελικά έχουμε:

$$W_{\text{F}_{\varepsilon\lambda}} = \frac{1}{2} k x_{\text{αρχ}}^2 - \frac{1}{2} k x_{\text{τελ}}^2 \Rightarrow$$

$$W_{\text{F}_{\varepsilon\lambda}} = 192 \text{ J}$$

3.73 α) Η επιτάχυνση του σώματος Σ_1 είναι ίση με μηδέν στη θέση ισορροπίας. Ισχύει:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Προκύπτει:

$$v_1 = \omega A \Rightarrow v_1 = \omega d \Rightarrow v_1 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Από την εφαρμογή της Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα $x'x$ προκύπτει:

$$v_{\kappa} = 2 \frac{m}{s}$$

$$v_{\kappa} = \omega' A' \Rightarrow A' = \frac{v_{\kappa}}{\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}} \Rightarrow A' = 0,4 \text{ m}$$
$$\frac{dp}{dt}_{\max} = kA' \Rightarrow \frac{dp}{dt}_{\max} = 80 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$
$$t_1 = \frac{3T}{4} \quad \eta \quad t_1 = \frac{3 \cdot \frac{2\pi}{\omega}}{4} \Rightarrow t_1 = 0,15\pi \text{ s}$$
$$h = \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow h = 1,125 \text{ m}$$
$$v_2 = gt_1 \Rightarrow v_2 = 1,5\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$K_{\alpha\pi} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_k^2 \Rightarrow$$

$$K_{\alpha\pi} = 115,5 \text{ J}$$
$$E = \frac{6,25}{100} E_0 \Rightarrow \frac{1}{2} D A^2 = \frac{6,25}{100} \cdot \frac{1}{2} D A_0^2 \Rightarrow A = \frac{A_0}{4}$$
$$A = A_0 e^{-(\ln 2)t_1} \Rightarrow \frac{A_0}{4} = A_0 e^{-(\ln 2)t_1} \quad \dot{\eta} \quad t_1 = 2s$$
$$N = \frac{t_1}{T} \Rightarrow N = 10 \tau \alpha \lambda.$$
$$N' = N + 10 \Rightarrow N' = 20 \tau \alpha \lambda.$$
$$A_2 = 0,64e^{-(\ln 2)t_2} \Rightarrow A_2 = 0,04 \text{ m}$$
$$N'' = 3N \Rightarrow N'' = 30 \tau \alpha \lambda.$$
$$t_3 = N''T \Rightarrow t_3 = 6s$$
$$A_3 = 0,64e^{-(\ln 2)t_3} \Rightarrow A_3 = 0,01 \text{ m}$$
$$\frac{A_0 - A}{A_0} = 50\% \Rightarrow A = \frac{A_0}{2}$$
$$E = \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} D \frac{A_0^2}{4} \Rightarrow E = \frac{E_o}{4}$$
$$\Pi(\%) = \frac{E_0 - E}{E_0} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{E_0 - E_o}{E_0} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 75\%$$

The diagram illustrates a two-degree-of-freedom mechanical system. A horizontal ceiling is shown with four vertical supports. The first support is fixed. The second support is connected to a spring with stiffness k , which is in turn connected to a mass m_1 . The third support is also connected to a spring with stiffness k , which is connected to a mass m_1 . The fourth support is fixed. The masses m_1 and m_2 are connected by a vertical rod. The displacement of the first mass m_1 is denoted by $\Delta \ell_1$ and the displacement of the second mass m_2 is denoted by $\Delta \ell_2$. The forces acting on the masses are $\vec{F}_{eL}$ (upward) and $\vec{w}_1$ (downward) for m_1 , and $\vec{F}'_{eL}$ (upward) and $\vec{w}_{1,2}$ (downward) for m_2 . The time $t = 0$ is indicated at the bottom right.

Ισχύει:

$$k = m_1 \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \omega = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για το πλάτος της ταλάντωσης έχουμε:

$$A = \Delta l_2 - \Delta l_1 \Rightarrow A = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} - \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow$$

$$A = \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow A = 0,5 \text{ m}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την αρχική φάση φ_0 της ταλάντωσης.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, ισχύει:

$$x = +0,2 \text{ m}, v = 0.$$

Από τη σχέση $x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$ παίρνουμε:

$$0,5 = 0,5 \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = \eta \mu \frac{\pi}{2}$$

Από τις ομάδες λύσεων της παραπάνω τριγωνομετρικής εξίσωσης και λαμβάνοντας υπόψη ότι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$ προκύπτει η λύση:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Τελικά προκύπτει:

$$x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$x = 0,5 \eta \mu \left(4\pi t + \frac{\pi}{2} \right) (\text{S.I.})$$

β) Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_1 που το Σ_2 απέχει απόσταση d από το έδαφος. Προκύπτει:

$$h - d = \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2(h-d)}{g}} \Rightarrow$$

$$t_1 = 0,75 \text{ s}$$

Προκύπτει:

$$\alpha_1 = -\omega^2 x_1 \Rightarrow a_1 = 80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

γ) Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_2 που το Σ_1 ακινητοποιείται για πρώτη φορά μετά την $t_0 = 0$. Έχουμε:

$$t_2 = \frac{T}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{\omega} \Rightarrow t_2 = 0,25 \text{ s}$$

Για την ισχύ του βάρους του Σ_2 έχουμε:

$$P_{w_2} = m_2 g v_2 \Rightarrow P_{w_2} = m_2 g (g t_2) \Rightarrow$$

$$P_{w_2} = 200 \text{ W}$$

δ) Ισχύει:

$$\frac{dU}{dt} = -m_2 g v_3 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -m_2 g (g t_3) \Rightarrow$$

$$t_3 = \frac{\frac{dU}{dt}}{-m_2 g^2} \Rightarrow t_3 = 0,5 \text{ s}$$

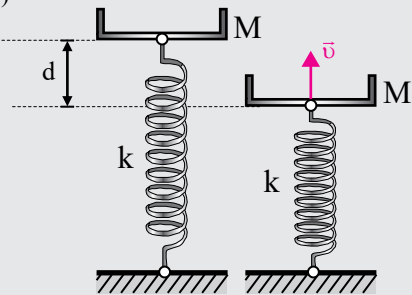
Για τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του Σ_1 προκύπτει:

$$\frac{dp}{dt} = -kx_3 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -80 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

3.76 α)

(Θ.Φ.Μ.)

(Θ.Ι.)



Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε.Τ. για τη θέση:

$$y_1 = d = 0,1 \text{ m}$$

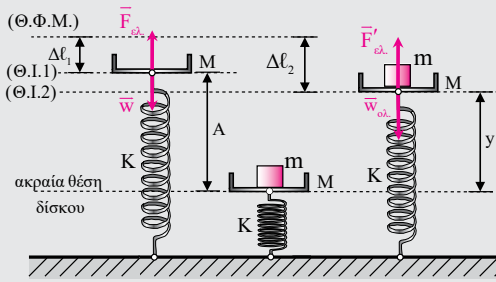
Ισχύει:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} k d^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{M v^2 + k d^2}{k}} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

β)

Για να αποδείξουμε ότι το σύστημα ελατήριου - δίσκος - σώμα, μετά την τοποθέτηση του σώματος στον δίσκο, εκτελεί ταλάντωση αρκεί να αποδείξουμε ότι η θέση όπου το τοποθετήσαμε το σώμα δεν είναι θέση ισορροπίας του συστήματος.



Για τη θέση ισορροπίας του δίσκου ισχύει:

$$(\Theta.Ι.1): \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{ελ.} = w \Rightarrow$$

$$k\Delta l_1 = Mg \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{Mg}{k} \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{3}{40} \text{ m}$$

Για τη νέα θέση ισορροπίας του συστήματος ισχύει:

$$(\Theta.Ι.2): \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F'_{ελ.} = w_{ολ.} \Rightarrow$$

$$k\Delta l_2 = (M+m)g \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{(M+m)g}{k} \Rightarrow$$

$$\Delta l_2 = 0,1 \text{ m}$$

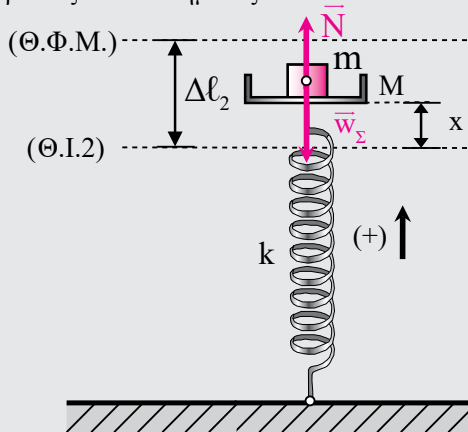
Η θέση που τοποθετήσαμε το σώμα απέχει από τη νέα θέση ισορροπίας του συστήματος:

$$y = A - (\Delta l_2 - \Delta l_1) \Rightarrow y = 0,175 \text{ m} \neq 0$$

Άρα το σύστημα θα εκτελέσει ταλάντωση με συχνότητα:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M+m}} \Rightarrow f = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}$$

γ) i. Έστω ότι το σώμα εγκαταλείπει τον δίσκο σε απομάκρυνση x από τη νέα θέση ισορροπίας του συστήματος.



Ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_x = -D_x \vec{x} \Rightarrow \vec{N} + \vec{w}_\Sigma = -m\omega^2 \vec{x} \Rightarrow$$

$$N - mg = -m\omega^2 x \Rightarrow x = \frac{g}{\omega^2} \Rightarrow x = 0,1 \text{ m}$$

Παρατηρούμε ότι $x < A'$ άρα το σώμα εγκαταλείπει το δίσκο.

ii.) Το σύστημα φτάνει στη θέση με απομάκρυνση $x=0,1 \text{ m}$ με ταχύτητα μέτρου V . Για το πλάτος ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων ισχύει: $A' = 0,175 \text{ m}$.

Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε.Τ. για τη θέση αυτή για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας του συστήματος πριν τον αποχωρισμό. Ισχύει:

$$E = K + U \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} kA'^2 = \frac{1}{2} (M+m) V^2 + \frac{1}{2} kx^2 \Rightarrow$$

$$V = \sqrt{\frac{k(A'^2 - x^2)}{M+m}} \Rightarrow$$

$$V = 1,5 \text{ m/s}$$

Αμέσως μετά τον αποχωρισμό τα σώματα έχουν ταχύτητες $v_\Delta = v_\Sigma = V = 1,5 \text{ m/s}$.

Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε.Τ. για $x_1 = \Delta l_1 = \frac{3}{40} \text{ m}$ (ο αποχωρισμός έγινε στη θέση φυσικού μήκους).

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} Mv_{\max}^2 = \frac{1}{2} Mv_\Delta^2 + \frac{1}{2} kx_1^2 \Rightarrow$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{Mv_\Delta^2 + kx_1^2}{M}} \Rightarrow$$

$$v_{\max} = \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3.77 α) Το σύστημα των σωμάτων εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα:

$$k = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = 5 \text{ rad/s}$$

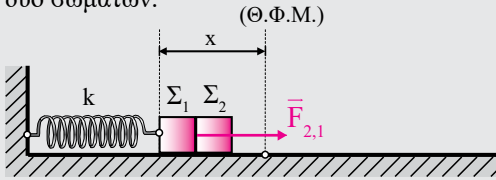
Η σταθερά επαναφοράς του σώματος Σ_1 είναι:

$$D_1 = m_1\omega^2 \Rightarrow D_1 = 25 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

και του σώματος Σ_2 είναι:

$$D_2 = m_2\omega^2 \Rightarrow D_2 = 75 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Έστω μία τυχαία θέση προς τα αριστερά με απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας των δύο σωμάτων.



Το σώμα Σ_2 λόγω της επαφής του με το σώμα Σ_1 δέχεται από αυτό δύναμη $\vec{F}_{2,1}$. Επειδή το σώμα Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, η δύναμη επαναφοράς που δέχεται είναι της μορφής:

$$F = -D_2 x (1).$$

Αν θεωρήσουμε θετική φορά τη φορά προς τα αριστερά, τότε από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$F_{2,1} = -D_2 x (2).$$

Η επαφή των δύο σωμάτων χάνεται όταν γίνει $F_{2,1} = 0$. Από τη σχέση (2) για $F_{2,1} = 0$ προκύπτει $x = 0$. Επομένως η επαφή των δύο σωμάτων χάνεται όταν διέρχονται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου που είναι και η θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 .

β) Στη θέση ισορροπίας τα δύο σώματα αποκτούν ταχύτητα μέτρου v που είναι ίση με την μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσής τους. Είναι δηλαδή:

$$v = v_{\max} \Rightarrow v = \omega A \Rightarrow v = 2 \frac{m}{s}$$

Αμέσως μετά την απώλεια επαφής των δύο σωμάτων, το σώμα Σ_1 συνεχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γωνιακής συχνότητας:

$$k = m_1 \omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \omega_1 = 10 \text{ rad/s}$$

Επειδή η επαφή των δύο σωμάτων χάνεται στη θέση ισορροπίας του συστήματός τους, η οποία είναι και θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 , το νέο πλάτος της ταλάντωσης A_1 που εκτελεί το Σ_1 είναι:

$$v = \omega_1 A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{v}{\omega_1} \Rightarrow A_1 = 0,2 \text{ m}$$

γ) Κατά την κρούση των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής (Α.Δ.Ο.). Μετά τον αποχωρισμό:

$$v_2 = v = 2 \frac{m}{s}$$

Το Σ_2 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και συγκρούεται με το Σ_3 με ταχύτητα $v_2 = 2 \frac{m}{s}$.

Ισχύει:

$$\vec{p}_{\text{ολ. (πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ. (μετά)}} \Rightarrow m_2 v_2 = (m_2 + m_3) V_K \Rightarrow$$

$$V_K = \frac{m_2 v_2}{m_2 + m_3} \Rightarrow$$

$$V_K = 1,5 \frac{m}{s}$$

Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του Σ_2 που μετατράπηκε σε θερμότητα είναι:

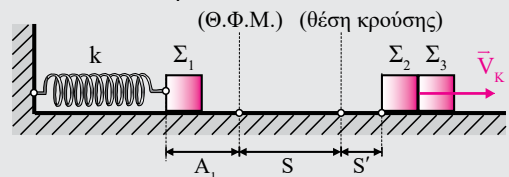
$$\begin{aligned} \Pi\% &= \frac{Q}{K_2} \cdot 100\% = \frac{K_{\text{ολ. (πριν)}} - K_{\text{ολ. (μετά)}}}{K_2} \cdot 100\% = \\ &= \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_3 + m_2) V_K^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi\% = 25\% \end{aligned}$$

δ) Η περίοδος της νέας ταλάντωσης του Σ_1

$$\text{είναι } T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} = \frac{\pi}{5} \text{ s.}$$

Το Σ_1 ακινητοποιείται μετά τον αποχωρισμό

$$\text{σε χρόνο } t = \frac{3T_1}{4} = 0,45 \text{ s}$$



Σε αυτόν τον χρόνο το Σ_2 διανύει την απόσταση S και το συσσωμάτωμα την απόσταση S' . Επομένως:

$$S = v_2 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{S}{v_2} \Rightarrow t_1 = 0,2 \text{ s}$$

και το συσσωμάτωμα:

$$S' = V_K (t - t_1) \Rightarrow S' = 0,375 \text{ m}$$

Η απόσταση είναι:

$$d' = A_1 + S + S' \Rightarrow d' = 0,975 \text{ m}$$

ΘΕΜΑ Δ

3.78 α) Από το διάγραμμα προκύπτει:

$$\frac{T}{4} = 0,05\pi \Rightarrow T = 0,2\pi \text{ s}$$

Ισχύει:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Έχουμε:

$$D = m\omega^2 \Rightarrow D = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Για το πλάτος της ταλάντωσης προκύπτει:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow U_{\max} = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{2U_{\max}}{D}} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

β) Θέλουμε να υπολογίσουμε την αρχική φάση φ_0 της ταλάντωσης.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, $x = +0,2\text{m}$, $v = 0$.

Από τη σχέση $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ παίρνουμε:

$$0,2 = 0,2\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2}$$

Από τις ομάδες λύσεων της παραπάνω τριγωνομετρικής εξίσωσης και λαμβάνοντας υπόψη ότι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$ προκύπτει η λύση:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{S.I.})$$

γ) Ισχύει:

$$x_{\text{αρχ}} = +0,2\text{m} \text{ και } x_{\text{τελ}} = -0,1\text{m}$$

Το έργο της δύναμης επαναφοράς για τη συγκεκριμένη μετάβαση είναι:

$$W_{F_{\text{επ}}} = \frac{1}{2}Dx_{\text{αρχ}}^2 - \frac{1}{2}Dx_{\text{τελ}}^2 \Rightarrow W_{F_{\text{επ}}} = 3\text{J}$$

Η αρχική φάση είναι $\varphi_{\text{αρχ}} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Ισχύει:

$$-0,1 = 0,2\eta\mu\varphi_{\text{τελ}} \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi_{\text{τελ}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu\varphi_{\text{τελ}} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

και επειδή $v > 0$ προκύπτει:

$$\varphi_{\text{τελ}} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} (1)$$

Θέτουμε στην (1) $\kappa = 6$ και έχουμε:

$$\varphi_{\text{τελ}} = \frac{71\pi}{6} \text{ rad}$$

Τελικά έχουμε:

$$\Delta\varphi = \varphi_{\text{τελ}} - \varphi_{\text{αρχ}} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = \frac{34\pi}{3} \text{ rad}$$

δ) Ισχύει γενικά:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -\Sigma F \cdot v \Rightarrow \frac{dU}{dt} = Dxv \Rightarrow$$

$$\frac{dU}{dt} = DA\eta\mu(\omega t + \varphi_0)\omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{D\omega A^2}{2}\eta\mu(2\omega t + 2\varphi_0)$$

Επομένως, προκύπτει:

$$\left.\frac{dU}{dt}\right|_{\max} = \frac{D\omega A^2}{2} \Rightarrow \left.\frac{dU}{dt}\right|_{\max} = 40 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

3.79 α) Ισχύει:

$$k = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow k = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

β) Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του Σ_2 είναι:

$$D_2 = m_2\omega^2 \Rightarrow D_2 = 150 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Για την ταλάντωση του Σ_2 ισχύει:

$$\Sigma F = -D_2x \Rightarrow |T_{\sigma}| = D_2|x| \Rightarrow |x| = \frac{|T_{\sigma}|}{D_2} \Rightarrow$$

$$|x| = 0,05\text{m}$$

Εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης για το σύστημα των δύο σωμάτων, έχουμε:

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow$$

$$|v| = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow |v| = 0,25\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Ισχύει:

$$|T_\sigma| \leq T_{\sigma, \max} \Rightarrow D_2 |x| \leq \mu_\sigma m_2 g \Rightarrow$$

$$|x| \leq \frac{\mu_\sigma m_2 g}{D_2} \Rightarrow |x| \leq 0,2 \text{ m}$$

Επομένως το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης, για να μην ολισθαίνει το ένα σώμα σε σχέση με το άλλο, είναι:

$$A_{\max} = 0,2 \text{ m}$$

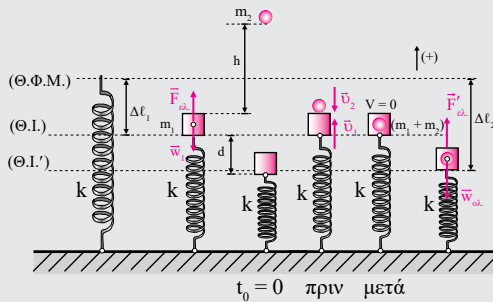
δ) Προκύπτει:

$$|T_\sigma| \leq T_{\sigma, \max} \Rightarrow D_2 |x| \leq \mu_\sigma m_2 g \Rightarrow$$

$$\mu_\sigma \geq \frac{D_2 |x|}{m_2 g} \Rightarrow \mu_{\sigma, \min} = \frac{D_2 A'}{m_2 g} \Rightarrow$$

$$\mu_{\sigma, \min} = 0,375$$

3.80 α)



Ισχύει:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \omega_1 = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Επίσης έχουμε:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \Rightarrow T_1 = 0,2\pi \text{ s}$$

Τα δύο σώματα από τη στιγμή που αφέθηκαν ελεύθερα μέχρι να συγκρουστούν κινήθηκαν για χρόνο:

$$\Delta t = \frac{T_1}{4} \Rightarrow \Delta t = 0,05\pi \text{ s}$$

Ισχύει:

$$h = \frac{1}{2}g\Delta t^2 \Rightarrow h = 0,125 \text{ m}$$

Έχουμε:

$$v_1 = \omega_1 d \Rightarrow v_1 = 1,5\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Προκύπτει:

$$v_2 = g \cdot \Delta t \Rightarrow v_2 = 0,5\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για το σώμα Σ₁ ισχύει:

$$\frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} \quad (1) = m_1 g v_1 \Rightarrow \frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} \quad (1) = 15\pi \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Για το σώμα Σ₂ ισχύει:

$$\frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} \quad (2) = -m_2 g v_2 \Rightarrow \frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} \quad (2) = -15\pi \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

β) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής. Προκύπτει:

$$m_2 v_2 - m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_\kappa \Rightarrow$$

$$v_\kappa = \frac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v_\kappa = 0$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στη Θ.Ι. έχουμε:

$$F_{\varepsilon\lambda} = w_1 \Rightarrow k \cdot \Delta l_1 = m_1 g \Rightarrow$$

$$\Delta l_1 = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow \Delta l_1 = 0,1 \text{ m}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στη Θ.Ι.΄ έχουμε:

$$F'_{\varepsilon\lambda} = w_{\text{ολ}} \Rightarrow k \cdot \Delta l_2 = (m_1 + m_2) g \Rightarrow$$

$$\Delta l_2 = \frac{(m_1 + m_2) g}{k} \Rightarrow \Delta l_2 = 0,4 \text{ m}$$

Τελικά ισχύει:

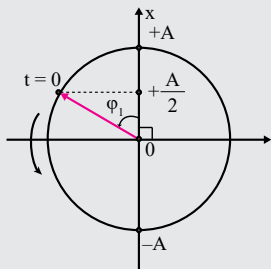
$$A = \Delta l_2 - \Delta l_1 \Rightarrow A = 0,3 \text{ m}$$

γ) Ισχύει:

$$K + U = E \Rightarrow 4U = E \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow x = +\frac{A}{2}$$

(για πρώτη φορά $x > 0$)

Κάνουμε χρήση του περιστρεφόμενου διανύσματος:



Ισχύει:

$$\sin \varphi_1 = \frac{A/2}{A} \Rightarrow \sin \varphi_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Έχουμε:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

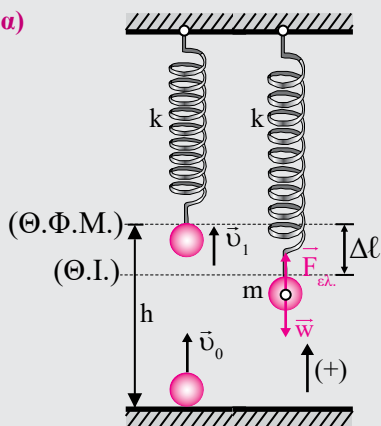
Προκύπτει:

$$\Delta \varphi = \omega \cdot \Delta t' \Rightarrow \Delta t' = \frac{\varphi_1}{\omega} \Rightarrow \Delta t' = \frac{\pi}{15} \text{ s}$$

δ) Η δύναμη του ελατηρίου έχει τη μέγιστη τιμή της στην κάτω ακραία θέση όπου $x = -0,3 \text{ m}$. Έχουμε:

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = k|x| \Rightarrow \left| \frac{dp}{dt} \right| = 30 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

3.81 α)



Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος από τη θέση εκτόξευσης μέχρι τη

θέση που βρίσκεται λίγο πριν συγκρουστεί με το ελατήριο. Προκύπτει:

$$K_1 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -mgh \Rightarrow K_1 = \frac{1}{2} m v_0^2 - mgh \Rightarrow K_1 = 2 \text{ J}$$

β) Ισχύει:

$$K = \frac{3}{4} \cdot K_1 \Rightarrow K = 1,5 \text{ J}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w \Rightarrow k \cdot \Delta l = mg \Rightarrow$$

$$\Delta l = \frac{mg}{k} \Rightarrow \Delta l = 0,1 \text{ m}$$

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow K + \frac{1}{2} k \Delta l^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{2K + k \Delta l^2}{k}} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

γ) Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο είναι ελάχιστο όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση φυσικού του μήκους ($x = +0,1 \text{ m}$). Ισχύει:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow |v| = \sqrt{\frac{2K}{m}} \Rightarrow v = -\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σώματος είναι:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dU}{dt} = -\Sigma F \cdot v \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -kxv \Rightarrow$$

$$\frac{dU}{dt} = 10\sqrt{3} \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

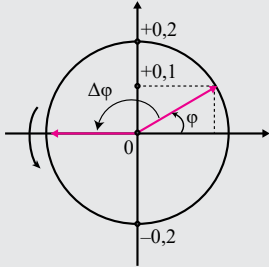
δ) Η κατακόρυφη βολή προς τα πάνω διαρκεί για χρόνο Δt_1 . Έχουμε:

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2K_1}{m}} \Rightarrow v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ισχύει για την κατακόρυφη βολή προς τα πάνω:

$$v_1 = v_0 - g \cdot \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{v_0 - v_1}{g} \Rightarrow \Delta t_1 = 0,2 \text{ s}$$

Με τη βοήθεια του περιστρεφόμενου διανύσματος, προκύπτει:



Έχουμε:

$$\eta \mu \varphi = \frac{0,1}{0,2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Προκύπτει:

$$\Delta \varphi = \pi - \varphi \Rightarrow \Delta \varphi = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

Ισχύει:

$$\Delta \varphi = \omega \cdot \Delta t_2 \Rightarrow \Delta \varphi = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \Delta t_2 \Rightarrow$$

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta \varphi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{\pi}{12} \text{ s} \Rightarrow \Delta t_2 = 0,26 \text{ s}$$

Προκύπτει:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t = \mathbf{0,46 \text{ s}}$$

3.82 α) Ισχύει:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1}} \Rightarrow T_1 = 0,4\pi \text{ s}$$

Επίσης ισχύει:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_2}} \Rightarrow T_2 = 0,2\pi \text{ s}$$

Για την ζητούμενη περίοδο προκύπτει:

$$T = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} \Rightarrow T = \mathbf{0,3\pi \text{ s}}$$

β) Ισχύει:

$$v_{\max,1} = v_{\max,2} \Rightarrow \omega_1 A_1 = \omega_2 A_2 \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{T_1} d_1 = \frac{2\pi}{T_2} \Delta l_{\max,2} \Rightarrow \Delta l_{\max,2} = \frac{T_2}{T_1} d_1 \Rightarrow$$

$$\Delta l_{\max,2} = \mathbf{0,2 \text{ m}}$$

γ) Ισχύει:

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_3}} \Rightarrow T_3 = 0,4\pi \text{ s}$$

Επίσης, ισχύει:

$$T_4 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_3 + k_4}} \Rightarrow T_4 = 0,2\pi \text{ s}$$

Για την ζητούμενη περίοδο προκύπτει:

$$T' = \frac{T_3}{2} + \frac{T_4}{2} \Rightarrow T' = \mathbf{0,3\pi \text{ s}}$$

δ) Έχουμε:

$$A_3 = d_2 \Rightarrow A_3 = 0,2 \text{ m}$$

Ισχύει:

$$v_{\max,3} = v_{\max,4} \Rightarrow \omega_3 A_3 = \omega_4 A_4 \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{T_3} d_2 = \frac{2\pi}{T_4} A_4 \Rightarrow A_4 = \frac{T_4}{T_3} d_2 \Rightarrow$$

$$A_4 = 0,1 \text{ m}$$

Προκύπτει:

$$|\alpha_3| = \omega_3^2 A_3 \Rightarrow |\alpha_3| = \left(\frac{2\pi}{T_3} \right)^2 A_3 \Rightarrow$$

$$|\alpha_3| = \mathbf{5 \frac{m}{s^2}}$$

Επίσης, έχουμε:

$$|\alpha_4| = \omega_4^2 A_4 \Rightarrow |\alpha_4| = \left(\frac{2\pi}{T_4} \right)^2 A_4 \Rightarrow$$

$$|\alpha_4| = \mathbf{10 \frac{m}{s^2}}$$

3.83 α) Ισχύει:

$$\frac{v_{\max}}{\alpha_{\max}} = \frac{\omega A}{\omega^2 A} \Rightarrow \omega = \frac{\alpha_{\max}}{v_{\max}} \Rightarrow \omega = \mathbf{5 \frac{rad}{s}}$$

Προκύπτει:

$$k = (m_1 + m_2) \omega^2 \Rightarrow k = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Έχουμε:

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega} \Rightarrow A = 0,4 \text{ m}$$

β) Ισχύει:

$$x = \Delta l \Rightarrow x = 0,2\sqrt{3} \text{ m}$$

Κάνουμε χρήση (με απόδειξη) του τύπου:

$$|v| = \omega \sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow |v| = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Από την εφαρμογή της Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα της κίνησης έχουμε:

$$(m_1 + m_2) \cdot v = m_1 v_1 \cdot \sin 60^\circ + m_2 v_2 \Rightarrow$$

$$v_2 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot v - m_1 v_1 \cdot \sin 60^\circ}{m_2} \Rightarrow$$

$$v_2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης για τη νέα ταλάντωση του σώματος Σ. Προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A'^2 \Rightarrow$$

$$A' = \sqrt{\frac{m_2 v_2^2 + k x^2}{k}} \Rightarrow A' = 0,1\sqrt{13} \text{ m}$$

δ) i. Στην αρχική θέση ισχύει:

$$v_{\alpha\rho\chi} = v_2 \Rightarrow v_{\alpha\rho\chi} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Στην τελική θέση ισχύει:

$$v_{\text{τελ}} = -\sqrt{\frac{k}{m_2}} A' \Rightarrow v_{\text{τελ}} = -\sqrt{13} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$W_{F_{\text{επ}}} = \frac{1}{2} m_2 v_{\text{τελ}}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{\alpha\rho\chi}^2 \Rightarrow W_{F_{\text{επ}}} = 12 \text{ J}$$

ii. Προκύπτει:

$$\Delta|p| = |p_{\text{τελ}}| - |p_{\alpha\rho\chi}| \Rightarrow$$

$$\Delta|p| = |m_2 v_{\text{τελ}}| - |m_2 v_{\alpha\rho\chi}| \Rightarrow$$

$$\Delta|p| = 5,2 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3.84 α) Ισχύει:

$$D = (m_1 + m_2) \omega^2 \Rightarrow D = 250 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Έχουμε:

$$D_1 = m_1 \omega^2 \Rightarrow D_1 = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Επίσης ισχύει:

$$D_2 = m_2 \omega^2 \Rightarrow D_2 = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

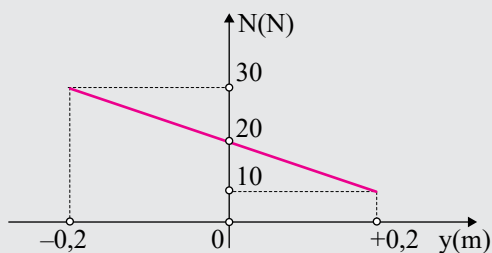
β) i. Για την απλή αρμονική ταλάντωση που εκτελεί το σώμα Σ₁ ισχύει:

$$\Sigma F_y = -D_1 y \Rightarrow N - m_1 g = -D_1 y \Rightarrow$$

$$N = m_1 g - D_1 y \Rightarrow$$

$$N = 20 - 50y \text{ (S.I.) για } -0,2\text{ m} \leq y \leq +0,2\text{ m}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



ii. Παρατηρούμε από το διάγραμμα $N = f(y)$ πως κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης ισχύει συνεχώς $N > 0$ επομένως δεν χάνεται η επαφή.

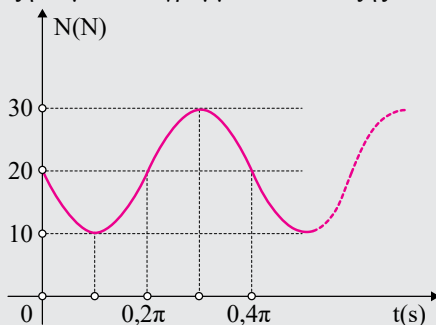
γ) i. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι η:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 5t \text{ (S.I.)}$$

Προκύπτει:

$$N = 20 - 50y \Rightarrow N = 20 - 10\eta\mu 5t \text{ (S.I.)}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



ii. Όταν $y = +0,1 \text{ m}$ ισχύει:

$$N = (20 - 50 \cdot 0,1) \text{ N} \Rightarrow N = 15 \text{ N}$$

Το μέτρο της δύναμης που ασκεί το σώμα Σ_1 στο Σ_2 θα είναι:

$$N' = N \Rightarrow N' = 15 \text{ N}$$

δ) i. Για να μη χάνεται η επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων θα πρέπει να ισχύει:

$$N \geq 0 \Rightarrow m_1 g - m_1 \omega^2 y \geq 0 \Rightarrow g - \omega^2 A \geq 0 \Rightarrow$$

$$\omega \leq \sqrt{\frac{g}{A}} \Rightarrow \omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{A}} \Rightarrow$$

$$\omega_{\max} = 5\sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

ii. Η επαφή θα χαθεί στη θέση όπου:

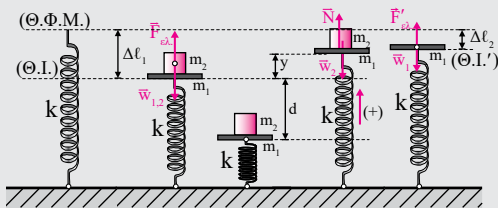
$$N = 0 \Rightarrow m_1 g - D_1 y = 0 \Rightarrow y = \frac{m_1 g}{D_1} \Rightarrow y = 0,4 \text{ m}$$

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης έχουμε:

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} D_1 y^2 = \frac{1}{2} D_1 A^2 \Rightarrow$$

$$|v| = \sqrt{\frac{D_1 A^2 - D_1 y^2}{m_1}} \Rightarrow |v| = \sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3.85 α)



Ισχύει:

$$k = (m_1 + m_2) \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Επίσης, ισχύει:

$$D_2 = m_2 \omega^2 \Rightarrow D_2 = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Για την απλή αρμονική ταλάντωση που εκτελεί το σώμα Σ_1 ισχύει:

$$\Sigma F_y = -D_2 y \Rightarrow N - m_2 g = -D_2 y \Rightarrow$$

$$N = m_2 g - D_2 y \Rightarrow N = 20 - 50y \text{ (S.I.)}$$

Για να μη χάνεται η επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων θα πρέπει να ισχύει:

$$N \geq 0 \Rightarrow 20 - 50y \geq 0 \Rightarrow y \leq 0,4 \text{ m} \Rightarrow y_{\max} = 0,4 \text{ m}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} = w_{1,2} \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l_1 = (m_1 + m_2) g \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{(m_1 + m_2) g}{k} \Rightarrow \Delta l_1 = 0,4 \text{ m}$$

Προκύπτει επομένως ότι η επαφή θα χαθεί όταν το ελατήριο βρίσκεται για πρώτη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσης στη θέση φυσικού του μήκους επομένως η παραμόρφωσή του θα είναι ίση με μηδέν.

β) Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης έχουμε:

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k y_{\max}^2 = \frac{1}{2} k A^2 \quad \text{ή}$$

$$|v| = \sqrt{\frac{k A^2 - k y_{\max}^2}{m_1 + m_2}} \Rightarrow |v| = \sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το σώμα Σ_2 μετά το χάσιμο της επαφής υπολογίζεται από τον τύπο (με απόδειξη):

$$h_{\max} = \frac{|v|^2}{2g} \Rightarrow h_{\max} = 0,25 \text{ m}$$

γ) Από τη συνθήκη ισορροπίας για τη νέα ταλάντωση έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F'_{\epsilon\lambda} = w_1 \Rightarrow k \cdot \Delta l_2 = m_1 g \Rightarrow$$

$$\Delta l_2 = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow \Delta l_2 = 0,3 \text{ m}$$

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης έχουμε:

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} k \Delta l_2^2 = \frac{1}{2} k A'^2 \quad \text{ή}$$

$$A' = \sqrt{\frac{k \Delta l_2^2 + m_1 v^2}{k}} \Rightarrow A' = 0,2\sqrt{6} \text{ m}$$

δ) Για να μη χάνεται η επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων θα πρέπει να ισχύει:

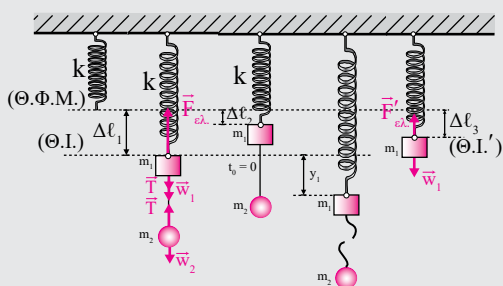
$$N \geq 0 \Rightarrow m_2 g - m_2 \omega^2 y \geq 0 \Rightarrow g - \omega^2 A \geq 0 \Rightarrow$$

$$g - \frac{k}{m_1 + m_2} A \geq 0 \Rightarrow$$

$$k \leq \frac{(m_1 + m_2)g}{A} \Rightarrow k_{\max} = \frac{(m_1 + m_2)g}{A} \Rightarrow$$

$$k_{\max} = \frac{400 \text{ N}}{3 \text{ m}}$$

3.86 α)



Ισχύει:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D_2 = m_2 \omega^2 \Rightarrow D_2 = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Θεωρούμε το σύστημα των δύο σωμάτων σε τυχαία θέση y_1 κάτω από τη θέση ισορροπίας.

Ισχύει:

$$\Sigma F = -D_2 y \Rightarrow -T + m_2 g = -D_2 y \Rightarrow y = \frac{T - m_2 g}{D_2} \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) όπου $T = 60 \text{ N}$ βρίσκουμε τη θέση στην οποία κόβεται το νήμα. Προκύπτει:

$$y_1 = 0,2 \text{ m}$$

β) Από τη συνθήκη ισορροπίας στη θέση ισορροπίας του συστήματος των δύο σωμάτων προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} = w_1 + w_2 \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l_1 = (m_1 + m_2)g \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} \Rightarrow$$

$$\Delta l_1 = 0,4 \text{ m}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα των δύο σωμάτων είναι:

$$A = \Delta l_1 - \Delta l_2 \Rightarrow A = 0,3 \text{ m}$$

Από την εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση του συστήματος έχουμε:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_1^2 + \frac{1}{2}ky_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{kA^2 - ky_1^2}{m_1 + m_2}} \Rightarrow$$

$$v_1 = 0,5\sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Ισχύει:

$$U_{\epsilon\lambda} = \frac{1}{2}k(\Delta l_1 + y_1)^2 \Rightarrow U_{\epsilon\lambda} = 36 \text{ J}$$

δ) Από τη συνθήκη ισορροπίας στη θέση ισορροπίας του συστήματος του σώματος Σ_1 προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} = w_1 \Rightarrow k \cdot \Delta l_3 = m_1 g \Rightarrow$$

$$\Delta l_3 = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow \Delta l_3 = 0,2 \text{ m}$$

Ισχύει:

$$y_2 = \Delta l_1 + y_1 - \Delta l_3 \Rightarrow y_2 = 0,4 \text{ m}$$

Από την εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας για την νέα ταλάντωση του σώματος Σ_1 έχουμε:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}ky_2^2 = \frac{1}{2}kA'^2 \Rightarrow$$

$$A' = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + ky_2^2}{k}} \Rightarrow$$

$$A' = 0,05\sqrt{74} \text{ m}$$

3.87 α) Ισχύει:

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{A_0}{4} = A_0 e^{-2\lambda T} \Rightarrow e^{2\lambda T} = 4 \quad (1)$$

Προκύπτει:

$$\frac{A_N}{A_{N+4}} = \frac{A_0 e^{-\Lambda N T}}{A_0 e^{-\Lambda(N+4)T}} \Rightarrow \frac{A_N}{A_{N+4}} = e^{4\Lambda T} \Rightarrow \frac{A_N}{A_{N+4}} = 16$$

β) Έχουμε:

$$\frac{E_N}{E_{N+1}} = \frac{E_0 e^{-2\Lambda N T}}{E_0 e^{-2\Lambda(N+1)T}} \Rightarrow \frac{E_N}{E_{N+1}} = e^{2\Lambda T} \Rightarrow \frac{E_N}{E_{N+1}} = 4$$

γ) Ισχύει:

$$\Pi(\%) = \frac{E_N - E_{N+1}}{E_N} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \left(1 - \frac{E_{N+1}}{E_N}\right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 75\%$$

δ) Έχουμε:

$$E_{\alpha\omega\lambda} = E_N - E_{N+3} \Rightarrow$$

$$E_{\alpha\omega\lambda} = E_0 e^{-2\Lambda N T} - E_0 e^{-2\Lambda(N+3)T} \Rightarrow$$

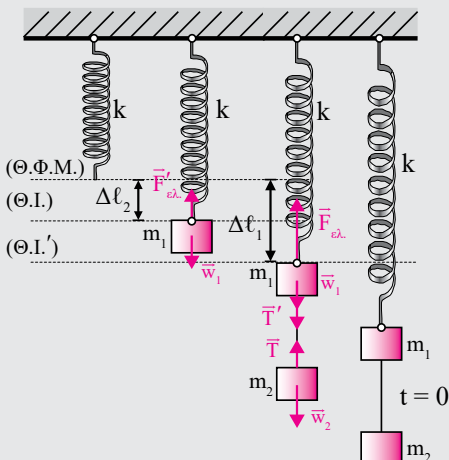
$$E_{\alpha\omega\lambda} = E_0 e^{-2\Lambda N T} - E_0 e^{-2\Lambda(N+3)T} \Rightarrow$$

$$E_{\alpha\omega\lambda} = E_0 \left(e^{-2\Lambda N T}\right)^N \left(1 - e^{-6\Lambda T}\right) \Rightarrow$$

$$15,75 = 64 \left(\frac{1}{4}\right)^N \frac{63}{64} \Rightarrow N = 1$$

Άρα η απώλεια της ενέργειας είναι ίση με 15,75 J κατά τη διάρκεια της 2^{ης}, 3^{ης} και 4^{ης} περιόδου.

3.88 α)



Ισχύει:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$A = d \Rightarrow A = 0,2\text{m}$$

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$,

$$x = +0,2\text{m}, v = 0.$$

Από τη σχέση $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ παίρνουμε:

$$0,2 = 0,2\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2}$$

Από τις ομάδες λύσεων της παραπάνω τριγωνομετρικής εξίσωσης και λαμβάνοντας υπόψη ότι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, προκύπτει ότι:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Τελικά προκύπτει:

$$\alpha = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$\alpha = -5\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{S.I.})$$

β) Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D_2 = m_2 \omega^2 \Rightarrow D_2 = 150 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

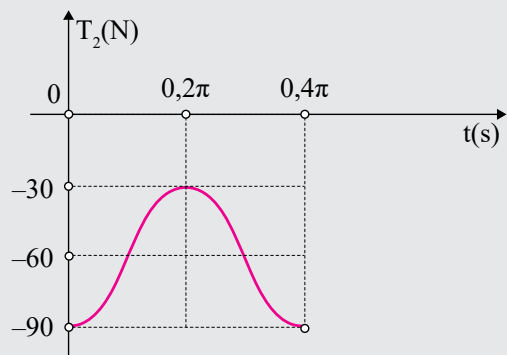
Ισχύει:

$$\Sigma F = -D_2 y \Rightarrow T_2 + m_2 g = -D_2 x \Rightarrow$$

$$T_2 = -m_2 g - D_2 x \Rightarrow$$

$$T_2 = -60 - 30 \cdot \sin 5t (\text{S.I.})$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



γ) Ισχύει:

$$\Sigma F = -D_2 y \Rightarrow T_2 + m_2 g = -D_2 x \Rightarrow T_2 = -m_2 g - D_2 x$$

Για να μη χαλαρώνει το νήμα θα πρέπει να ισχύει:

$$T_2 \geq 0 \Rightarrow -m_2 g - D_2 \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{-g}{\omega^2} \Rightarrow$$

$$x_{\max} = -0,4 \text{ m}$$

Το μείον δηλώνει ότι το νήμα θα χαλαρώσει στα αρνητικά (πάνω αριστερά) άρα

$$A_{\max} = 0,4 \text{ m}$$

δ) Από τη συνθήκη ισορροπίας στη θέση ισορροπίας του συστήματος των δύο σωμάτων προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w_1 + w_2 \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l_1 = (m_1 + m_2)g \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} \Rightarrow$$

$$\Delta l_1 = 0,4 \text{ m}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στη θέση ισορροπίας του συστήματος του σώματος Σ_1 προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda} = w_1 \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l_2 = m_1 g \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow$$

$$\Delta l_2 = 0,1 \text{ m}$$

Το πλάτος της νέας ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 είναι:

$$A' = \Delta l_1 - \Delta l_2 - A \Rightarrow A' = 0,1 \text{ m}$$

Ισχύει:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \omega' = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Τελικά προκύπτει:

$$\left| \frac{dv}{dt} \right|_{\max} = |\omega'^2 A| \Rightarrow \left| \frac{dv}{dt} \right|_{\max} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

3.89 α) Επειδή έχουμε συντονισμό ισχύει

$$\omega = \omega_0 = \omega_\delta.$$

Ισχύει:

$$\Delta t = \frac{6T}{2} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \Delta t}{6} \Rightarrow T = 0,2\pi \text{ s}$$

Έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Τελικά προκύπτει:

$$k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow m = \frac{k}{\omega^2} \Rightarrow m = 4 \text{ kg}$$

β) Έχουμε:

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow v_{\max} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} + F_{\alpha\nu\tau} + F_\delta = m\alpha \Rightarrow$$

$$-kx + F_{\alpha\nu\tau} + F_\delta = -m\omega^2 x \Rightarrow$$

$$-kx + F_{\alpha\nu\tau} + F_\delta = -m\omega^2 x \Rightarrow F_{\alpha\nu\tau} = -F_\delta$$

Προκύπτει:

$$F_{\alpha\nu\tau, \max} = F_{\delta, \max} \Rightarrow b v_{\max} = F_{\delta, \max} \Rightarrow$$

$$b = \frac{F_{\delta, \max}}{v_{\max}} \Rightarrow b = 0,5 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$F_{\alpha\nu\tau} = -F_\delta \Rightarrow -b v = -F_{\delta, \max} \sin \omega t \Rightarrow$$

$$v = \frac{F_{\delta, \max} \sin \omega t}{b} \Rightarrow v = 8 \sin 10 t (\text{S.I.})$$

γ) Υπολογίζουμε την ταχύτητα τη χρονική

στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{30} \text{ s}$:

$$v_1 = \left(8 \sin 10 \cdot \frac{\pi}{30} \right) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Τελικά ισχύει:

$$\frac{dW_{F_\delta}}{dt} = \frac{dW_{F_{\alpha\nu\tau}}}{dt} \Rightarrow \frac{dW_{F_\delta}}{dt} = b v_1^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dW_{F_\delta}}{dt} = 8 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

δ) Έχουμε:

$$F_{\alpha\nu\tau} = -b v_2 \Rightarrow v_2 = -\frac{F_{\alpha\nu\tau}}{b} \Rightarrow v_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$v_2 = v_{\max} \sin \varphi_0 \Rightarrow 4 = 8 \sin \varphi_0 \Rightarrow$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Προκύπτει:

$$x = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow x = \pm 0,4\sqrt{3}m$$

Τελικά καταλήγουμε:

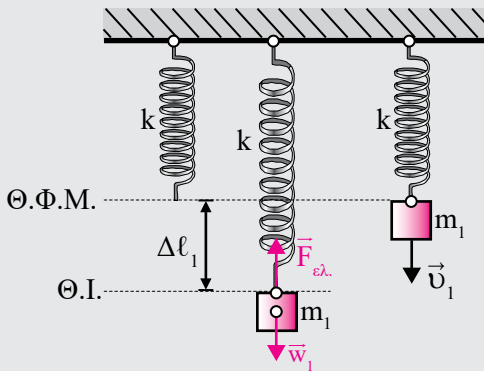
$$|\alpha| = \omega^2 |x| \Rightarrow |\alpha_3| = 40\sqrt{3} \frac{m}{s^2}$$

3.90 α) Για τη θέση ισορροπίας του σώματος m_1 ισχύει:

$$(\Theta.I.): \Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ.} + \vec{w} = 0 \Rightarrow F_{ελ.} = w_1 \Rightarrow$$

$$k\Delta l_1 = m_1 g (1) \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow$$

$$\Delta l_1 = 0,1m$$



Το σώμα m_1 εκτοξεύεται από τη θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος με ταχύτητα μέτρου v_1 . Η θέση αυτή αποτελεί τυχαία θέση της ταλάντωσής του.

Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε.Τ. για τη θέση αυτή:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} k \Delta l_1^2 \Rightarrow$$

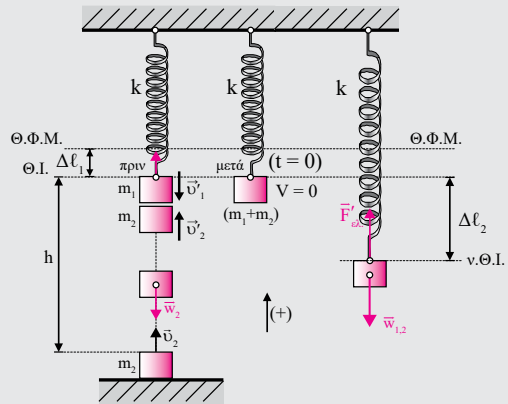
$$A = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + k \Delta l_1^2}{k}} \Rightarrow$$

$$A = 0,3 m$$

β)

Το σώμα m_1 , τη στιγμή της κρούσης, διέρχεται από τη Θέση Ισορροπίας του για πρώτη φορά μετά την εκτόξευσή του, οπότε για το μέτρο v_1' της ταχύτητάς του πριν την κρούση ισχύει:

$$v_1' = v_{\max} = \omega A.$$



$$\text{Όμως: } k = m_1 \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{s}$$

$$\text{Οπότε: } v_1' = 3 \frac{m}{s}$$

Το σώμα m_2 εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω οπότε για τον υπολογισμό του μέτρου της ταχύτητάς του πριν την κρούση εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής του Ενέργειας. Έχουμε:

$$\Theta.M.K.E.: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{\text{τελ.}} - K_{\text{αρχ.}} = W_{w_2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = m_2 g h \Rightarrow$$

$$v_2' = \sqrt{v_2^2 - 2gh} \Rightarrow v_2' = 1 \frac{m}{s}$$

Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά στη θέση ισορροπίας του σώματος m_1 . Για την ταχύτητα που θα αποκτήσει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε:

$$Α.Δ.Ο.: \vec{p}_{ολ.(\text{πριν})} = \vec{p}_{ολ.(\text{μετά})} \Rightarrow$$

$$m_2 v_2' - m_1 v_1' = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = 0$$

γ) Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται. Αφού η Θέση Ισορροπίας αλλάζει, τότε το σημείο της κρούσης θα αποτελεί την πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης που έπειτα θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα.

Για τη νέα θέση ισορροπίας του συσσωματώματος $(m_1 + m_2)$ ισχύει:

$$(v.\Theta.I.): \Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow \vec{F}'_{ελ} + \vec{w}_{1,2} = 0 \Rightarrow$$

$$F'_{ελ} = w_{1,2} \Rightarrow k(\Delta l_1 + \Delta l_2) = (m_1 + m_2)g \Rightarrow$$

$$\stackrel{(1)}{k\Delta l_1 + k\Delta l_2 = m_1g + m_2g \Rightarrow k\Delta l_2 = m_2g \Rightarrow \Delta l_2 = 0,3m}$$

Για το πλάτος της νέας ταλάντωσης ισχύει όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα:

$$A' = \Delta l_2 = 0,3m$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα είναι:

$$x = A' \eta \mu(\omega' t + \varphi_0)$$

Για τη νέα κυκλική συχνότητα ω' της ταλάντωσης του συσσωματώματος έχουμε:

$$k = (m_1 + m_2)\omega'^2 \Rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega' = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι

$$x = A' \eta \mu(\omega' t + \varphi_0) \stackrel{t=0, x=+A'}{\Rightarrow} +A' = A' \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = +1 \stackrel{0 \leq \varphi_0 < 2\pi}{\Rightarrow} \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

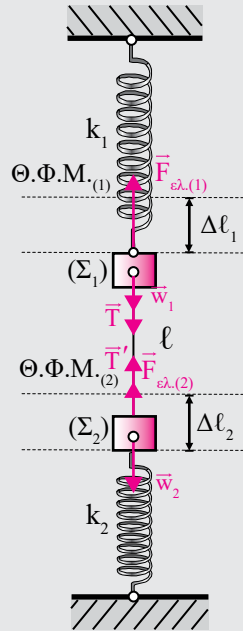
Τελικά παίρνουμε:

$$x = 0,3 \eta \mu \left(5t + \frac{\pi}{2} \right) (\text{S.I.})$$

δ) Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου παίρνει την ελάχιστη τιμή της στη θέση όπου το συσσωμάτωμα απέχει την ελάχιστη απόσταση από τη Θέση Φυσικού Μήκους του ελατηρίου, δηλαδή στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του. Ομοίως η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου παίρνει την μέγιστη τιμή της στη θέση όπου το συσσωμάτωμα απέχει την μέγιστη απόσταση από τη Θέση Φυσικού Μήκους του ελατηρίου, δηλαδή στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του. Έχουμε:

$$\frac{U_{ελ.(min)}}{U_{ελ.(max)}} = \frac{\frac{1}{2} k \Delta l_1^2}{\frac{1}{2} k (2A' + \Delta l_1)^2} = \frac{\Delta l_1^2}{(2A' + \Delta l_1)^2} \Rightarrow \frac{U_{ελ.(min)}}{U_{ελ.(max)}} = \frac{1}{49}$$

3.91 α) Αρχική κατάσταση ισορροπίας των δύο σωμάτων



Για τη δυναμική ενέργεια $U_{ελ.(2)}$ που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο σταθεράς k_2 έχουμε:

$$U_{ελ.(2)} = \frac{1}{2} k_2 \Delta l_2^2 \Rightarrow k_2 = \frac{2U_{ελ.(2)}}{\Delta l_2^2} \Rightarrow k_2 = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Για τη θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων m_1 και m_2 , έχουμε:

$$\begin{aligned} (\Theta.I.): \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = T_1(v\eta\mu\alpha\alpha\beta\alpha\rho\zeta) \\ F_{ελ.(1)} + F_{ελ.(2)} + T_{,,} = w_1 + w_2 + T \Rightarrow \\ k_1 \Delta l_1 + k_2 \Delta l_2 = m_1 g + m_2 g \Rightarrow \\ m_2 = \frac{k_1 \Delta l_1 + k_2 \Delta l_2}{g} - m_1 \Rightarrow \\ m_2 = 2 \text{ kg} \end{aligned}$$

β) Όταν κόψουμε το νήμα καταργούνται οι τάσεις των νημάτων που ασκούνται στα σώματα Σ_1 και Σ_2 . Επειδή $F_{ελ.(1)} > w_1$ το σώμα Σ_1 έπειτα θα κινηθεί προς τα πάνω, ενώ επει-

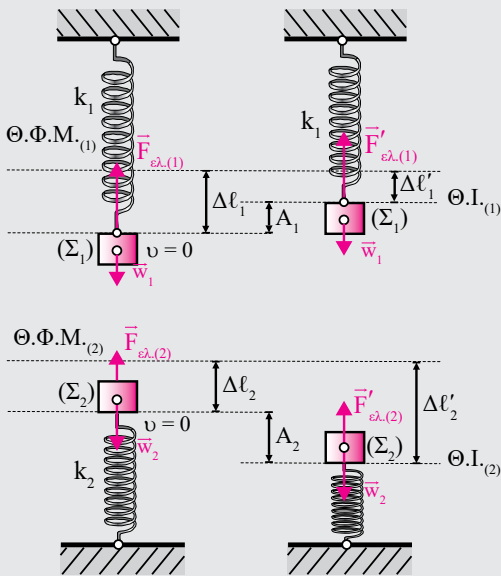
δή $w_2 > F_{ελ.(2)}$ το σώμα Σ_2 έπειτα θα κινηθεί προς τα κάτω. Οι ταχύτητες των 2 σωμάτων Σ_1 και Σ_2 τη στιγμή που κόβουμε το νήμα είναι μηδέν οπότε οι θέσεις της αρχικής του ισορροπίας αποτελούν τις ακραίες θέσεις των ταλαντώσεων που θα εκτελέσουν στη συνέχεια. Για τις θέσεις ισορροπίας των ταλαντώσεων των 2 σωμάτων έχουμε:

$$\Theta.I.(\Sigma_1) : \Sigma F = 0 \Rightarrow$$

$$F'_{ελ.(1)} = w_1 \Rightarrow k_1 \Delta l'_1 = m_1 g \Rightarrow \Delta l'_1 = 0,1 \text{ m}$$

$$\Theta.I.(\Sigma_2) : \Sigma F = 0 \Rightarrow$$

$$F'_{ελ.(2)} = w_2 \Rightarrow k_2 \Delta l'_2 = m_2 g \Rightarrow \Delta l'_2 = 0,4 \text{ m}$$



Εύκολα συμπεραίνουμε, όπως φαίνεται και από το σχήμα, ότι τα πλάτη των ταλαντώσεων των 2 σωμάτων θα είναι:

$$A_1 = \Delta l_1 - \Delta l'_1 \Rightarrow A_1 = 0,1 \text{ m και}$$

$$A_2 = \Delta l'_2 - \Delta l_2 \Rightarrow A_2 = 0,2 \text{ m}$$

γ) Για τις περιόδους των ταλαντώσεων των 2 σωμάτων Σ_1 και Σ_2 έχουμε:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = \frac{\pi}{5} \text{ s} = 0,2\pi \text{ s και}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k_2}} = \frac{2\pi}{5} \text{ s} = 0,4\pi \text{ s}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει $T_2 = 2T_1$.

Τα δύο σώματα θα απέχουν την ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους όταν ξαναβρεθούν στις θέσεις που βρισκόντουσαν τη χρονική στιγμή $t=0$ που κόψαμε το νήμα, αφού αυτές αποτελούν και τις ακραίες τους θέσεις. Για να συμβεί αυτό, αφού $T_2=2T_1$, θα πρέπει το σώμα Σ_2 να εκτελέσει μια ταλάντωση και το σώμα Σ_1 δύο ταλαντώσεις.

Άρα η χρονική στιγμή t_1 που τα δύο σώματα θα απέχουν την ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους είναι $t_1=T_2=2T_1 \Rightarrow t_1 = 0,4\pi \text{ s}$

Για τις αποστάσεις που έχουν διανύσει μέχρι τότε τα 2 σώματα ισχύει:

$$S_1 = 8A_1 \Rightarrow S_1 = 0,8 \text{ m και}$$

$$S_2 = 4A_2 \Rightarrow S_2 = 0,8 \text{ m}$$

δ) Για να εκφράσουμε την κινητική ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 συναρτήσει της απομάκρυνσής του από τη θέση ισορροπίας του, χρησιμοποιούμε τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης και έχουμε:

$$E_{ολ.(1)} = K_1 + U_1 \Rightarrow K_1 = E_{ολ.(1)} - U_1 \Rightarrow$$

$$K_1 = \frac{1}{2} k_1 A_1^2 - \frac{1}{2} k_1 x^2 \Rightarrow$$

$$K_1 = 0,5 - 50x^2 \text{ (S.I.)}$$

$$\text{όπου } -0,1 \text{ m} \leq x \leq +0,1 \text{ m}$$

Ομοίως για την κινητική ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 συναρτήσει της απομάκρυνσής του από τη θέση ισορροπίας του, έχουμε:

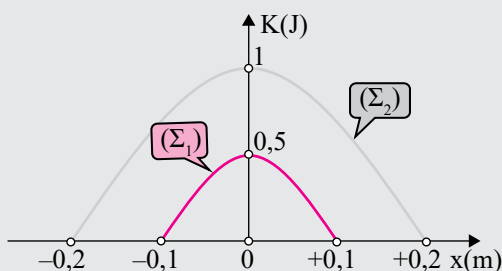
$$E_{ολ.(2)} = K_2 + U_2 \Rightarrow K_2 = E_{ολ.(2)} - U_2 \Rightarrow$$

$$K_2 = \frac{1}{2} k_2 A_2^2 - \frac{1}{2} k_2 x^2 \Rightarrow$$

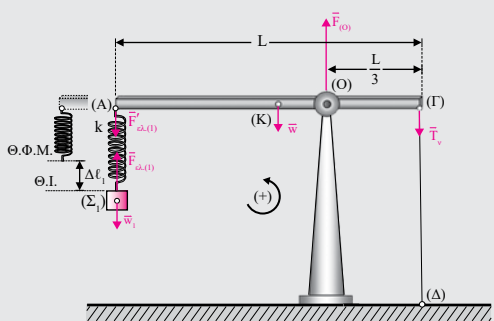
$$K_2 = 1 - 25x^2 \text{ (S.I.)}$$

$$\text{όπου } -0,2 \text{ m} \leq x \leq +0,2 \text{ m}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



3.92 α)



Στην κατάσταση ισορροπίας του σώματος (Σ_1) , έχουμε:

$$(\Theta.I.): \Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ(1)} + \vec{w}_1 = 0 \Rightarrow$$

$$F_{ελ(1)} - w_1 = 0 \Rightarrow F_{ελ(1)} = w_1 \Rightarrow$$

$$F_{ελ(1)} = m_1 g \Rightarrow F_{ελ(1)} = 30 \text{ N}$$

Επειδή το ελατήριο είναι αβαρές έχουμε:

$$F'_{ελ(1)} = F_{ελ(1)} = 30 \text{ N}$$

Η ράβδος ισορροπεί οπότε για την συνολική ροπή όλων των δυνάμεων ως προς το σημείο στήριξης (O) ισχύει:

$$\Sigma \vec{\tau}_{(O)} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_{F_{ελ(1)}} + \vec{\tau}_w + \vec{\tau}_{F_{(O)}} + \vec{\tau}_{T_v} = 0 \Rightarrow$$

$$F'_{ελ(1)} \cdot \left(L - \frac{L}{3} \right) + Mg \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3} \right) - T_v \cdot \frac{L}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$F'_{ελ(1)} \cdot \frac{2L}{3} + Mg \cdot \frac{L}{6} - T_v \cdot \frac{L}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$T_v = 2F'_{ελ(1)} + \frac{Mg}{2} \Rightarrow T_v = 120 \text{ N}$$

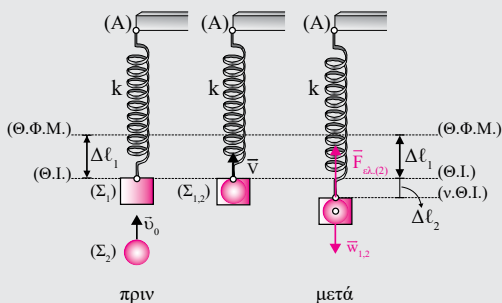
Επίσης, αφού η ράβδος ισορροπεί, για τη συνισταμένη των δυνάμεων έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{(O)} + \vec{T}_v + \vec{w} + \vec{F}'_{ελ(1)} = 0 \Rightarrow$$

$$F_{(O)} - T_v - Mg - F'_{ελ(1)} = 0 \Rightarrow$$

$$F_{(O)} = 270 \text{ N}$$

β)



Επειδή το σύστημα των σωμάτων (Σ_1) και (Σ_2) είναι μονωμένο κατά τη διάρκεια της κρούσης, η ορμή του παραμένει σταθερή.

$$A.\Delta.O.: \vec{P}_{ολ.(πριν)} = \vec{P}_{ολ.(μετά)} \Rightarrow$$

$$m_2 v_0 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow$$

$$V = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$V = 2\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Από την αρχική κατάσταση ισορροπίας του σώματος (Σ_1) , έχουμε:

$$F_{ελ(1)} = m_1 g \Rightarrow k \Delta \ell_1 = m_1 g (1) \Rightarrow$$

$$\Delta \ell_1 = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow \Delta \ell_1 = 0,3 \text{ m}$$

Για την νέα θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων (Σ_1) και (Σ_2) ισχύει:

$$(v.\Theta.I.): \Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ(2)} + \vec{w}_{1,2} = 0 \Rightarrow$$

$$F_{ελ(2)} - w_{1,2} = 0 \Rightarrow F_{ελ(2)} = w_{1,2} \Rightarrow$$

$$k \cdot (\Delta \ell_1 + \Delta \ell_2) = (m_1 + m_2) g \Rightarrow$$

$$k \Delta \ell_1 + k \Delta \ell_2 = m_1 g + m_2 g \Rightarrow k \Delta \ell_2 = m_2 g \Rightarrow$$

$$\Delta \ell_2 = \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow \Delta \ell_2 = 0,1 \text{ m}$$

Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης Ενέργειας της Ταλάντωσης (Α.Δ.Ε.Τ.) για την θέση που γίνεται η κρούση η οποία απέχει από τη νέα θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων (Σ_1) και (Σ_2) απόσταση $\Delta l_2 = 0,1\text{m}$. Προκύπτει:

$$E = K + U \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 + \frac{1}{2} k \Delta l_2^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) V^2 + k \Delta l_2^2}{k}} \Rightarrow$$

$$A = 0,7 \text{ m}$$

γ) Παρατηρούμε ότι για το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος ισχύει:

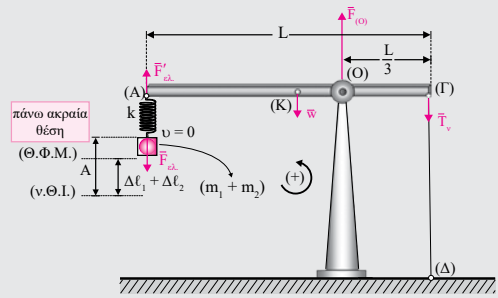
$$A > \Delta l_1 + \Delta l_2$$

Αυτό σημαίνει ότι κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος, αυτό κινείται και πάνω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Όσο το συσσωμάτωμα κινείται κάτω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (δηλαδή το ελατήριο να είναι επιμηκυμένο), η δύναμη που δέχεται το άκρο (Α) της ράβδου από το ελατήριο έχει φορά προς τα κάτω οπότε τόσο αυτή όσο και το βάρος της ράβδου προκαλούν αντιωρολογιακή ροπή ως προς το σημείο στήριξης (Ο) οπότε το νήμα δεν μπορεί να χαλαρώσει. Όσο όμως το συσσωμάτωμα κινείται πάνω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (δηλαδή το ελατήριο να είναι συσπειρωμένο), η δύναμη που δέχεται το άκρο (Α) της ράβδου από το ελατήριο έχει φορά προς τα πάνω και προκαλεί ροπή ωρολογιακή σε αντίθεση με τη ροπή που προκαλεί το βάρος της δοκού (προκαλεί αντιωρολογιακή ροπή) ως προς το σημείο στήριξης (Ο).

Όταν το συσσωμάτωμα κινείται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου προς την πάνω ακραία θέση, η δύναμη του ελατηρίου αυξάνεται άρα και η ροπή της ως προς το σημείο στήριξης (Ο) οπότε η δύναμη της τάσης μειώνεται αφού μειώνεται και η ροπή της.

Στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης έχουμε:

$$F_{ελ.} = k \cdot [A - (\Delta l_1 + \Delta l_2)] \Rightarrow F_{ελ.} = 30\text{N}$$



Η ράβδος ισορροπεί οπότε για την συνολική ροπή όλων των δυνάμεων ως προς το σημείο στήριξης (Ο) ισχύει:

$$\Sigma \vec{\tau}_{(O)} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_{F_{ελ.}} + \vec{\tau}_W + \vec{\tau}_{F_{(O)}} + \vec{\tau}_{T_v} = 0 \Rightarrow$$

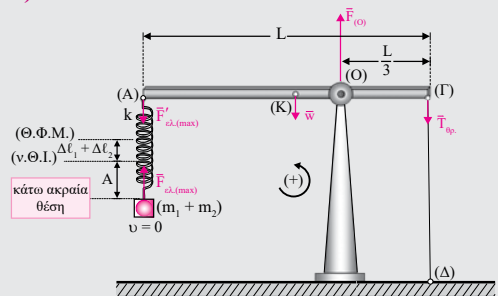
$$-F'_{ελ.} \cdot \left(L - \frac{L}{3}\right) + Mg \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3}\right) - T_v \cdot \frac{L}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$-F'_{ελ.} \cdot \frac{2L}{3} + Mg \cdot \frac{L}{6} - T_v \cdot \frac{L}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$T_v = \frac{Mg}{2} - 2F'_{ελ.} \Rightarrow T_v = 0$$

Παρατηρούμε ότι κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος, στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης του, η δύναμη που δέχεται η ράβδος από το νήμα είναι $T_v = 0$, άρα το νήμα οριακά δε χαλαρώνει.

δ)



Όπως είπαμε και στο ερώτημα γ), όταν το συσσωμάτωμα κινείται κάτω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (δηλαδή το ελατήριο να είναι επιμηκυμένο), η δύναμη που δέχεται το άκρο (Α) της ράβδου από το ελατήριο έχει φορά προς τα κάτω οπότε τόσο αυτή όσο και το βάρος της ράβδου προκαλούν

αντιωρολογιακή ροπή ως προς το σημείο στήριξης (Ο). Όσο το συσσωμάτωμα πλησιάζει προς την κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του, το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου αυξάνεται οπότε για να ισορροπεί η ράβδος θα πρέπει να αυξάνεται και το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από το νήμα. Στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης του συσσωματώματος το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από το νήμα παίρνει την μέγιστη τιμή της. Σύμφωνα με την εκφώνηση, κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος το νήμα οριακά δεν σπάει, άρα το όριο θραύσεως του νήματος είναι ίσο με την μέγιστη τιμή της δύναμης που δέχεται η ράβδος από το νήμα (δηλαδή στην κάτω ακραία θέση).

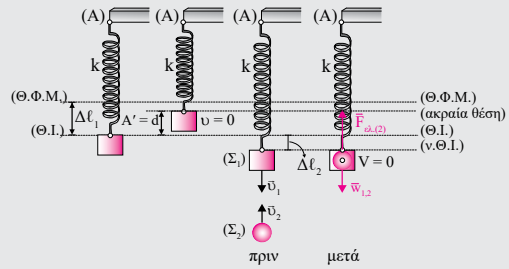
Στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης έχουμε:

$$F_{ελ.(max)} = k \cdot [A + (\Delta l_1 + \Delta l_2)] \Rightarrow F_{ελ.(max)} = 110 \text{ N}$$

Η ράβδος ισορροπεί οπότε για τη συνολική ροπή όλων των δυνάμεων ως προς το σημείο στήριξης (Ο) ισχύει:

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{\tau}_{(O)} = 0 &\Rightarrow \vec{\tau}_{F'_{ελ.(max)}} + \vec{\tau}_w + \vec{\tau}_{F_{(O)}} + \vec{\tau}_{T_{\theta\rho.}} = 0 \Rightarrow \\ F'_{ελ.(max)} \cdot \left(L - \frac{L}{3}\right) + Mg \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3}\right) - T_{\theta\rho.} \cdot \frac{L}{3} &= 0 \Rightarrow \\ + F'_{ελ.(max)} \cdot \frac{2L}{3} + Mg \cdot \frac{L}{6} - T_{\theta\rho.} \cdot \frac{L}{3} &= 0 \Rightarrow \\ T_{\theta\rho.} &= \frac{Mg}{2} + 2F'_{ελ.(max)} \Rightarrow \\ T_{\theta\rho.} &= 280 \text{ N} \end{aligned}$$

ε) Από τη στιγμή που αφήνουμε το σώμα (Σ_1) ελεύθερο από τη θέση που το εκτρέψαμε κατά d , αυτό εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A' = d = 0,2 \text{ m}$. Για να μην ταλαντωθεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση, θα πρέπει αυτό αμέσως μετά την κρούση να ακινητοποιηθεί και ταυτόχρονα στη θέση αυτή να ισχύει $\Sigma F = 0$ ώστε αυτό να μην ξεκινήσει να κινείται. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει η κρούση να συμβεί στη νέα θέση ισορροπίας του συσσωματώματος όπως έχει υπολογιστεί στο β) ερώτημα όπου εκεί ισχύει $\Sigma F = 0$.



Για την ταλάντωση του σώματος (Σ_1) από τη στιγμή που το αφήνουμε ελεύθερο και μέχρι να φτάσει στη νέα θέση ισορροπίας του συσσωματώματος (αυτή απέχει απόσταση $\Delta l_2 = 0,1 \text{ m} < A'$ κάτω από τη θέση ισορροπίας του σώματος (Σ_1)), εφαρμόζουμε τη διατήρηση ενέργειας της ταλάντωσης (Α.Δ.Ε.Τ.) στη θέση αυτή:

$$\begin{aligned} E' = K + U &\Rightarrow \frac{1}{2} k A'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} k \Delta l_2^2 \Rightarrow \\ v_1 &= \sqrt{\frac{k A'^2 - k \Delta l_2^2}{m_1}} \Rightarrow v_1 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Επειδή το σύστημα των σωμάτων (Σ_1) και (Σ_2) είναι μονωμένο κατά τη διάρκεια της κρούσης, η ορμή του παραμένει σταθερή.

$$\text{Α.Δ.Ο.: } \vec{p}_{ολ.(πριν)} = \vec{p}_{ολ.(μετά)} \Rightarrow$$

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} \Rightarrow v_2 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3.93 α) Αφού αρχικά το σύστημα ισορροπεί, έχουμε:

$$(\Sigma_1): \Sigma F_1 = 0 \Rightarrow T_1 = m_1 g \Rightarrow T_1 = 20 \text{ N} (1)$$

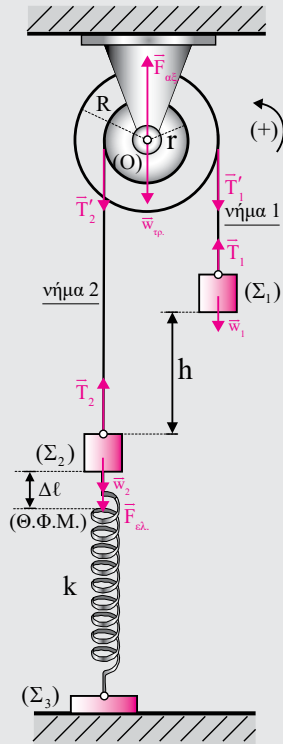
$$(\text{Τροχαλία}): \Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow T_2' r - T_1' R = 0 \Rightarrow$$

$$T_2' = 2T_1'' \Rightarrow T_2 = 2T_1 \Rightarrow T_2 = 40 \text{ N} (2)$$

Επειδή $w_2 = m_2 g = 20 \text{ N} < T_2$, το σώμα Σ_2 δέχεται δύναμη από το ελατήριο με φορά προς τα κάτω, άρα το ελατήριο είναι επιμηκνόμενο.

$$(\Sigma_2): \Sigma F_2 = 0 \Rightarrow T_2 = w_2 + F_{ελ.} \Rightarrow$$

$$T_2 = w_2 + K \cdot \Delta l \Rightarrow \Delta l = 0,1 \text{ m}$$



Επίσης η τροχαλία ισορροπεί και μεταφορικά άρα:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$$

$$F_{\alpha\xi} = T'_1 + T'_2 + w_{\alpha\xi} = T'_1 + T'_2 + Mg \Rightarrow$$

$$F_{\alpha\xi} = 120 \text{ N}$$

β) Όταν κόψουμε το νήμα 2 η T_2 καταργείται, άρα, λόγω του βάρους του σώματος Σ_2 και της δύναμης του ελατηρίου το Σ_2 θα κινηθεί προς τα κάτω. Επειδή τη στιγμή $t=0$ η ταχύτητα του σώματος είναι $v=0$, προκύπτει ότι βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση. Υπολογίζουμε τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

$$\Theta.I. \Sigma F = 0 \Rightarrow F'_{ελ} = w_2 \Rightarrow K \cdot \Delta l' = m_2 g \Rightarrow$$

$$\Delta l' = 0,1 \text{ m}$$

Έτσι για το πλάτος της ταλάντωσης του Σ_2 έχουμε:

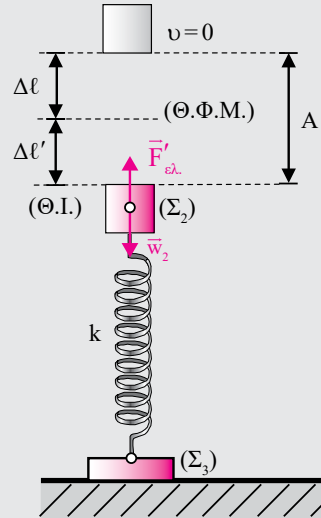
$$A = \Delta l + \Delta l' \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

$$K = m_2 \omega^2 \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για την αρχική φάση της ταλάντωσης ισχύει:

$$x = A \eta \mu(\omega t + \phi_0) \xrightarrow{t=0, x=+A} A = A \eta \mu \phi_0 \Rightarrow$$

$$\eta \mu \phi_0 = 1 \xrightarrow{0 \leq \phi_0 < 2\pi} \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$



Άρα η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

$$x = 0,2 \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) (\text{S.I.})$$

γ) Σε τυχαία θέση της ταλάντωσης πάνω από τη $\Theta.F.M.$ που απέχει από τη $\Theta.I.$ απομάκρυνση x , έχουμε για την ταλάντωση του Σ_2 :

$$\Sigma F = -K \cdot x \Rightarrow -F'_{ελ(2)} - w_2 = -K \cdot x \Rightarrow$$

$$F'_{ελ(2)} = K \cdot x - m_2 g \Rightarrow$$

$$F'_{ελ(2)} = 200x - 20 (\text{S.I.})$$

Το σώμα Σ_3 ισορροπεί άρα:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N + F'_{ελ(2)} = w_3 \Rightarrow$$

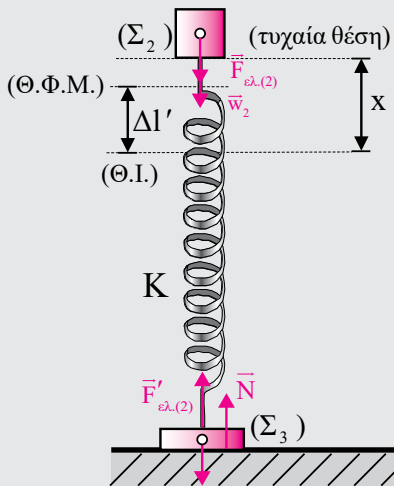
$$N = m_3 g - F'_{ελ(2)} \xrightarrow{F'_{ελ(2)} = F'_{ελ(2)}} \Rightarrow$$

$$N = 50 - 200x (\text{S.I.})$$

$$\text{όπου } -0,2 \leq x \leq +0,2$$

Την ελάχιστη δύναμη από το έδαφος το σώμα Σ_3 την δέχεται όταν το σώμα Σ_2 βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση.

$$N_{\min} = 50 - 200 \cdot 0,2 \Rightarrow N_{\min} = 10 \text{ N} \neq 0$$



Οπότε δε χάνεται η επαφή του σώματος Σ_3 με το έδαφος κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 .

δ) Τη χρονική στιγμή που η δύναμη που δέχεται το σώμα Σ_3 από το έδαφος ισούται με το βάρος του για πρώτη φορά μετά το κόψιμο του νήματος 2, η δύναμη του ελατηρίου μηδενίζεται για πρώτη φορά. Αυτό συμβαίνει όταν το σώμα Σ_2 διέρχεται από τη θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, κινούμενο προς τα αρνητικά.

Για τον υπολογισμό του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 έχουμε:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F \cdot v = -K \cdot x \cdot v$$

$$\text{όπου } x = \Delta l' = 0,1 \text{ m}$$

Επειδή η ενέργεια στην ταλάντωση διατηρείται έχουμε:

$$E_{\text{ολ.}} = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} k \Delta l'^2 \Rightarrow$$

$$200 \cdot 0,2^2 = 2v^2 + 200 \cdot 0,1^2 \Rightarrow v = \pm \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

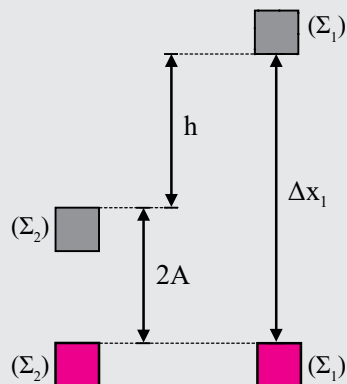
Όμως θέλουμε $v < 0$ άρα $v = -\sqrt{3} \text{ m/s}$

Οπότε:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F \cdot v = -k \cdot x \cdot v = -200 \cdot 0,1 \cdot (-\sqrt{3}) \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = 20\sqrt{3} \text{ J/s}$$

ε) Η περίοδος ταλάντωσης του σώματος Σ_2 είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 0,2\pi \text{ s}$.



Το σώμα Σ_2 ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά όταν θα βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του και θα έχει περάσει χρόνος $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = 0,1\pi \text{ s}$ μετά το κόψιμο του νήματος.

Στο χρόνο αυτό το σώμα Σ_2 έχει μετατοπιστεί κατά $2A$ από την αρχική του θέση ενώ το σώμα Σ_1 θα έχει μετατοπιστεί κατά:

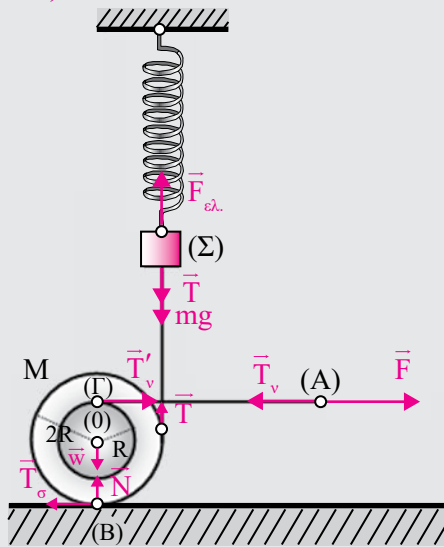
$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2 \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2} 10 \cdot (0,1\pi)^2 \Rightarrow$$

$$\Delta x_1 = 0,5 \text{ m}$$

Για την αρχική απόσταση h που απείχαν τα δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 τη στιγμή που κόπηκε το νήμα 2 ισχύει:

$$h = \Delta x_1 - 2A \Rightarrow h = 0,1 \text{ m}$$

3.94 α)



Από την ισορροπία του σώματος Σ έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{el} - mg - T = 0 \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l - mg - T = 0 \Rightarrow$$

$$T = k \cdot \Delta l - mg \Rightarrow T = 30 \text{ N}$$

Από την ισορροπία του δίσκου έχουμε:

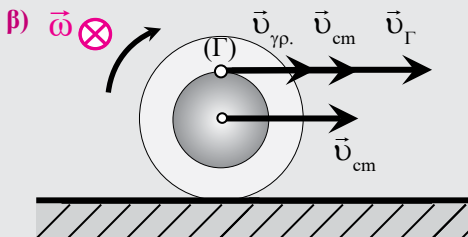
$$\Sigma \tau_B = 0 \Rightarrow \tau_T - \tau_F = 0 \Rightarrow \tau_T = \tau_F \Rightarrow$$

$$T \cdot 2R = F \cdot 3R \Rightarrow F = \frac{2}{3} T \Rightarrow F = 20 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F - T_{\sigma\tau} = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau} = F = 20 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Mg = T + N \Rightarrow N = Mg - T = 20 \text{ N}$$

$$A = \sqrt{N^2 + T_{\sigma\tau}^2} \Rightarrow A = 20\sqrt{2} \text{ N}$$



i. Για την κίνηση του δίσκου έχουμε:

$$\omega = \alpha_\gamma t \quad (1)$$

Για το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται ισχύει:

$$\ell = R\theta \Rightarrow \ell = R \frac{1}{2} \alpha_\gamma t^2 \Rightarrow \ell = \frac{1}{2} R \alpha_\gamma \left(\frac{\omega}{\alpha_\gamma} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\ell = \frac{R\omega^2}{2\alpha_\gamma} \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{R\omega^2}{2\ell} \Rightarrow$$

$$\alpha_\gamma = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

ii. Η ταχύτητα στο σημείο Γ είναι η συνισταμένη δυο ταχυτήτων:

Της $\vec{v}_{\gamma p}$ λόγω της στροφικής κίνησης και της $\vec{v}_{cm}$ λόγω της μεταφορικής κίνησης.Επειδή $\vec{v}_{\gamma p}$ και $\vec{v}_{cm}$ είναι ομόρροπες, για το μέτρο της ταχύτητας στο Γ ισχύει:

$$v_\Gamma = v_{cm} + v_{\gamma p} = 2R\omega + R\omega = 3R\omega \Rightarrow$$

$$v_\Gamma = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Αν ο δίσκος έκανε μόνο στροφική κίνηση θα είχε μετατοπιστεί προς τα δεξιά όσο το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται ℓ .

Αν ο δίσκος έκανε μόνο μεταφορική κίνηση θα είχε μετατοπιστεί προς τα δεξιά όσο το κέντρο μάζας του κυλίνδρου.

Τώρα που εκτελεί ταυτόχρονα τις δυο κινήσεις θα ισχύει:

$$x_A = x_{cm} + \ell \quad (2)$$

Όμως:

$$\left. \begin{aligned} \ell &= R\theta \\ x_{cm} &= 2R\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_{cm} = 2\ell \Rightarrow \ell = \frac{x_{cm}}{2} = 3,5 \text{ m} \quad (3)$$

$$\stackrel{(3)}{(2)} \Rightarrow x_A = 3\ell \Rightarrow x_A = 10,5 \text{ m}$$

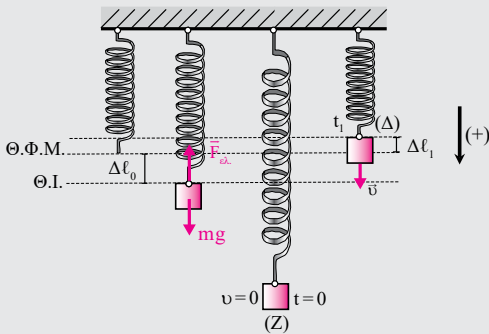
δ) Μετά το κόψιμο του νήματος το σώμα Σ κάνει α.α.τ. με πλάτος:

$$A = \Delta \ell - \Delta \ell_0 \quad (4)$$

Στη Θ.Ι. του Σ ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{el} - mg = 0 \Rightarrow K \cdot \Delta \ell_0 = mg \Rightarrow$$

$$\Delta \ell_0 = \frac{mg}{K} \Rightarrow \Delta \ell_0 = 0,1 \text{ m}$$



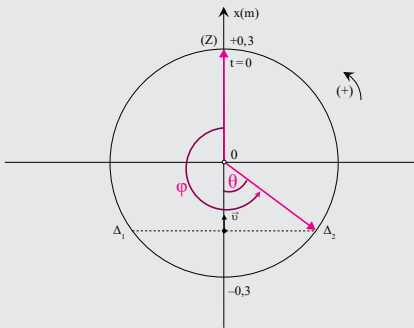
Από τη σχέση (4) έχουμε:

$$A = 0,4\text{m} - 0,1\text{m} \Rightarrow A = 0,3\text{m}$$

Τη στιγμή που το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά $0,05\text{m}$, το σώμα βρίσκεται στο σημείο Δ με απομάκρυνση:

$$x_{\Delta} = -0,1 - 0,05 = -0,15\text{m}$$

Τη δεύτερη φορά η ταχύτητά του είναι θετική. Αφού η μια θέση δεν είναι χαρακτηριστική θα βρούμε τον χρόνο με περιστρεφόμενο διάνυσμα (π.δ.)



Θεωρούμε ένα διάνυσμα μήκους A του οποίου η αρχή βρίσκεται ακίνητη στην αρχή O ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων. Το διάνυσμα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω κατά τη θετική φορά και η προβολή του τέλους του στον κατακόρυφο άξονα, δίνει κάθε φορά την απομάκρυνση του κινητού από την $\Theta.I.$ του. Την στιγμή $t=0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $K(x_K=+A=+0,3\text{m})$. Εκεί βρίσκεται και το π.δ.. Την στιγμή που το σώμα βρίσκεται στο σημείο $\Delta(x_{\Delta}=-0,15\text{m})$ για δεύτερη φορά το π.δ. βρίσκεται στην θέση Δ_2 , έχοντας διαγράψει γωνία φ .

Από το σχήμα $\varphi = \pi + \theta$ και:

$$\sin\theta = \frac{(O\Delta_2)}{(O\Delta)} = \frac{0,15}{0,3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}\text{rad}$$

Άρα:

$$\varphi = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\text{rad}$$

Όμως:

$$\varphi = \omega t \Rightarrow t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\frac{4\pi}{3}}{\frac{1}{10}} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{15}\text{s}$$

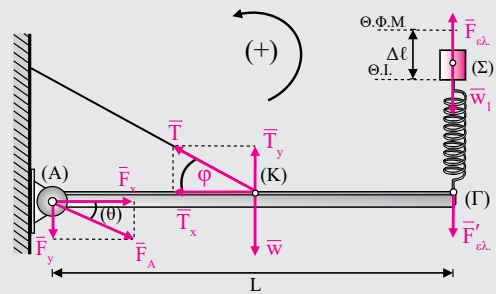
Για τον υπολογισμό της ταχύτητας κάνουμε ΑΔΕΤ στο Δ.

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx_{\Delta}^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x_{\Delta}^2) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x_{\Delta}^2)} \Rightarrow$$

$$v = 2,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3.95



α) Το σώμα Σ ισορροπεί στη θέση ισορροπίας του άρα

$$\Theta.I.: \Sigma F = 0 \Rightarrow F_{el.} = w_1 \Rightarrow F_{el.} = mg \quad (1)$$

Επειδή το ελατήριο είναι αβαρές οι δυνάμεις στα δύο του άκρα έχουν ίσα μέτρα άρα:

$$F_{el.} = F'_{el.} = mg \quad (1)$$

Αφού η ράβδος ισορροπεί, πρέπει η συνισταμένη των ροπών για τη ράβδο ως προς οποιοδήποτε σημείο της να είναι μηδέν, οπότε:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow T_y \frac{L}{2} - Mg \frac{L}{2} - F'_{ελ.} L = 0 \Rightarrow$$

$$T \eta \mu 30^\circ \frac{1}{2} - Mg \frac{1}{2} - mg = 0 \Rightarrow m = 1 \text{ kg}$$

β) Από την ισορροπία των δυνάμεων για τη ράβδο στους δύο άξονες έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = T_x \Rightarrow F_x = T \sin 30^\circ \Rightarrow F_x = 40\sqrt{3} \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y = F_y + Mg + F'_{ελ.} \Rightarrow$$

$$T \eta \mu 30^\circ = F_y + Mg + mg \Rightarrow F_y = 10 \text{ N}$$

Το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση στο σημείο Α είναι:

$$F_A = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F_A = 70 \text{ N}$$

Για την εφαπτομένη της γωνίας θ που σχηματίζει ο φορέας αυτής με τη διεύθυνση της ράβδου έχουμε:

$$\varepsilon \varphi \theta = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \varepsilon \varphi \theta = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

γ) $K = m\omega^2 \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα Σ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του η ταχύτητα v_0 θα αποτελεί τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης που θα εκτελέσει. Ισχύει:

$$v_0 = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_0}{\omega} \Rightarrow A = 0,1 \text{ m}$$

Η χρονική εξίσωση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης του σώματος Σ είναι (για την αρχική φάση της ταλάντωσης έχουμε $\varphi_0 = 0$):

$$U = E \eta \mu^2 (\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$U = \frac{1}{2} K A^2 \eta \mu^2 (\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$U = 0,5 \eta \mu^2 10 t \text{ (S.I.)}$$

δ) Σε τυχαία θέση της ταλάντωσης του σώματος Σ με $x > 0$ έχουμε:

$$\Sigma F = -kx \Rightarrow mg - F_{ελ.} = -kx \Rightarrow$$

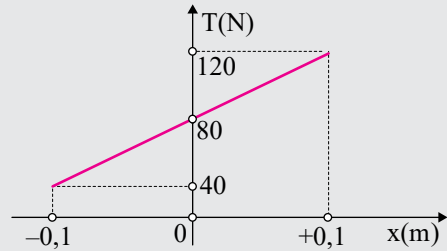
$$F_{ελ.} = 10 + 100x \text{ (S.I.)}$$

Η ράβδος εξακολουθεί να ισορροπεί κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος Σ οπότε:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow T_y \frac{L}{2} - Mg \frac{L}{2} - F'_{ελ.} L = 0 \xrightarrow{F_{ελ.} = F_{ελ.} = 10 + 100x}$$

$$T \eta \mu 30^\circ \frac{1}{2} - Mg \frac{1}{2} - F_{ελ.} = 0 \Rightarrow$$

$$T = 80 + 400x \text{ (S.I.) με } -0,1 \text{ m} \leq x \leq +0,1 \text{ m}$$



ε) Για να μη χαλαρώνει το νήμα πρέπει $T \geq 0 \Rightarrow 80 + 400x \geq 0 \Rightarrow x \geq -0,2 \text{ m}$

Οπότε $x_{\max} = 0,2 \text{ m}$.

Έτσι για τη μέγιστη ταχύτητα με την οποία πρέπει να εκτοξεύσουμε το σώμα Σ έτσι ώστε το νήμα που είναι δεμένο στη ράβδο οριακά να μην χαλαρώνει είναι:

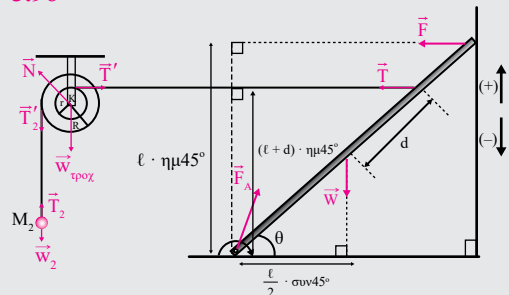
$$v_{0(\max)} = \omega x_{\max} \Rightarrow v_{0(\max)} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η ράβδος δέχεται τη μέγιστη δύναμη από το νήμα όταν το σώμα Σ βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης του. Επειδή αυτό οριακά δεν σπάει, αυτή η τιμή θα είναι και το όριο θραύσεώς του.

$$T_{\theta p.} = T_{(+A)} = 80 + 400 \cdot (+0,2) \Rightarrow$$

$$T_{\theta p.} = 160 \text{ N}$$

3.96



α) Το όλο σύστημα ισορροπεί, άρα για το σώμα μάζας m_2 ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow T_2 = w_2 = m_2 g \Rightarrow T_2 = 30 \text{ N}$$

Από τον 3ο Νόμο Νεύτωνα και αφού το νήμα είναι αβαρές ισχύει $|T_2| = |T'_2| = 30 \text{ N}$

Τροχαλία:

$$\Sigma \vec{\tau}_{(K)} = 0 \Rightarrow T'_2 R - T' r = 0 \Rightarrow$$

$$T'_2 \cdot 2r = T' \cdot r \Rightarrow T' = 60 \text{ N}$$

Από τον 3ο Νόμο του Νεύτωνα και αφού το νήμα είναι αβαρές ισχύει $|T'| = |T| = 60 \text{ N}$

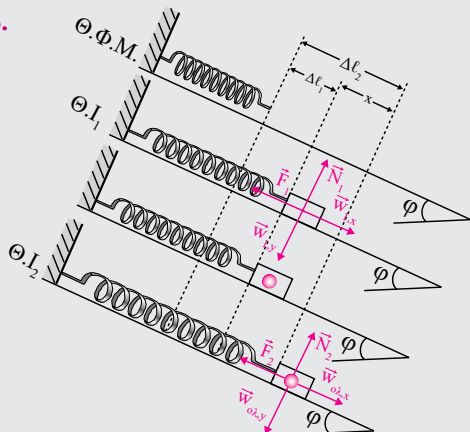
Ράβδος:

$$\Sigma \vec{\tau}_{(A)} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_w + \vec{\tau}_T + \vec{\tau}_F = 0 \Rightarrow$$

$$-w \frac{1}{2} \sin 45^\circ + T \left(\frac{1}{2} + d \right) \eta \mu 45^\circ + F \eta \mu 45^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$F = 10 \text{ N}$$

β.



$$\Theta.I.1: \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_1 = w_{1x} \Rightarrow$$

$$k \Delta l_1 = m_1 g \eta \mu 30^\circ \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{1}{20} \text{ m}$$

$$\Theta.I.2: \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_2 = w_{2x} \Rightarrow$$

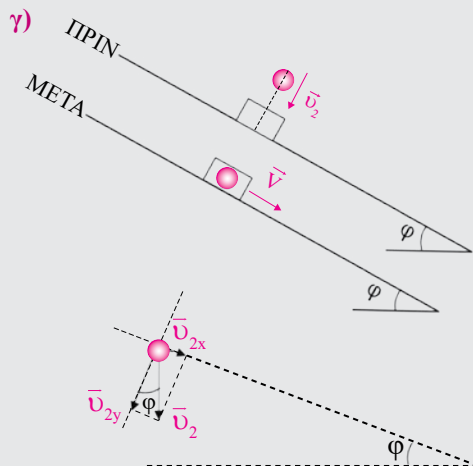
$$k \Delta l_2 = (m_1 + m_2) g \eta \mu 30^\circ \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{4}{20} \text{ m}$$

$$x = \Delta l_2 - \Delta l_1 \Rightarrow x = \frac{3}{20} \text{ m}$$

$$E = K + U \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 + \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) V^2}{k} + x^2} \Rightarrow A = 0,3 \text{ m}$$



$$v_{2x} = v_2 \eta \mu \phi$$

Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης της ορμής (ΑΔΟ) στον x x άξονα:

$$\vec{p}_{\text{ολ. (πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ. (μετά)}} \Rightarrow$$

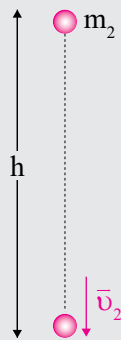
$$m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) V \Rightarrow v_{2x} = \sqrt{3} \frac{m}{s}$$

$$v_{2x} = v_2 \eta \mu \phi \Rightarrow v_2 = 2\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

Από τις εξισώσεις της ελεύθερης πτώσης ισχύει ότι:

$$v_2 = gt \Rightarrow t = \frac{2\sqrt{3}}{10} \text{ s}$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow h = 0,6 \text{ m}$$



2ος τρόπος

Η παραπάνω κίνηση μπορεί να μελετηθεί είτε με το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας (ΘΜΚΕ) είτε με την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (ΑΔΜΕ).

δ) Ο λόγος του μέτρου της δύναμης του ελατηρίου προς το μέτρο της δύναμης επαναφοράς στη θέση της μέγιστης επιμήκυνσης του ελατηρίου είναι:

$$\frac{F_{\text{ελmax}}}{F_{\text{επmax}}} = \frac{k(\Delta l_2 + A)}{kA} = \frac{5}{3}$$

Κεφάλαιο 4: Κύματα

ΘΕΜΑ Α

- 4.1 γ) 4.2 γ) 4.3 β) 4.4 γ)
 4.5 δ) 4.6 γ) 4.7 δ) 4.8 α)
 4.9 γ) 4.10 α) 4.11 γ) 4.12 α)
 4.13 α) 4.14 α) 4.15 α) 4.16 δ)
 4.17 δ) 4.18 δ) 4.19 β) 4.20 α)
 4.21 δ) 4.22 γ) 4.23 β) 4.24 γ)
 4.25 β) 4.26 β) 4.27 γ) 4.28 δ)
 4.29 γ) 4.30 δ) 4.31 γ) 4.32 γ)
 4.33 γ)

- 4.34 α) Σ, β) Σ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ
 4.35 α) Λ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ
 4.36 α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ
 4.37 α) Λ, β) Λ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ
 4.38 α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ
 4.39 α) Σ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ
 4.40 α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

4.41 Σωστή απάντηση είναι η α).

Για την ταχύτητα διάδοσης του αρμονικού κύματος ισχύει:

$$v_{\delta} = \lambda \cdot f \quad (1)$$

Για την μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου ισχύει:

$$v_{\max} = \omega \cdot A \quad (2)$$

Διαιρούμε τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλην, οπότε, παίρνουμε:

$$\frac{v_{\delta}}{v_{\max}} = \frac{\lambda \cdot f}{\omega \cdot A} \stackrel{\omega=2\pi f}{=} \frac{\lambda \cdot f}{2\pi f \cdot A} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot A} \stackrel{\lambda=4A}{=} \frac{4A}{2\pi \cdot A} \Rightarrow \frac{v_{\delta}}{v_{\max}} = \frac{2}{\pi}$$

4.42 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Από το διάγραμμα έχουμε για $x = 0$, $\varphi = 4\pi \text{ rad}$.

Ισχύει:

$$4\pi = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - 0 \right) \Rightarrow t_1 = 2T$$

Επίσης, έχουμε για $x = 4 \text{ m}$, $\varphi = 0$. Προκύπτει:

$$0 = 2\pi \left(\frac{2T}{T} - \frac{4}{\lambda} \right) \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Έχουμε:

$$\Delta x = k\lambda \Rightarrow x_{\Sigma} - 0 = \lambda \Rightarrow x_{\Sigma} = 2 \text{ m}$$

Για την απομάκρυνση του Σ, τη χρονική στιγμή t_1 , τελικά έχουμε:

$$y_{\Sigma} = A \sin 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_{\Sigma}}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y_{\Sigma} = A \sin 2\pi \left(\frac{2T}{T} - \frac{2}{2} \right) \Rightarrow y_{\Sigma} = 0$$

4.43 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$y_K = 0,4 \sin(2\pi t - 16\pi) \Rightarrow$$

$$y_K = 0,4 \sin 2\pi(t - 8) \text{ (S.I.)}$$

Συγκρίνοντας με τη γενική εξίσωση του κύματος

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \text{ προκύπτει:}$$

$$\frac{t}{T} = t \Rightarrow T = 1 \text{ s}$$

Για το μήκος κύματος λ έχουμε:

$$\lambda = v_{\delta} T \Rightarrow \lambda = 0,5 \text{ m}$$

Προκύπτει:

$$\frac{x_K}{\lambda} = 8 \Rightarrow x_K = 4 \text{ m}$$

Τελικά έχουμε:

$$x_{\Sigma} < (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{2} < x_K \Rightarrow$$

$$2 < (2\kappa + 1) \cdot 0,25 < 4 \Rightarrow 3,5 < \kappa < 7,5$$

Επομένως $\kappa = 4, 5, 6, 7$ και άρα, υπάρχουν 4 σημεία που είναι σε αντίθεση φάσης με την πηγή.

4.44 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Ισχύει:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi_{t_1} = 2\pi \left(\frac{0,5}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

Από το διάγραμμα έχουμε για $x = 0$, $\varphi_{t_1} = 4\pi \text{ rad}$. Ισχύει:

$$4\pi = 2\pi \frac{0,5}{T} \Rightarrow T = 0,25 \text{ s}$$

Επίσης, έχουμε για $x = -8 \text{ m}$, $\varphi_{t_1} = 0$. Προκύπτει:

$$0 = 2\pi \left(\frac{0,5}{0,25} - \frac{8}{\lambda} \right) \Rightarrow \lambda = 4 \text{ m}$$

Επομένως, η φάση του κύματος θα είναι:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{0,25} + \frac{x}{4} \right) (\text{S.I.})$$

Η φάση του σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 θα είναι:

$$\varphi_K = 2\pi \left(\frac{0,5}{0,25} + \frac{2}{4} \right) \Rightarrow \varphi_K = 5\pi \text{ rad}$$

4.45 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi_{t_1} = 2\pi \left(\frac{4}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) (1)$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $x = 0$ και $\varphi_{t_1} = 8\pi \text{ rad}$, έχουμε:

$$8\pi = \frac{8\pi}{T} \Rightarrow T = 1 \text{ s}$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $x = 0,5 \text{ m}$ και $\varphi_{t_1} = 3\pi \text{ rad}$, έχουμε:

$$3\pi = 2\pi \left(\frac{4}{1} - \frac{0,5}{\lambda} \right) \Rightarrow \lambda = 0,2 \text{ m}$$

Ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{v_{\max}}{v_{\delta}} = \frac{\omega A}{\lambda f} \Rightarrow \frac{v_{\max}}{v_{\delta}} = \frac{\frac{2\pi}{T} A}{\lambda \frac{1}{T}} \Rightarrow$$

$$\frac{v_{\max}}{v_{\delta}} = \frac{2\pi \cdot 0,4}{0,2} \Rightarrow \frac{v_{\max}}{v_{\delta}} = 4\pi$$

4.46 Σωστή απάντηση είναι η α).

Για τη φάση του Σ έχουμε:

$$\varphi_{\Sigma} = (10 \cdot 2\pi) \text{ rad} \Rightarrow \varphi_{\Sigma} = 20\pi \text{ rad}$$

Για τη φάση του Λ έχουμε:

$$\varphi_{\Lambda} = (5 \cdot 2\pi) \text{ rad} \Rightarrow \varphi_{\Lambda} = 10\pi \text{ rad}$$

Προκύπτει:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow \varphi_{\Sigma} - \varphi_{\Lambda} = 2\pi \frac{(x_{\Lambda} - x_{\Sigma})}{\lambda} \Rightarrow$$

$$x_{\Lambda} = x_{\Sigma} + \frac{\lambda(\varphi_{\Sigma} - \varphi_{\Lambda})}{2\pi} \Rightarrow$$

$$x_{\Lambda} = 3\lambda + \frac{\lambda(20\pi - 10\pi)}{2\pi} \Rightarrow x_{\Lambda} = 8\lambda$$

4.47 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Ισχύει:

$$\varphi_{\Sigma} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{\Sigma}}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi_{\Sigma} = 2\pi \frac{t}{T} - \frac{4\pi}{\lambda} (1)$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $t = 0$ και $\varphi_{\Sigma} = -2\pi \text{ rad}$, έχουμε:

$$-2\pi = -\frac{4\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $t = 0,5 \text{ s}$ και $\varphi_{\Sigma} = 0$, έχουμε:

$$0 = 2\pi \frac{0,5}{T} - \frac{4\pi}{2} \Rightarrow T = 0,5 \text{ s}$$

Η εξίσωση του κύματος είναι η:

$$y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,2 \eta \mu 2\pi (2t - 0,5x) (\text{S.I.})$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_{\delta} = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_{\delta} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

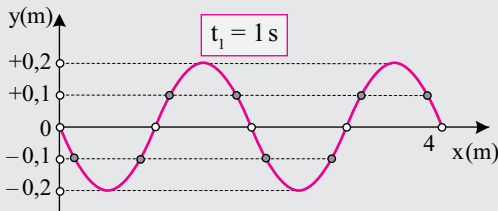
Το κύμα τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα έχει διαδοθεί κατά απόσταση:

$$d_1 = v_{\delta} t_1 \Rightarrow d_1 = 4 \text{ m}$$

Ισχύει:

$$\frac{d_1}{\lambda} = \frac{4}{2} \Rightarrow d_1 = 2\lambda$$

Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 :



Από το στιγμιότυπο προκύπτει ότι τα σημεία του μέσου που απέχουν απόσταση 0,1 m από τη θέση ισορροπίας τους είναι 8.

4.48 Σωστή απάντηση είναι η β).

Για το κομμάτι φελλού στο Λ ισχύει:

$$|r_1 - r_2| = |v_\delta t_1 - v_\delta t_2| = v_\delta |t_1 - t_2| \Rightarrow$$

$$|r_1 - r_2| = v_\delta \cdot \Delta t \Rightarrow |r_1 - r_2| = \frac{\lambda}{T} \cdot T \Rightarrow$$

$$|r_1 - r_2| = \lambda$$

Επομένως, το Λ είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής και θα ισχύει: $A_\Lambda = 2A$

Όμοια, για το πλάτος του Μ (επειδή είναι μέσο) θα έχουμε $A_M = 2A$.

Προκύπτει:

$$\frac{K_{\max, \Lambda}}{K_{\max, M}} = \frac{\frac{1}{2} m v_{\max, \Lambda}^2}{\frac{1}{2} m v_{\max, M}^2} \Rightarrow$$

$$\frac{K_{\max, \Lambda}}{K_{\max, M}} = \frac{(\omega \cdot 2A)^2}{(\omega \cdot 2A)^2} \Rightarrow \frac{K_{\max, \Lambda}}{K_{\max, M}} = 1$$

4.49 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$|r_2 - r_1| = (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2 \cdot x = (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $N = 0$ προκύπτει:

$$x = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow x = \frac{v_\delta}{4f} \Rightarrow$$

$$f = \frac{v_\delta}{4x} \Rightarrow f = 1700 \text{ Hz}$$

4.50 Σωστή απάντηση είναι η β).

Από το διάγραμμα προκύπτει:

$$\Delta x_{\Sigma Z} = 1,25\lambda$$

Ισχύει:

$$\Delta \phi_{\Sigma Z} = 2\pi \frac{\Delta x_{\Sigma Z}}{\lambda} \Rightarrow \Delta \phi_{\Sigma Z} = \left(2\pi \frac{1,25\lambda}{\lambda} \right) \text{ rad} \Rightarrow$$

$$\Delta \phi_{\Sigma Z} = 2,5\pi \text{ rad}$$

Προκύπτει ότι:

$$y_\Sigma = A \eta \mu \phi_\Sigma \Rightarrow \frac{\sqrt{3}A}{2} = A \eta \mu \phi_\Sigma \Rightarrow \eta \mu \frac{\pi}{3} = \eta \mu \phi_\Sigma$$

$$\text{Επειδή } v_\Sigma < 0 \text{ έχουμε } \phi_\Sigma = 2\pi\kappa + \frac{2\pi}{3}$$

Υπολογίζουμε τη φάση του Ζ τη χρονική στιγμή t_2 . Έχουμε:

$$\Delta \phi_{\Sigma Z} = \phi_Z - \phi_\Sigma \Rightarrow \phi_Z = \phi_\Sigma + \Delta \phi_{\Sigma Z} \Rightarrow$$

$$\phi_Z = 2\pi\kappa + \frac{2\pi}{3} + 2,5\pi$$

Τελικά καταλήγουμε:

$$y_Z = A \eta \mu \phi_Z \Rightarrow$$

$$y_Z = A \eta \mu \left(2\pi\kappa + \frac{2\pi}{3} + 2,5\pi \right) \Rightarrow y_Z = -\frac{A}{2}$$

4.51 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Ισχύει:

$$r_2^2 = r_1^2 + d^2 \Rightarrow r_2 = \sqrt{r_1^2 + d^2} \Rightarrow$$

$$r_2 = \sqrt{4 \cdot \lambda^2 + \frac{9 \cdot \lambda^2}{4}} \Rightarrow r_2 = 2,5\lambda$$

Για το σημείο Μ ισχύει:

$$\frac{r_1 - r_2}{\lambda} = \frac{2\lambda - 2,5\lambda}{\lambda} \Rightarrow r_1 - r_2 = -\frac{\lambda}{2}$$

Επομένως το Μ είναι σημείο ακυρωτικής συμβολής (με $N = -1$) και το πλάτος του μετά τη χρονική στιγμή t_2 θα είναι ίσο με μηδέν.

4.52 Σωστή απάντηση είναι η α).

Έστω ότι το Κ απέχει r_1 από την πηγή Π_1 και r_2 από την πηγή Π_2 .

Ισχύει:

$$r_1 + r_2 = d \quad (1)$$

Και:

$$r_1 - r_2 = N\lambda \Rightarrow r_1 - r_2 = 2\lambda \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$2r_1 = d + 2\lambda \Rightarrow d = 2r_1 - 2\lambda \Rightarrow$$

$$d = 1,5 \text{ m} - 0,5 \text{ m} \Rightarrow d = 1 \text{ m}$$

4.53 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Ισχύει:

$$y = 2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow$$

$$0,1\sqrt{3} = 2A \sin 2\pi \frac{0}{\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \frac{\frac{T}{6}}{T} \Rightarrow$$

$$0,1\sqrt{3} = 2A \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$A = 0,1 \text{ m}$$

Για τη θέση του σημείου Z έχουμε:

$$x_z = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{6} \Rightarrow x_z = \frac{11\lambda}{12}$$

Το πλάτος του Z είναι:

$$A_z = \left| 2A \sin 2\pi \frac{x_z}{\lambda} \right| \Rightarrow A_z = \left| 2A \sin 2\pi \frac{11\lambda}{12} \right| \Rightarrow$$

$$A_z = \sqrt{3}A \Rightarrow A = 0,1\sqrt{3} \text{ m}$$

4.54 Σωστή απάντηση είναι η β).

Για το σημείο M ισχύει:

$$x_M = \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \right) - \frac{\lambda}{12} \Rightarrow x_M = \frac{8\lambda}{12}$$

Το πλάτος του M είναι:

$$A_M = \left| 2A \sin 2\pi \frac{x_M}{\lambda} \right| \Rightarrow A_M = \left| 2A \sin 2\pi \frac{12}{\lambda} \right| \Rightarrow$$

$$A_M = A$$

Για το σημείο N ισχύει:

$$x_N = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{6} \Rightarrow x_N = \frac{11\lambda}{12}$$

Το πλάτος του N είναι:

$$A_N = \left| 2A \sin 2\pi \frac{x_N}{\lambda} \right| \Rightarrow A_N = \left| 2A \sin 2\pi \frac{11\lambda}{12} \right| \Rightarrow$$

$$A_N = \sqrt{3}A$$

Προκύπτει τελικά:

$$\frac{E_M}{E_N} = \frac{\frac{1}{2}DA_M^2}{\frac{1}{2}DA_N^2} \Rightarrow \frac{E_M}{E_N} = \left(\frac{A}{\sqrt{3}A} \right)^2 \Rightarrow \frac{E_M}{E_N} = \frac{1}{3}$$

4.55 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Για τη θέση του σημείου Σ έχουμε:

$$x_\Sigma = \frac{4\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{6} \Rightarrow x_\Sigma = \frac{25\lambda}{12}$$

Το πλάτος του Σ θα είναι:

$$A_\Sigma = \left| 2A \sin 2\pi \frac{x_\Sigma}{\lambda} \right| \Rightarrow A_\Sigma = \left| 2A \sin 2\pi \frac{25\lambda}{12} \right| \Rightarrow$$

$$A_\Sigma = \sqrt{3}A$$

Τελικά έχουμε:

$$\alpha_{\max, \Sigma} = \omega^2 A_\Sigma \Rightarrow \alpha_{\max, \Sigma} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \sqrt{3}A \Rightarrow$$

$$\alpha_{\max, \Sigma} = \frac{4\sqrt{3}\pi^2}{T^2} A$$

4.56 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Για το γραμμικό ελαστικό μέσο 1 έχουμε:

$$L = \frac{6\lambda_1}{2} \Rightarrow L = 3\lambda_1 \quad (1)$$

Για το γραμμικό ελαστικό μέσο 2 έχουμε:

$$\frac{L}{4} = \frac{4\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2}{4} \Rightarrow L = 9\lambda_2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$3\lambda_1 = 9\lambda_2 \Rightarrow \frac{v_\delta}{f_1} = 3 \frac{v_\delta}{f_2} \Rightarrow f_2 = 3f_1$$

4.57 Σωστή απάντηση είναι η β).

Η γωνιακή συχνότητα είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για το πλάτος του σημείου K, θα ισχύει:

$$A_K = \left| 2A \sin 2\pi \frac{x_K}{\lambda} \right| \Rightarrow A_K = \left| 2A \sin 2\pi \frac{\lambda/8}{\lambda} \right| \Rightarrow A_K = \sqrt{2}A$$

Προκύπτει:

$$v_{\max, K} = \omega A_K \Rightarrow v_{\max, K} = \omega \sqrt{2}A \Rightarrow$$

$$A = \frac{v_{\max, K}}{\omega \sqrt{2}} \Rightarrow A = 0,5 \text{ m}$$

Για το πλάτος της επιτάχυνσης του σημείου στο O θα έχουμε:

$$\alpha_{\max, O} = \omega^2 A_O \Rightarrow \alpha_{\max, O} = 16\pi^2 \cdot 2A \Rightarrow$$

$$\alpha_{\max, O} = 16\pi^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

4.58 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Ισχύει:

$$\Delta x_{MN} = \frac{3\lambda}{2} \Rightarrow \Delta x_{MN} = 1,2 \text{ m}$$

Τα σημεία M, N έχουν διαφορά φάσης $\pi \text{ rad}$.

Προκύπτει:

$$d = \sqrt{(2A)^2 + (\Delta x_{MN})^2} \Rightarrow d = 1,3 \text{ m}$$

4.59 Σωστή απάντηση είναι η β).

Ισχύει αρχικά:

$$L = N \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{N} \Rightarrow \lambda = \left(\frac{2 \cdot 2}{8} \right) \text{ m} \Rightarrow \lambda = 0,5 \text{ m}$$

Ισχύει τελικά:

$$L = N' \frac{\lambda'}{2} \Rightarrow \lambda' = \frac{2L}{N'} \Rightarrow \lambda' = \left(\frac{2 \cdot 2}{4} \right) \text{ m} \Rightarrow \lambda' = 1 \text{ m} = 2\lambda$$

Προκύπτει:

$$\lambda f = \lambda' f' \Rightarrow \lambda f = 2\lambda f' \Rightarrow f' = \frac{f}{2}$$

Τελικά, έχουμε:

$$\Pi(\%) = \frac{f - f'}{f} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = \frac{f - \frac{f}{2}}{f} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 50\%$$

4.60 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$y_K = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x_K}{\lambda} \text{ ημ} 2\pi f t \Rightarrow$$

$$y_K = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{\frac{2\lambda}{3}}{\lambda} \text{ ημ} 2\pi f t \Rightarrow$$

$$y_K = 2A \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \text{ ημ} 2\pi f t \Rightarrow$$

$$y_K = -A \text{ ημ} 2\pi f t \Rightarrow y_K = A \text{ ημ} (2\pi f t + \pi)$$

Για την επιτάχυνση του σημείου K προκύπτει:

$$\alpha_K = -\omega^2 y_K \Rightarrow \alpha_K = -4\pi^2 f^2 A \text{ ημ} (2\pi f t + \pi) \Rightarrow$$

$$\alpha_K = 4\pi^2 f^2 A \text{ ημ} (2\pi f t)$$

4.61 Σωστή απάντηση είναι η β).

Ισχύει:

$$\frac{t}{T} = 12 \cdot 10^{10} t \Rightarrow T = \frac{1}{12 \cdot 10^{10}} \text{ s}$$

Επίσης, έχουμε:

$$\frac{x}{\lambda} = 6 \cdot 10^4 x \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6 \cdot 10^4} \text{ m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

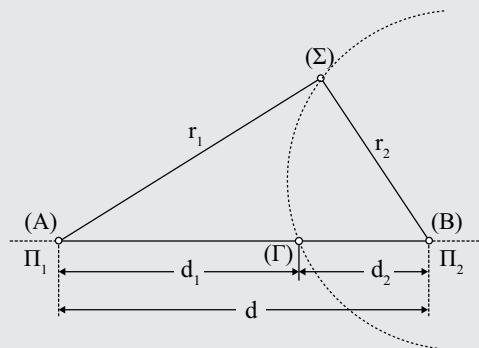
Τελικά προκύπτει:

$$\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = v_\delta \Rightarrow E_{\max} = B_{\max} v_\delta \Rightarrow$$

$$E_{\max} = (5 \cdot 10^{-10} \cdot 2 \cdot 10^6) \frac{\text{V}}{\text{m}} \Rightarrow$$

$$E_{\max} = 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

4.62 Σωστή απάντηση είναι η α).



Για το σημείο Σ ισχύει:

$$r_1 - r_2 = 3\lambda - \lambda \Rightarrow r_1 - r_2 = 2\lambda.$$

Παρατηρούμε ότι η διαφορά των αποστάσεων του σημείου Σ από τις πηγές είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος επομένως το σημείο Σ ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος $2A$. Η υπερβολή ενίσχυσης $N = 2$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα (AB) στο σημείο Γ.

Για το σημείο Γ ισχύει:

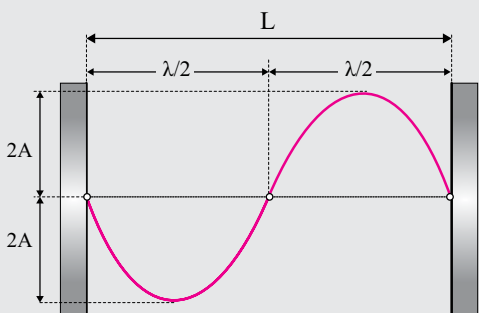
$$d_1 - d_2 = 2\lambda \Rightarrow d_1 - (d - d_1) = 2\lambda \Rightarrow$$

$$2d_1 - d = 2\lambda \Rightarrow d = 2d_1 - 2\lambda \Rightarrow$$

$$d = 2 \cdot \frac{11\lambda}{4} - 2\lambda \Rightarrow d = 3,5\lambda$$

4.63 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ανάμεσα στα άκρα της χορδής μήκους L εμφανίζονται αρχικά 2 σημεία τα οποία ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος $2A$, δηλαδή 2 κοιλίες. Επειδή τα άκρα της χορδής είναι ακλόνητα στερεωμένα, αυτά είναι αναγκαστικά δεσμοί. Η μορφή της χορδής φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Για το αρχικό μήκος κύματος λ των δύο αντίθετα διαδιδόμενων αρμονικών κυμάτων έχουμε:

$$v_\delta = \lambda \cdot f \Rightarrow f = \frac{v_\delta}{\lambda} \quad (1)$$

Για το μήκος της χορδής L ισχύει:

$$L = 2 \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (2)$$

Αν τριπλασιάσουμε τη συχνότητα των δύο αντίθετα διαδιδόμενων αρμονικών κυμάτων, για το τελικό μήκος κύματος λ' έχουμε:

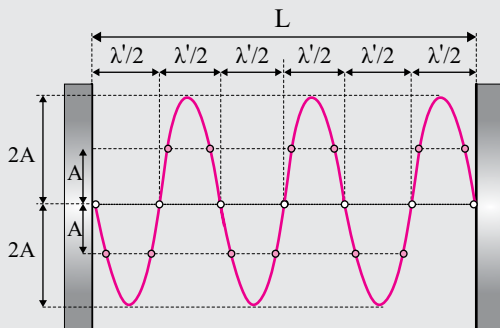
$$v_\delta = \lambda' \cdot f' \Rightarrow v_\delta = \lambda' \cdot 3f \Rightarrow v_\delta = \lambda' \cdot 3 \cdot \frac{v_\delta}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\lambda' = \frac{\lambda}{3} \Rightarrow \lambda = 3\lambda' \quad (3)$$

Το μήκος της χορδής L , σε συνάρτηση με το τελικό μήκος κύματος λ' , είναι:

$$(2) \Rightarrow L = 2 \cdot \frac{3\lambda'}{2} \Rightarrow L = 6 \cdot \frac{\lambda'}{2}$$

Η μορφή της χορδής μετά τον τριπλασιασμό της συχνότητας των δύο αντίθετα διαδιδόμενων αρμονικών κυμάτων φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Ο αριθμός των σημείων ανάμεσα στα άκρα της χορδής που ταλαντώνονται με πλάτος A , είναι 12, όπως φαίνεται από το σχήμα.

4.64 Σωστή απάντηση είναι η α).

Συγκρίνοντας τον γενικό τύπο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος με τον τύπο που δίνεται, προκύπτουν τα εξής:

$$E_{\max} = 0,2 \frac{V}{m}, \quad f = 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\text{καί } \lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής υπολογίζουμε την ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

$$v = \lambda \cdot f = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα αυτή είναι ίση με την ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο κενό.

Για το μήκος κύματος της ακτινοβολίας ισχύει $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 500 \text{ nm}$.

Επειδή το μήκος κύματος του ορατού φωτός κυμαίνεται από 400 nm έως 700 nm, η ακτινοβολία αυτή ανήκει στο ορατό φάσμα.

4.65 Σωστή απάντηση είναι η β).

Παρατηρούμε ότι $x_{(\Lambda)} < x_{(K)}$, άρα, το κύμα φτάνει πρώτα στο σημείο (Λ) και έπειτα στο (Κ) οπότε, και ταλαντώνεται για περισσότερο χρόνο. Η απόσταση των δύο σημείων είναι:

$$x_{(K)} - x_{(\Lambda)} = 3\lambda - \frac{29\lambda}{12} = \frac{7\lambda}{12},$$

οπότε, το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το κύμα από τη στιγμή που φτάνει στο σημείο (Λ) και μέχρι να φτάσει στο σημείο (Κ) είναι $\Delta t = \frac{7T}{12}$.

Άρα, το σημείο (Κ) ταλαντώνεται για χρόνο κατά $\frac{7T}{12}$ λιγότερο από ότι το σημείο (Λ).

Όταν το σημείο (Λ) έχει διανύσει απόσταση $d_{(\Lambda)} = 10A$ θα έχει περάσει χρόνος 2,5T από τη στιγμή που έφτασε το κύμα σε αυτό καθώς σε κάθε περίοδο της ταλάντωσής του διανύει απόσταση 4A. Εκείνη τη στιγμή το σημείο (Κ) θα ταλαντώνεται για χρόνο:

$$\Delta t' = 2,5T - \frac{7T}{12} = \frac{23T}{12} = T + \frac{11T}{12} = T + \frac{3T}{4} + \frac{T}{6}$$

Το σημείο (Κ) θα βρίσκεται στη θέση:

$$\begin{aligned} y_{(K)} &= A \eta \mu(\omega \cdot \Delta t') = A \eta \mu\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{23T}{12}\right) = \\ &= A \eta \mu \frac{23\pi}{6} = A \eta \mu\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{A}{2} \end{aligned}$$

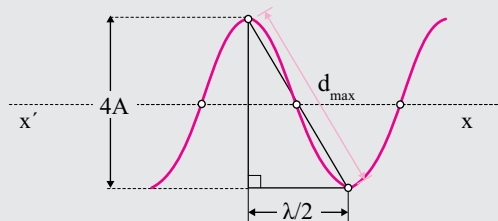
Άρα, το σημείο (Κ) θα έχει διανύσει απόσταση από τη στιγμή που ξεκίνησε την ταλάντωσή του:

$$d_{(K)} = 4A + 3A + \frac{A}{2} = 7,5A$$

4.66 Σωστή απάντηση είναι η β).

Η απόσταση των ακραίων θέσεων της ταλάντωσης των σημείων που είναι κοιλίες είναι 4A, όπου A το πλάτος ταλάντωσης των κυμάτων, η συμβολή των οποίων, έδωσε το στάσιμο. Δύο διαδοχικές κοιλίες απέχουν μεταξύ τους απόσταση $\lambda/2$.

Δύο διαδοχικές κοιλίες του στάσιμου κύματος απέχουν τη μέγιστη απόσταση μεταξύ τους, όταν θα βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους. Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα, όπως φαίνεται και στο σχήμα, έχουμε:



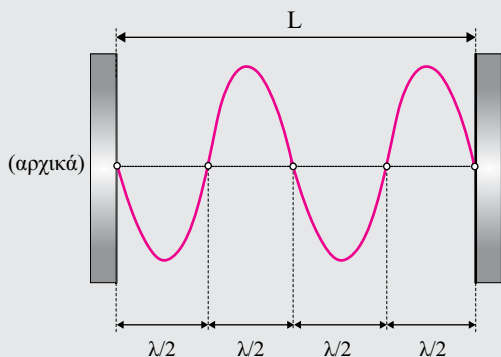
$$\begin{aligned} d_{\max}^2 &= \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + (4A)^2 \Rightarrow \frac{\lambda^2 \cdot 10}{4} = \frac{\lambda^2}{4} + 16A^2 \Rightarrow \\ \frac{9\lambda^2}{4} &= 16A^2 \Rightarrow \frac{3\lambda}{2} = 4A \Rightarrow \\ \lambda &= \frac{8A}{3} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{\max(\text{κοιλίας})}}{v_{\delta}} &= \frac{\omega \cdot 2A}{\lambda \cdot f} = \frac{2\pi f \cdot 2A}{\lambda \cdot f} = \\ &= \frac{4\pi A}{\lambda} \stackrel{\lambda = \frac{8A}{3}}{\sim} \frac{4\pi A}{\frac{8A}{3}} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

4.67 Σωστή απάντηση είναι η β).

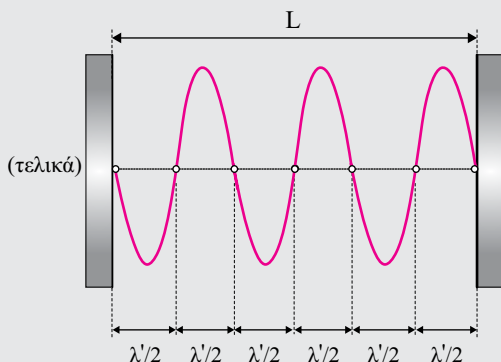
Αρχικά, αφού στη χορδή σχηματίζονται πέντε συνολικά δεσμοί, για το μήκος της L θα ισχύει όπως φαίνεται και στο αρχικό σχήμα:

$$L = 4 \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$



Όταν μεταβάλλουμε τη συχνότητα της διέγερσης αφού δημιουργούνται 2 επιπλέον δεσμοί, η νέα μορφή της χορδής θα φαίνεται στο τελικό σχήμα και θα ισχύει:

$$L = 6 \cdot \frac{\lambda'}{2} \quad (2)$$



Επειδή το μήκος της χορδής δεν αλλάζει, απ' τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$4 \cdot \frac{\lambda}{2} = 6 \cdot \frac{\lambda'}{2} \Rightarrow \lambda' = \frac{2\lambda}{3} \Rightarrow \frac{v_\delta}{f'} = \frac{2v_\delta}{3f} \Rightarrow f' = \frac{3f}{2}$$

Η ποσοστιαία μεταβολή της συχνότητας της διέγερσης είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{f} \cdot 100\% &= \frac{f' - f}{f} \cdot 100\% = \left(\frac{f'}{f} - 1 \right) \cdot 100\% = \\ &= \left(\frac{3f}{2} - 1 \right) \cdot 100\% = 50\% \end{aligned}$$

4.68 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Αφού το σημείο Σ διπλασιάζει το πλάτος της ταλάντωσής του όταν φτάνει σε αυτό και το κύμα από την πηγή Π₂, τότε στο σημείο αυτό έχουμε ενισχυτική συμβολή. Άρα, για τη διαφορά των αποστάσεών του από τις δύο πηγές Π₁ και Π₂ ισχύει:

$$|r_1 - r_2| = N\lambda$$

Επιπλέον, αφού το πλάτος του σημείου Σ διπλασιάζεται μετά από χρονικό διάστημα δύο περιόδων από τη χρονική στιγμή που ξεκίνησε την ταλάντωσή του, η διαφορά των αποστάσεών του από τις δύο πηγές Π₁ και Π₂ είναι 2λ. Άρα:

$$|r_1 - r_2| = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 1 \text{ m}$$

Για την αρχική συχνότητα f των κυμάτων που διαδίδονται στο υγρό έχουμε:

$$v_\delta = \lambda \cdot f \Rightarrow f = \frac{v_\delta}{\lambda} = 2 \text{ Hz}$$

Για να παραμένει το σημείο Σ διαρκώς στη θέση ισορροπίας του, όταν τα δύο κύματα συμβάλλουν σε αυτό, θα πρέπει στο σημείο Σ να έχουμε απόσβεση. Άρα:

$$|r_1 - r_2| = (2N + 1) \frac{\lambda'}{2} \Rightarrow |r_1 - r_2| = (2N + 1) \frac{v_\delta}{2f'} \Rightarrow$$

$$f' = (2N + 1) \frac{v_\delta}{2|r_1 - r_2|}$$

$$f' = (2N + 1) \cdot \frac{1}{2} \quad (1)$$

Επειδή για τη συχνότητα f ισχύει $f' > f$, τότε πρέπει $N = 2$ ώστε το ποσοστό μεταβολής της να είναι ελάχιστο. Τελικά από τη σχέση (1) παίρνουμε $f' = 2,5 \text{ Hz}$.

Η ποσοστιαία μεταβολή της συχνότητας της διέγερσης είναι:

$$\frac{\Delta f}{f} \cdot 100\% = \frac{f' - f}{f} \cdot 100\% = 25\%$$

4.69 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Η φάση του σημείου (Κ) σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$\varphi_{(K)} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{(K)}}{\lambda} \right) = \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_{(K)}}{\lambda} \quad x_{(K)} = +4\text{m} \Rightarrow$$

$$\varphi_{(K)} = \frac{2\pi t}{T} - \frac{8\pi}{\lambda} \quad (1)$$

Από το διάγραμμα προκύπτει:

$$(1) \quad \xrightarrow{t=0, \varphi_{(K)}=-10\pi\text{rad}} -10\pi = -\frac{8\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 0,8\text{ m}$$

$$(1) \quad \xrightarrow{t=1\text{ s}, \varphi_{(K)}=0} 0 = \frac{2\pi \cdot 1}{T} - \frac{8\pi}{0,8} \Rightarrow T = 0,2\text{ s}$$

Η εξίσωση του κύματος είναι:

$$y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow y = 0,6 \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{0,2} - \frac{x}{0,8} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,6 \eta \mu (10\pi t - 2,5\pi x) \text{ (S.I.)}$$

4.70 Σωστή απάντηση είναι η α).

Η φάση του σημείου (Κ) σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$\varphi_{(K)} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{(K)}}{\lambda} \right) \quad t=0,25\text{ s}, \varphi_{(K)}=0 \Rightarrow$$

$$0 = \frac{2\pi \cdot 0,25}{T} - \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 4T \quad (1)$$

Η φάση του σημείου (Λ) σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$\varphi_{(\Lambda)} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{(\Lambda)}}{\lambda} \right) \quad t=0, \varphi_{(\Lambda)}=-7\pi\text{ rad} \Rightarrow$$

$$-7\pi = -\frac{2\pi(x_{(K)} + \lambda)}{\lambda} \Rightarrow$$

$$7\lambda = 2(1 + \lambda) \Rightarrow \lambda = 0,4\text{ m}$$

$$(1) \Rightarrow T = 0,1\text{ s}$$

Για το σημείο (Γ) ισχύει:

$$\varphi_{(\Gamma)} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{(\Gamma)}}{\lambda} \right) \quad t_{\Gamma}, \varphi_{(\Gamma)}=0 \Rightarrow$$

$$0 = 2\pi \left(\frac{t_{\Gamma}}{0,1} - \frac{x_{(K)} + \lambda}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{t_{\Gamma}}{0,1} = \frac{1+0,4}{0,4} \Rightarrow t_{\Gamma} = 0,35\text{ s}$$

Για το σημείο (Ζ) ισχύει:

$$\varphi_{(Z)} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{(Z)}}{\lambda} \right) \quad t=0, \varphi_{(Z)} \Rightarrow \varphi_{(Z)} = -\frac{2\pi x_{(Z)}}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\varphi_{(Z)} = -\frac{2\pi \cdot 1}{0,4} \Rightarrow \varphi_{(Z)} = -5\pi\text{ rad}$$

4.71 Σωστή απάντηση είναι η α).

Έστω t_1 και t_2 οι χρονικές στιγμές που φτάνουν στο σημείο (Κ) τα κύματα που προέρχονται από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Αν v_{δ} η ταχύτητα με την οποία διαδίδονται τα δύο κύματα στο υγρό τότε ισχύει:

$$r_1 = v_{\delta} \cdot t_1 \quad \text{και} \quad r_2 = v_{\delta} \cdot t_2$$

$$\text{με } t_1 > t_2 \text{ αφού } r_1 > r_2.$$

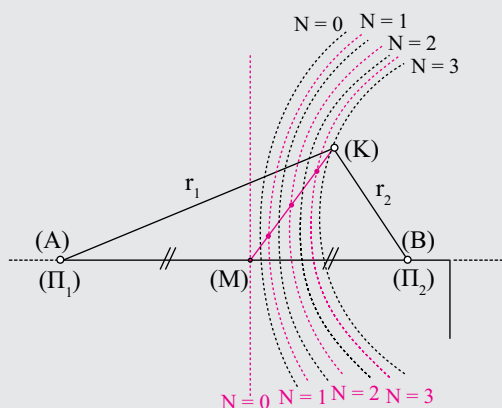
Μετά που θα συμβάλλουν και τα δύο κύματα στο σημείο (Κ), για τη διαφορά των αποστάσεων αυτού του σημείου $r_1 - r_2$ ισχύει:

$$r_1 - r_2 = v_{\delta} \cdot t_1 - v_{\delta} \cdot t_2 = v_{\delta} \cdot (t_1 - t_2) = v_{\delta} \cdot \Delta t \quad \Delta t = 3,5T$$

$$r_1 - r_2 = v_{\delta} \cdot 3,5T \Rightarrow r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{T} \cdot 3,5T \Rightarrow$$

$$r_1 - r_2 = 3,5\lambda = (2 \cdot 3 + 1) \frac{\lambda}{2}$$

Άρα, ικανοποιείται η συνθήκη της απόσβεσης $r_1 - r_2 = (2N + 1) \frac{\lambda}{2}$ με $N = 3$ στο σημείο (Κ) οπότε, αυτό μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων παραμένει διαρκώς ακίνητο. Το σημείο (Κ) βρίσκεται πάνω στην 4^η γραμμή απόσβεσης δεξιά της μεσοκαθέτου. Για να υπολογίσουμε τον αριθμό των σημείων που βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα (ΚΜ) και ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος, μετά που θα συμβάλλουν και τα δύο κύματα σε αυτά, σχεδιάζουμε τις γραμμές ενίσχυσης μεταξύ του σημείου (Κ) και (Μ) όπως φαίνεται στο σχήμα από όπου προκύπτει ότι τα σημεία αυτά είναι 4.



ΘΕΜΑ Γ

4.72 α) Η γενική μορφή της εξίσωσης του κύματος είναι:

$$y = A \cdot \eta \mu \pi \left(\frac{2t}{T} - \frac{2x}{\lambda} \right)$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση του κύματος με αυτήν που δίνεται στην εκφώνηση, για την περίοδο προκύπτει:

$$\frac{2t}{T} = 8t \Rightarrow T = 0,25 \text{ s}$$

Ενώ για το μήκος κύματος έχουμε:

$$\frac{2x}{\lambda} = 0,5x \Rightarrow \lambda = 4 \text{ m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

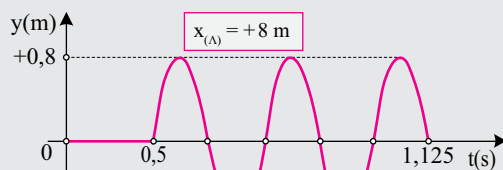
Το κύμα σε χρονική διάρκεια Δt διανύει απόσταση:

$$d = v_\delta \cdot \Delta t \Rightarrow d = 8 \text{ m}$$

β) Το σημείο Λ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$$t_\Lambda = \frac{x_\Lambda}{v_\delta} \Rightarrow t_\Lambda = 0,5 \text{ s}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι:



γ) Η χρονική στιγμή t_2 θα είναι:

$$t_2 = \frac{x_\Lambda}{v_\delta} + \frac{3T}{4} \Rightarrow t_2 = 0,6875 \text{ s}$$

Η φάση του σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$\varphi_{\kappa, t_2} = 8\pi t_2 - 0,5\pi x_\kappa \Rightarrow$$

$$\varphi_{\kappa, t_2} = 3,5\pi \text{ rad}$$

δ) Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στο συγκεκριμένο μέσο παραμένει σταθερή. Υπολογίζουμε την τιμή του μήκους κύματος του άλλου κύματος. Ισχύει:

$$\lambda f = \lambda' f' \Rightarrow \lambda' = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda' = 2 \text{ m}$$

Προκύπτει: $T' = \frac{T}{2}$ ή $T' = 0,125 \text{ s}$

Η εξίσωση του άλλου κύματος θα είναι:

$$y = A \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \frac{x}{\lambda'} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,8 \cdot \eta \mu 2\pi(8t + 0,5x) \text{ (S.I.)}$$

4.73 α) Ισχύει:

$$O\Lambda = 1,75\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{O\Lambda}{1,75} \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Προκύπτει:

$$OZ = 1,25\lambda \Rightarrow OZ = 1,25\lambda \Rightarrow OZ = 2,5 \text{ m}$$

Έχουμε:

$$\Delta\varphi_{\Lambda\Gamma} = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi_{\Lambda\Gamma} = 2\pi \frac{x_\Lambda - x_\Gamma}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi_{\Lambda\Gamma} = \pi \text{ rad}$$

β) Ισχύει:

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow v_{\max} = 2\pi f A \Rightarrow$$

$$f = \frac{v_{\max}}{2\pi A} \Rightarrow f = 1 \text{ Hz}$$

Έχουμε:

$$T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = 1 \text{ s}$$

Η εξίσωση του κύματος έχει τη μορφή:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi (t - 0,5x) \text{ (S.I.)}$$

γ) Βρίσκουμε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow v_\delta = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_1 :

$$t_1 = \frac{d_1}{v_\delta} \Rightarrow t_1 = 3 \text{ s}$$

Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_2 :

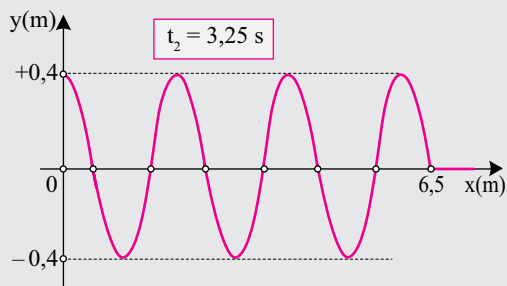
$$t_2 = t_1 + 0,25 \text{ s} \Rightarrow t_2 = 3,25 \text{ s}$$

Ισχύει:

$$d_2 = v_\delta t_2 \Rightarrow d_2 = 6,5 \text{ m}$$

Επίσης έχουμε:

$$\frac{d_2}{\lambda} = \frac{6,5 \text{ m}}{2 \text{ m}} \Rightarrow d_2 = 3,25 \lambda$$



δ) Για το σημείο Λ, τη χρονική στιγμή t_2 , ισχύει:

$$y_\Lambda = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi (3,25 - 0,5 \cdot 3,5) \Rightarrow y_\Lambda = 0$$

Για το σημείο Κ ισχύει $d_2 < OK$, επομένως το κύμα δεν έχει φτάσει ακόμα στο σημείο Κ επομένως:

$$y_K = 0$$

4.74 α) Στην εξίσωση της φάσης του κύματος

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \text{ για τη χρονική στιγμή } t_1, \text{ θέ-}$$

τουμε όπου $x = 0$ και $\varphi = 2\pi \text{ rad}$. Προκύπτει:

$$2\pi = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{0}{\lambda} \right) \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}$$

β) Ισχύει:

$$d = 2A \Rightarrow A = \frac{d}{2} \Rightarrow A = 0,1 \text{ m}$$

Στην εξίσωση της φάσης του κύματος

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \text{ για τη χρονική στιγμή } t_1, \text{ θέ-}$$

τουμε όπου $x = 4 \text{ m}$ και $\varphi = 0$. Προκύπτει:

$$0 = 2\pi \left(\frac{2}{2} - \frac{4}{\lambda} \right) \Rightarrow \lambda = 4 \text{ m}$$

Η εξίσωση του κύματος έχει τη μορφή:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi (0,5t - 0,25x) \text{ (S.I.)}$$

γ) Βρίσκουμε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Το σημείο Κ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_K :

$$t_K = \frac{x_K}{v_\delta} \Rightarrow t_K = 1 \text{ s}$$

Ισχύει:

$$t_2 = t_K + \frac{3T}{2} \Rightarrow t_2 = 4 \text{ s}$$

Η φάση της πηγής του κύματος τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$\varphi_0 = 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi_0 = 4\pi \text{ rad}$$

δ) Ισχύει:

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow \Delta t = NT \Rightarrow \Delta t = 4 \text{ s}$$

Το σημείο Z αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$$t_Z = \frac{x_Z}{v_\delta} \Rightarrow t_Z = 4 \text{ s}$$

Έχουμε:

$$\Delta t = t_3 - t_Z \Rightarrow t_3 = \Delta t + t_Z \Rightarrow t_3 = 8 \text{ s}$$

Επίσης, ισχύει:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Η επιτάχυνση του σημείου K τη χρονική στιγμή t_3 είναι:

$$a_K = -\omega^2 A \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t_3}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right) \Rightarrow a_K = 0$$

4.75 α) Η γενική μορφή της εξίσωσης του κύματος είναι:

$$y = A \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση του κύματος με αυτήν που δίνεται στην εκφώνηση, για την περίοδο προκύπτει:

$$\frac{t}{T} = 2t \Rightarrow T = 0,5 \text{ s}$$

Ο αριθμός των ταλαντώσεων που εκτελεί η πηγή είναι:

$$N = f \cdot \Delta t \Rightarrow N = \frac{1}{T} \cdot \Delta t \Rightarrow N = 40 \text{ ταλ.}$$

β) Συγκρίνοντας τη γενική μορφή της εξίσωσης του κύματος με αυτήν που δίνεται στην εκφώνηση, για το μήκος κύματος έχουμε:

$$\frac{x}{\lambda} = 0,5x \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

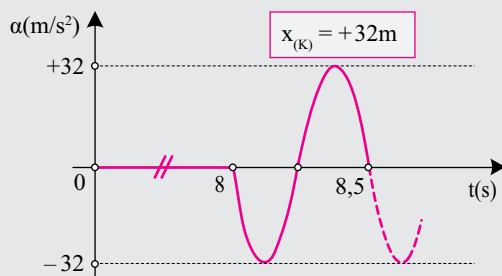
Το σημείο K αρχίζει την ταλάντωσή του τη χρονική στιγμή t_K για την οποία ισχύει:

$$t_K = \frac{x_K}{v_\delta} \Rightarrow t_K = 8 \text{ s}$$

Προκύπτει:

$$a_{\max} = \omega^2 A \Rightarrow a_{\max} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 A \Rightarrow a_{\max} = 32 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι:



γ) Η εξίσωση της φάσης του σημείου K θα είναι:

$$\varphi_K = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi_K = 4\pi t - 32\pi \text{ (S.I.)} \quad (1)$$

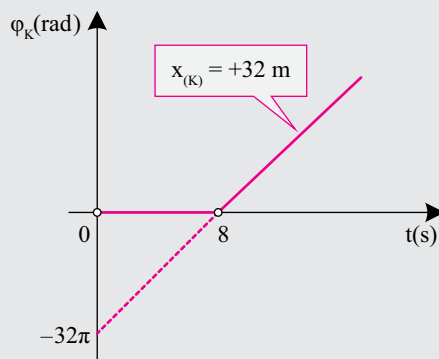
Θέτουμε στην εξίσωση (1) όπου $t = 0$. Προκύπτει:

$$\varphi_K = -32\pi \text{ rad}$$

Θέτουμε στην εξίσωση (1) όπου $\varphi_K = 0$. Προκύπτει:

$$0 = 2\pi t_K - 32\pi \Rightarrow t_K = 8 \text{ s}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα θα είναι:



δ) Η απομάκρυνση του σημείου K τη χρονική στιγμή t_5 θα είναι:

$$y_K = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi(2t - 0,5x) \Rightarrow y_K = 0,1 \text{ m}$$

Προκύπτει:

$$\frac{K}{U} = \frac{E_T - U}{U} \Rightarrow \frac{K}{U} = \frac{\frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}Dy_K^2}{\frac{1}{2}Dy_K^2} \Rightarrow$$

$$\frac{K}{U} = \frac{A^2 - y_K^2}{y_K^2} \Rightarrow \frac{K}{U} = 3$$

4.76 α) Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής προκύπτει:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v_\delta}{\lambda} \Rightarrow f = 10 \text{ Hz}$$

β) Για τη γωνιακή συχνότητα των σημείων του μέσου έχουμε:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 20\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για την ενέργεια ταλάντωσης προκύπτει:

$$E_T = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow E_T = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot \omega^2 A^2 \Rightarrow$$

$$E_T = 8 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

γ) Από την εφαρμογή της Α.Δ.Ε_T έχουμε:

$$K + U = E_T \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \Delta m \cdot \omega^2 \cdot y_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot \omega^2 A^2 \Rightarrow$$

$$v_1 = \pm \omega \sqrt{A^2 - y_1^2} \Rightarrow$$

$$v_1 = \pm 2\pi\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για 4^η φορά η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας θα είναι:

$$v_1 = -2\pi\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ) Η εξίσωση του δευτέρου κύματος είναι:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi(10t + 10x) \text{ (S.I.)}$$

Η θέση του 4^{ου} δεσμού του στάσιμου κύματος προκύπτει θέτοντας $\kappa = 3$ στη σχέση:

$$x = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4} \Rightarrow x = 0,175 \text{ m}$$

4.77 α) Η γενική μορφή της εξίσωσης του κύματος είναι:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση του κύματος με αυτήν που δίνεται στην εκφώνηση, για την περίοδο προκύπτει:

$$\frac{t}{T} = 2t \Rightarrow T = 0,5 \text{ s}$$

Ενώ για το μήκος κύματος έχουμε:

$$\frac{x}{\lambda} = x \Rightarrow \lambda = 1 \text{ m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = \left(\frac{1}{0,5} \right) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_\delta = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$t_1 = t_K + \frac{5T}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{x_K}{v_\delta} + \frac{5T}{4} \quad \eta$$

$$x_K = v_\delta \left(t_1 - \frac{5T}{4} \right) \Rightarrow x_K = 4 \text{ m}$$

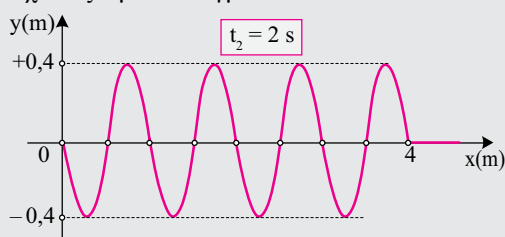
β) Υπολογίζουμε την απόσταση που έχει διανύσει το κύμα μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 . Ισχύει:

$$d_2 = v_\delta t_2 \Rightarrow d_2 = 4 \text{ m}$$

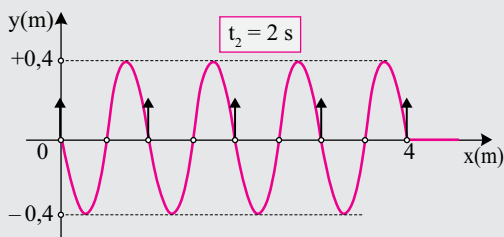
Ισχύει:

$$\frac{d_2}{\lambda} = \frac{4}{1} \Rightarrow d_2 = 4\lambda$$

Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο:



γ)



Από το στιγμιότυπο παρατηρούμε ότι υπάρχουν **4 σημεία** τα οποία έχουν τη χρονική στιγμή t_2 την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα με το σημείο Ο ($x_0 = 0$).

δ) Για τη χρονική στιγμή t_3 έχουμε:

$$t_3 = t_K + \frac{3T}{4} \Rightarrow t_3 = \frac{x_K}{v_\delta} + \frac{3T}{4} \Rightarrow t_3 = 2,375 \text{ s}$$

Η φάση του σημείου Ο εκείνη τη χρονική στιγμή είναι:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi_0 = \left[2\pi \left(\frac{2,375}{0,5} - \frac{0}{\lambda} \right) \right] \text{ rad} \Rightarrow \varphi_0 = 9,5\pi \text{ rad}$$

4.78 α) Υπολογίζουμε την ταχύτητα διάδοσης με τη βοήθεια της σχέσης:

$$v_\delta = \frac{x_K}{t_K} \Rightarrow v_\delta = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Με τη βοήθεια του διαγράμματος υπολογίζουμε την περίοδο του κύματος. Προκύπτει:

$$2T = 2\text{s} \Rightarrow T = 1 \text{ s}$$

Για το μήκος κύματος έχουμε:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \text{ ή } \lambda = v_\delta T \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι:

$$y = A \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \eta \mu 2\pi(t - 0,5x) \text{ (S.I.)}$$

β) Για τη γωνιακή συχνότητα του κύματος έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για τον ρυθμό μεταβολής της ορμής ισχύει:

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dy \Rightarrow \left| \frac{dp}{dt} \right| = \Delta m \cdot \omega^2 |y| \Rightarrow$$

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

γ) Ισχύει:

$$t_1 = t_K + 0,25 \text{ s} \Rightarrow t_1 = 2,25 \text{ s}$$

Για την επιτάχυνση του σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$\alpha_K = -\omega^2 y_K \Rightarrow \alpha_K = -\omega^2 \eta \mu 2\pi(t_1 - 0,5x_K) \Rightarrow$$

$$\alpha_K = -8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

δ) Από την εφαρμογή της Α.Δ.Ε.Τ. έχουμε:

$$K + U = E_T \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v_K^2 + \frac{1}{2} \Delta m \cdot \omega^2 y_K^2 = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot \omega^2 A^2 \Rightarrow$$

$$y_K = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 A^2 - v_K^2}{\omega^2}} \Rightarrow$$

$$y_K = \pm 0,1\sqrt{3} \text{ m}$$

Επειδή η ταχύτητα είναι θετική και το σώμα επιβραδύνεται, η απομάκρυνση είναι θετική και ισχύει:

$$y_K = +0,1\sqrt{3} \text{ m}$$

4.79 α) Από το διάγραμμα προκύπτει:

$$d = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{d}{2} \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Η περίοδος του κύματος είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 0,5 \text{ s}$$

Η ταχύτητα διάδοσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Βρίσκουμε τελικά τη χρονική στιγμή t_1 :

$$d = v_{\delta} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{d}{v_{\delta}} \Rightarrow t_1 = 1 \text{ s}$$

β) Η εξίσωση του κύματος έχει τη μορφή:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi (2t + 0,5x) \text{ (S.I.)}$$

γ) Η εξίσωση της φάσης του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι η εξής:

$$\varphi_{t_1} = 2\pi (2t_1 + 0,5x) \Rightarrow \varphi_{t_1} = 4\pi + \pi x \text{ (S.I.) (1)}$$

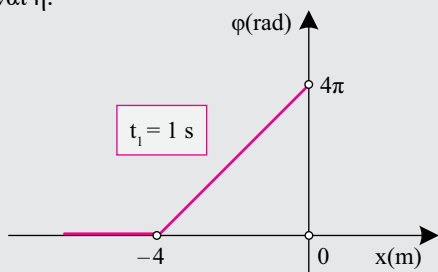
Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $\varphi_{t_1} = 0$ προκύπτει:

$$0 = 4\pi + \pi x \Rightarrow x = -4 \text{ m}$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $x = 0$ προκύπτει:

$$\varphi_{t_1} = 4\pi \text{ rad}$$

Η γραφική παράσταση της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με τη θέση x των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου τη χρονική στιγμή t_1 είναι η:



δ) Η φορά της ταχύτητας των **K, M** είναι **κατακόρυφη προς τα πάνω** ενώ του **Λ** **κατακόρυφη προς τα κάτω**.

4.80 α) Βρίσκουμε τη χρονική στιγμή t_1 :

$$d = v_{\delta} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{d}{v_{\delta}} \Rightarrow t_1 = 0,5 \text{ s}$$

β) Η εξίσωση της φάσης του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι η εξής:

$$\varphi_{t_1} = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi_{t_1} = 2\pi \left(\frac{0,5}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \text{ (1)}$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $\varphi_{t_1} = 4\pi \text{ rad}$ και $x = 0$ προκύπτει:

$$4\pi = 2\pi \left(\frac{0,5}{T} + \frac{0}{\lambda} \right) \Rightarrow T = 0,25 \text{ s}$$

Για το μήκος κύματος ισχύει:

$$\lambda = v_{\delta} T \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Η εξίσωση του κύματος θα είναι η:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi (4t + 0,5x) \text{ (S.I.)}$$

γ) Βρίσκουμε τη γωνιακή συχνότητα του κύματος:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 8\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Το σημείο **K** αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$$t_K = t_1 \Rightarrow t_K = 0,5 \text{ s}$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σημείου **K** είναι:

$$v_K = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x_K}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$v_K = 1,6\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t}{0,25} - \frac{4}{2} \right) \Rightarrow$$

$$v_K = 1,6\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi (4t - 2) \text{ (S.I.) για } t \geq 0,5 \text{ s}$$

δ) Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_2 . Ισχύει:

$$t_2 = t_1 + \frac{T}{2} \Rightarrow t_2 = 0,625 \text{ s}$$

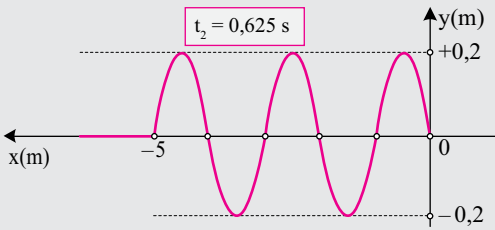
Τη χρονική στιγμή t_2 το κύμα έχει προχωρήσει κατά απόσταση d_2 για την οποία ισχύει:

$$d_2 = v_{\delta} t_2 \Rightarrow d_2 = 5 \text{ m}$$

Συγκρίνουμε την απόσταση d_2 με το μήκος κύματος λ . Προκύπτει:

$$\frac{d_2}{\lambda} = \frac{5}{2} \Rightarrow d_2 = 2,5\lambda$$

Το στιγμιότυπο τη χρονική στιγμή t_2 θα είναι το εξής:



4.81 α) Ισχύει:

$$\Delta t_{\min} = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2 \cdot \Delta t_{\min} \Rightarrow T = 1 \text{ s}$$

β) Έχουμε:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2 \cdot \Delta x \Rightarrow \lambda = 1 \text{ m}$$

Για την ταχύτητα διάδοσης προκύπτει:

$$v_{\delta} = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_{\delta} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η απόσταση που διανύει το υλικό σημείο στο Ο μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του ρυθμού μεταβολής της δυναμικής του ενέργειας είναι ίση με το πλάτος της ταλάντωσής του, επομένως $A = 0,2 \text{ m}$. Η εξίσωση του κύματος είναι:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi (t - x) \text{ (S.I.)}$$

γ) Η φάση του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

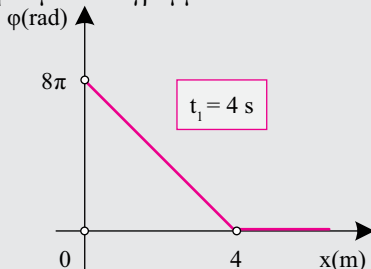
$$\varphi_{t_1} = 2\pi(t_1 - x) \Rightarrow \varphi_{t_1} = 8\pi - 2\pi x \text{ (S.I.) (1)}$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $x = 0$ προκύπτει $\varphi_{t_1} = 8\pi \text{ rad}$.

Επίσης, θέτοντας στη σχέση (1) όπου $\varphi_{t_1} = 0$ έχουμε:

$$0 = 8\pi - 2\pi x \Rightarrow x = 4 \text{ m}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι:



δ) Ισχύει:

$$y_A = A \cdot \eta\mu \varphi_A \Rightarrow 0,2 = 0,2 \cdot \eta\mu \varphi_A \Rightarrow$$

$$\eta\mu \varphi_A = 1 \Rightarrow \varphi_A = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$$

Έχουμε:

$$\varphi_A - \varphi_K = 3\pi \Rightarrow \varphi_K = \varphi_A - 3\pi \Rightarrow$$

$$\varphi_K = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - 3\pi \Rightarrow \varphi_K = 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{2}$$

Τελικά προκύπτει:

$$v_K = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu \varphi_K \Rightarrow v_K = \frac{2\pi}{T} A \cdot \sigma\upsilon\nu \varphi_K \Rightarrow$$

$$v_K = 0$$

4.82 α) Από το διάγραμμα προκύπτει:

$$\frac{T}{2} = 0,25 \text{ s} \Rightarrow T = 0,5 \text{ s}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_{\delta} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{\delta} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για τη θέση του σημείου Κ έχουμε:

$$t_K = \frac{x_K}{v_{\delta}} \Rightarrow x_K = v_{\delta} t_K \Rightarrow x_K = 4 \text{ m}$$

β) Για το μήκος κύματος έχουμε:

$$\lambda = v_{\delta} T \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα του κύματος:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$v_{\max} = \omega A \text{ ή } A = \frac{v_{\max}}{\omega} \Rightarrow A = 0,1 \text{ m}$$

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης είναι:

$$a_K = -\omega^2 A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$a_K = -16 \cdot \eta\mu 2\pi (2t - 2) \text{ (S.I.) για } t \geq 1 \text{ s}$$

γ) Ισχύει:

$$t_1 = t_K + T$$

Επομένως το σημείο Κ θα έχει βρεθεί **2 φορές** κατά τη χρονική διάρκεια $t = 0 \rightarrow t_1 = 1,5 \text{ s}$ σε απομάκρυνση $y = -0,05 \text{ m}$.

δ) Ισχύει:

$$t_2 = t_K + T + \frac{3T}{4} \Rightarrow t_2 = t_K + \frac{7T}{4} \Rightarrow t_2 = 1,875 \text{ s}$$

Η φάση του κύματος είναι:

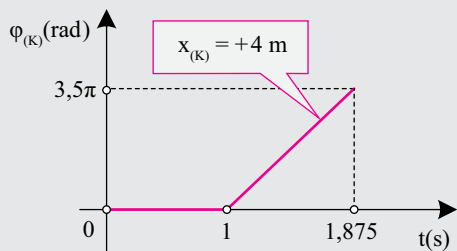
$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi = 2\pi \left(\frac{t}{0,5} - \frac{x}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\varphi = 2\pi (2t - 0,5x) \text{ (S.I.)}$$

Η φάση του σημείου K τη χρονική στιγμή t_2 θα είναι:

$$\varphi_K = 2\pi (2t_2 - 0,5x_K) \Rightarrow \varphi_K = 3,5\pi \text{ rad}$$

Το διάγραμμα της φάσης του σημείου K σε συνάρτηση με τον χρόνο t είναι το εξής:



4.83 α) Ισχύει:

$$d = 2A \Rightarrow A = \frac{d}{2} \Rightarrow A = 0,4 \text{ m}$$

Επίσης, έχουμε:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \text{ ή } T = 2 \cdot \Delta t \Rightarrow T = 0,5 \text{ s}$$

β) Προκύπτει:

$$\Delta x = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{\Delta x}{2} \Rightarrow \lambda = 0,2 \text{ m}$$

Για την ταχύτητα διάδοσης έχουμε:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα του κύματος:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Το σημείο Λ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$$t_\Lambda = \frac{x_\Lambda}{v_\delta} \Rightarrow t_\Lambda = 2,5 \text{ s}$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σημείου Λ είναι:

$$v_\Lambda = \omega A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$v_\Lambda = 1,6\pi \cdot \sin 2\pi (2t - 5) \text{ (S.I.)}$$

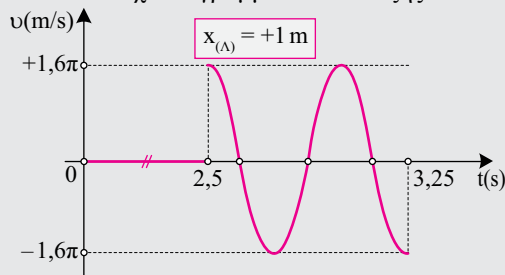
$$\text{για } t \geq 2,5 \text{ s}$$

Στο χρονικό διάστημα από $t = 2,5 \text{ s}$ μέχρι $t' = 3,25 \text{ s}$ υπολογίζουμε τον αριθμό των ταλαντώσεων που θα εκτελέσει η πηγή:

$$N = f \cdot \Delta t \Rightarrow N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = \left(\frac{3,25 - 2,5}{0,5} \right) \text{ ταλ.} \Rightarrow$$

$$N = 1,5 \text{ ταλ.}$$

Το αντίστοιχο διάγραμμα είναι το εξής:



δ) Η αρχική συχνότητα του κύματος είναι:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 2 \text{ Hz}$$

Η τελική συχνότητα είναι:

$$f' = f - \frac{50}{100} f \Rightarrow f' = 1 \text{ Hz}$$

Η νέα γωνιακή συχνότητα είναι:

$$\omega' = 2\pi f' \Rightarrow \omega' = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Τελικά προκύπτει:

$$\frac{U_{\max, \alpha\rho\chi}}{U_{\max, \tau\epsilon\lambda}} = \frac{\frac{1}{2} m \omega^2 A^2}{\frac{1}{2} m \omega'^2 A^2} \Rightarrow$$

$$\frac{U_{\max, \alpha\rho\chi}}{U_{\max, \tau\epsilon\lambda}} = \frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^2} \Rightarrow \frac{U_{\max, \alpha\rho\chi}}{U_{\max, \tau\epsilon\lambda}} = 4$$

4.84 α) Ισχύει:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 1 \text{ s}$$

Υπολογίζουμε το μήκος κύματος των δύο κυμάτων. Ισχύει:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = v_\delta T \Rightarrow \lambda = 0,8 \text{ m}$$

Το κύμα από την πηγή Π_1 φτάνει στο Κ τη χρονική στιγμή:

$$t_1 = \frac{r_1}{v_\delta} \Rightarrow t_1 = 1 \text{ s}$$

Η ταλάντωση που θα εκτελέσει το σημείο Κ λόγω του κύματος που φτάνει από την πηγή Π_1 θα έχει τη μορφή:

$$y_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \Rightarrow y_1 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{1} - \frac{0,8}{0,8} \right) \Rightarrow$$

$$y_1 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi(t-1) \text{ (S.I.) για } t \geq 1 \text{ s}$$

Το κύμα από την πηγή Π_2 φτάνει στο Κ τη χρονική στιγμή:

$$t_2 = \frac{r_2}{v_\delta} \Rightarrow t_2 = 1,5 \text{ s}$$

Η ταλάντωση που θα εκτελέσει το σημείο Κ λόγω του κύματος που φτάνει από την πηγή Π_2 θα έχει τη μορφή:

$$y_2 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right) \Rightarrow y_2 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{1} - \frac{1,2}{0,8} \right) \Rightarrow$$

$$y_2 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi(t-1,5) \text{ (S.I.) για } t \geq 1,5 \text{ s}$$

β) Για το σημείο Κ ισχύει:

$$\frac{r_1 - r_2}{\lambda} = \frac{0,8 - 1,2}{0,8} \Rightarrow r_1 - r_2 = -1 \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι έχουμε ακυρωτική συμβολή με $N = -1$.

γ) Η απομάκρυνση του σημείου Κ τη χρονική στιγμή t υπολογίζεται από τη σχέση:

$$y_K = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi(t-1) \Rightarrow$$

$$y_K = [0,4 \cdot \eta\mu 2\pi(1,25-1)] \text{ m} \Rightarrow y_K = 0,4 \text{ m}$$

δ) Ισχύει:

$$|r_1 - r_2| = N\lambda' \Rightarrow |r_1 - r_2| = N \frac{v_\delta}{f'} \Rightarrow f' = \frac{N v_\delta}{|r_1 - r_2|} \Rightarrow$$

$$f'_{\min} = 2 \text{ Hz}$$

4.85 α) Ισχύει:

$$r_1 = v_\delta t_1 \Rightarrow r_1 = 2,5 \text{ m}$$

Επίσης έχουμε:

$$r_2 = v_\delta t_2 \Rightarrow r_2 = 3,5 \text{ m}$$

β) Ισχύει:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 1 \text{ s}$$

Υπολογίζουμε το μήκος κύματος των δύο κυμάτων. Ισχύει:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = v_\delta T \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Κατά τη χρονική διάρκεια $0 \leq t < 1,25 \text{ s}$ δεν έχει φτάσει κανένα κύμα στο σημείο Σ, επομένως έχουμε $\alpha_\Sigma = 0$.

Κατά τη χρονική διάρκεια $1,25 \text{ s} \leq t < 1,75 \text{ s}$ έχει φτάσει μόνο το πιο κοντινό κύμα στο σημείο Σ, επομένως έχουμε:

$$\alpha_\Sigma = -\omega^2 A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

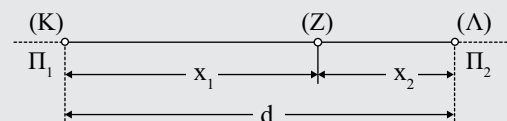
$$\alpha_\Sigma = -4\pi^2 \cdot 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{1} - \frac{2,5}{2} \right)$$

$$\text{ή } \alpha_\Sigma = -20 \cdot \eta\mu 2\pi(t-1,25) \text{ (S.I.)}$$

Μετά τη χρονική στιγμή $t = 1,75 \text{ s}$ ο φελλός ακινητοποιείται, επομένως ισχύει:

$$\alpha_\Sigma = 0$$

γ)



Έστω ένα σημείο Z ενισχυτικής συμβολής του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Για το Z ισχύει:

$$x_1 - x_2 = N\lambda \quad (1)$$

Επίσης έχουμε:

$$x_1 + x_2 = d \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε:

$$x_1 = N\frac{\lambda}{2} + \frac{d}{2} \Rightarrow x_1 = N + 3,5$$

Προκύπτει:

$$0 \leq x_1 \leq d \Rightarrow 0 \leq N\frac{\lambda}{2} + \frac{d}{2} \leq d \Rightarrow$$

$$0 \leq N + 3,5 \leq 7 \Rightarrow -3,5 \leq N \leq 3,5$$

Επομένως υπάρχουν **7** σημεία ενισχυτικής συμβολής στις παρακάτω θέσεις:

$$N = -3, x_1 = 0,5$$

$$N = -2, x_1 = 1,5 \text{ m}$$

$$N = -1, x_1 = 2,5 \text{ m}$$

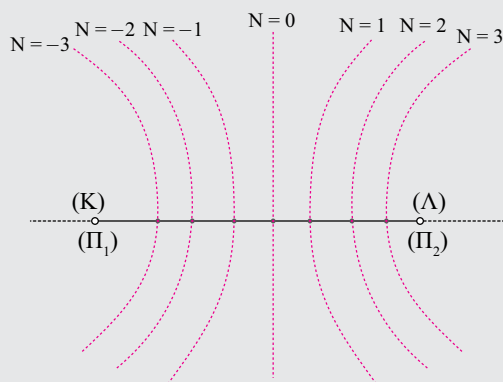
$$N = 0, x_1 = 3,5 \text{ m}$$

$$N = 1, x_1 = 4,5 \text{ m}$$

$$N = 2, x_1 = 5,5 \text{ m}$$

$$N = 3, x_1 = 6,5 \text{ m}$$

Σχεδιάζουμε τις υπερβολές ενισχυτικής συμβολής:



δ) Υπολογίζουμε την απομάκρυνση του φελλού τη χρονική στιγμή $t_3 = 1,5 \text{ s}$. Ισχύει:

$$y_\Sigma = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t_3}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \Rightarrow y_\Sigma = 0,5 \text{ m}$$

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του φελλού είναι:

$$U = \frac{1}{2} D y_\Sigma^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} \Delta m \cdot \omega^2 y_\Sigma^2 \Rightarrow U = 0,01 \text{ J}$$

4.86 α) Συγκρίνουμε την εξίσωση του στάσιμου κύματος με τη γενική μορφή της:

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t}{T}$$

Προκύπτει:

$$2A = 0,8 \text{ m} \Rightarrow A = 0,4 \text{ m}$$

Επίσης ισχύει:

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = 20\pi x \Rightarrow \lambda = 0,1 \text{ m}$$

και:

$$2\pi \frac{t}{T} = 10\pi t \Rightarrow T = 0,2 \text{ s}$$

Για τις εξισώσεις των δύο κυμάτων έχουμε:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow y_1 = 0,4\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{0,2} - \frac{x}{0,1} \right) \Rightarrow$$

$$y_1 = 0,4\eta\mu 2\pi (5t - 10x) \text{ (S.I.)}$$

και:

$$y_2 = 0,4\eta\mu 2\pi (5t + 10x) \text{ (S.I.)}$$

β) Υπολογίζω τη γωνιακή συχνότητα του κύματος:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για την ταχύτητα του σημείου Z τη χρονική στιγμή t_1 προκύπτει:

$$v_Z = \omega 2A \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x_Z}{\lambda} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{t_1}{T} \Rightarrow v_Z = 4\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Για τις κοιλίες ισχύει:

$$x_K = N\frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_K = 0,05 \text{ N}$$

Ισχύει:

$$0 < x_K < x_\Lambda \Rightarrow 0 < 0,05N < 0,3 \Rightarrow 0 < N < 6$$

Επομένως το N μπορεί να πάρει τις τιμές 1, 2, 3, 4, 5 (**5 κοιλίες**).

δ) Γενικά, ισχύει:

$$\frac{y_{\Lambda}}{y_{\Sigma}} = \frac{0,8 \sin 20\pi x_{\Lambda} \cdot \eta \mu 10\pi t}{0,8 \sin 20\pi x_{\Sigma} \cdot \eta \mu 10\pi t} \Rightarrow$$

$$\frac{y_{\Lambda}}{y_{\Sigma}} = \frac{\sin(20\pi \cdot 0,3)}{\sin(20\pi \cdot 0,35)} \Rightarrow \frac{y_{\Lambda}}{y_{\Sigma}} = -1$$

Το σημείο Σ έχει πλάτος:

$$A_{\Sigma} = |0,8 \sin(20\pi \cdot 0,35)| \Rightarrow A_{\Sigma} = 0,8 \text{ m}$$

(κοιλία)

Επομένως όταν $y_{\Sigma} = -0,8 \text{ m}$ για το σημείο Λ έχουμε:

$$y_{\Lambda} = -y_{\Sigma} \Rightarrow y_{\Lambda} = +0,8 \text{ m}$$

4.87 α) Ισχύει:

$$d = 4A \Rightarrow A = \frac{d}{4} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

Επίσης, έχουμε:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2 \cdot \Delta x \Rightarrow \lambda = 0,1 \text{ m}$$

Για την περίοδο T, προκύπτει:

$$f = \frac{N}{\Delta t} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{N}{\Delta t} \Rightarrow T = \frac{\Delta t}{N} \Rightarrow T = 0,2 \text{ s}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow$$

$$y = 2 \cdot 0,2 \cdot \sin 2\pi \frac{x}{0,1} \cdot \eta \mu 2\pi \frac{t}{0,2} \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \sin 20\pi x \cdot \eta \mu 10\pi t \text{ (S.I.)}$$

β) Ισχύει:

$$L = \frac{3\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow L = \frac{7\lambda}{4} \Rightarrow L = 0,175 \text{ m}$$

γ) Από την εφαρμογή της Α.Δ.Ε_T για την ταλάντωση του Ο, έχουμε (με απόδειξη):

$$|v| = \omega \sqrt{A_0^2 - y_0^2} \Rightarrow |v| = 2\pi \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ) Προκύπτει:

$$\frac{6\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{4} = \frac{3\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow 3,25\lambda' = 1,75\lambda \Rightarrow$$

$$3,25 \frac{v_{\delta}}{f'} = 1,75 \frac{v_{\delta}}{f} \Rightarrow f' = \frac{13}{7} f$$

Το ζητούμενο ποσοστό επί τοις εκατό θα είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{f' - f}{f} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = \frac{\frac{13}{7}f - f}{f} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{600}{7} \%$$

4.88 α) Από την εξίσωση του αρμονικού κύματος έχουμε:

$$\frac{t}{T} = 0,2t \Rightarrow T = 5 \text{ s}$$

Επίσης έχουμε:

$$\frac{x}{\lambda} = 2x \Rightarrow \lambda = 0,5 \text{ m}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει είναι η εξής:

$$y = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \sin 4\pi x \cdot \eta \mu 0,4\pi t \text{ (S.I.)}$$

β) Οι θέσεις των δεσμών υπολογίζονται από την εξίσωση:

$$x_{\delta} = (2N + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (1)$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $N = 4$, προκύπτει:

$$x_{\delta} = \left[(2 \cdot 4 + 1) \frac{0,5}{4} \right] \text{ m} \Rightarrow x_{\delta} = 1,125 \text{ m}$$

γ) Βρίσκουμε τις θέσεις των κοιλιών και των δεσμών για το τμήμα ΟΚ.

Για τις κοιλίες ισχύει:

$$x_{\kappa} = N \frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_{\kappa} = 0,25 N \quad (2)$$

Θέτοντας στη σχέση (2) όπου $N = 0, 1, 2, 3, 4$ βρίσκουμε τις θέσεις:

$$0 - 0,25 \text{ m} - 0,5 \text{ m} - 0,75 \text{ m} - 1 \text{ m}$$

Για τους δεσμούς θέτοντας στη σχέση (1) όπου $N = 0, 1, 2, 3, 4$ έχουμε:

$$0,125 \text{ m} - 0,375 \text{ m} - 0,625 \text{ m} - 0,875 \text{ m}$$

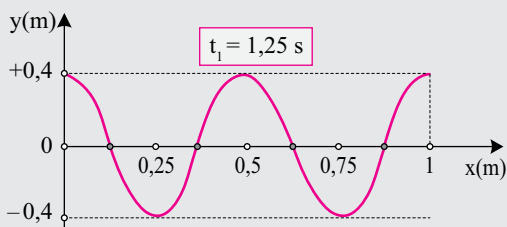
Υπολογίζουμε την απομάκρυνση της κοιλίας στο σημείο Ο τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,25 \text{ s}$.

Προκύπτει:

$$y_0 = [0,4 \cdot \sin(4\pi \cdot 0) \cdot \eta \mu(0,4\pi \cdot 1,25)] \text{ m}$$

$$\text{ή } y_0 = 0,4 \text{ m}$$

Σχεδιάζουμε το ζητούμενο στιγμιότυπο:



δ) Η 5^η κοιλία βρίσκεται στη θέση $x = 1$ m. Υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα του κύματος. Ισχύει:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 0,4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης της συγκεκριμένης κοιλίας είναι:

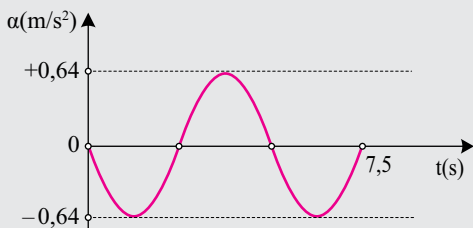
$$a = -\omega^2 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow$$

$$a = -0,64 \cdot \eta \mu 0,4\pi t \text{ (S.I.)}$$

Σε χρονική διάρκεια $\Delta t = 7,5$ s η συγκεκριμένη κοιλία εκτελεί:

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = 1,5 \text{ ταλ.}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το παρακάτω:



4.89 α) Συγκρίνοντας την εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που δίνεται, με τη γενική μορφή:

$$E = E_{\max} \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

προκύπτει:

$$\frac{t}{T} = 6 \cdot 10^{10} t \Rightarrow T = \frac{1}{6} \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

Για τη συχνότητα ισχύει:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 6 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$$

Επίσης έχουμε:

$$\frac{x}{\lambda} = 4 \cdot 10^2 x \Rightarrow \lambda = 0,25 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Για την ταχύτητα διάδοσης έχουμε:

$$v_{\delta} = \lambda f \Rightarrow v_{\delta} = 1,5 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Έχουμε:

$$\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = v_{\delta} \Rightarrow B_{\max} = \frac{E_{\max}}{v_{\delta}} \Rightarrow$$

$$B_{\max} = \frac{10}{3} \cdot 10^{-11} \text{ T}$$

Η εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου θα έχει τη μορφή:

$$B = \frac{10}{3} \cdot 10^{-11} \cdot \eta \mu 2\pi (6 \cdot 10^{10} t - 4 \cdot 10^2 x) \text{ (S.I.)}$$

γ) Θέτουμε στην εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου του κύματος όπου $t = \frac{1}{72} \cdot 10^{-10} \text{ s}$ και $x = 0$. Προκύπτει:

$$B = \left[\frac{10}{3} \cdot 10^{-11} \cdot \eta \mu 2\pi \left(6 \cdot 10^{10} \cdot \frac{1}{72} \cdot 10^{-10} - 0 \right) \right] \text{ T}$$

$$\text{ή } B = \frac{5}{3} \cdot 10^{-11} \text{ T}$$

δ) Υπολογίζουμε το μήκος κύματος στο κενό. Ισχύει:

$$c = \lambda_0 f \Rightarrow \lambda_0 = \frac{c}{f} \Rightarrow \lambda_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Η μέγιστη τιμή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου κατά τη διάδοση στο κενό είναι:

$$E_{\max,0} = E_{\max} + \frac{10}{100} E_{\max} \Rightarrow E_{\max,0} = \frac{110}{100} E_{\max} \Rightarrow$$

$$\text{ή } E_{\max,0} = 5,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Η μέγιστη τιμή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου κατά τη διάδοση στο κενό υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{E_{\max,0}}{B_{\max,0}} = c \Rightarrow B_{\max,0} = \frac{E_{\max,0}}{c} \Rightarrow$$

$$B_{\max,0} = \frac{11}{6} \cdot 10^{-11} \text{ T}$$

Η εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου όταν το ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στο κενό θα είναι τελικά:

$$B_0 = B_{\max,0} \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_0} \right) \Rightarrow$$

$$B_0 = \frac{11}{6} \cdot 10^{-11} \cdot \eta \mu 2\pi (6 \cdot 10^{10} t - 2 \cdot 10^2 x) \text{ (S.I.)}$$

ΘΕΜΑ Δ

4.90 α) Από τη σύγκριση των εξισώσεων:

$$v = 1,6\pi \cdot \sigma \nu \nu 2\pi (2t - 0,5x) \text{ (S.I.)}$$

Και:

$$v = \omega A \cdot \sigma \nu \nu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Έχουμε:

$$\frac{t}{T} = 2t \Rightarrow T = 0,5 \text{ s και } \frac{x}{\lambda} = 0,5x \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Ισχύει:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 2 \text{ Hz}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow v_\delta = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Επίσης ισχύει:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Προκύπτει:

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{\max}}{\omega} \Rightarrow A = 0,4 \text{ m}$$

Τελικά έχουμε:

$$\alpha_{\max} = \omega^2 A \Rightarrow \alpha_{\max} = 64 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

β) Το σημείο Z αρχίζει ταλάντωση τη χρονική στιγμή:

$$t_z = \frac{x_z}{v_\delta} \Rightarrow t_z = 0,25 \text{ s}$$

Η ταχύτητά του εκείνη τη χρονική στιγμή είναι:

$$v_z = \left[1,6\pi \cdot \sigma \nu \nu 2\pi (2 \cdot 2 - 0,5 \cdot 1) \right] \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$v_z = -1,6\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η κινητική του ενέργεια είναι:

$$K = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v_z^2 \Rightarrow K = 0,128 \text{ J}$$

γ) Ισχύει:

$$\Delta \varphi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow \Delta \varphi = 2\pi \frac{(x_\Sigma - x_z)}{\lambda} \Rightarrow \Delta \varphi = \pi \text{ rad}$$

Έχουμε:

$$y_z = -A \Rightarrow A \cdot \eta \mu \varphi_z = -A \text{ ή}$$

$$\eta \mu \varphi_z = -1 \Rightarrow \varphi_z = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}$$

Προκύπτει:

$$\Delta \varphi = \varphi_z - \varphi_\Sigma \Rightarrow \pi = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} - \varphi_\Sigma \Rightarrow$$

$$\varphi_\Sigma = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$$

Τελικά έχουμε:

$$v_\Sigma = v_{\max} \cdot \sigma \nu \nu \varphi_\Sigma \Rightarrow$$

$$v_\Sigma = v_{\max} \cdot \sigma \nu \nu \left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$$

$$v_\Sigma = 0$$

δ) Ισχύει:

$$U = \frac{1}{2} D y^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot \omega^2 y^2 \Rightarrow$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \cdot 16 \cdot \pi^2 \cdot 16 \cdot 10^{-2} \eta \mu^2 2\pi (2t - 0,5) \Rightarrow$$

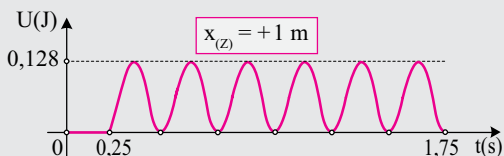
$$U = 0,128 \cdot \eta \mu^2 2\pi (2t - 0,5) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{για } t \geq 0,25 \text{ s}$$

Ισχύει:

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = \frac{1,75 \text{ s} - 0,25 \text{ s}}{0,5 \text{ s}} \Rightarrow N = 3 \text{ ταλ.}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



4.91 α) Ισχύει:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \Rightarrow \Delta t = \frac{r_2}{v_\delta} - \frac{r_1}{v_\delta} \Rightarrow$$

$$r_2 = v_\delta \cdot \left(\Delta t + \frac{r_1}{v_\delta} \right) \Rightarrow r_2 = 2\text{ m}$$

β) Υπολογίζουμε το μήκος κύματος των δύο κυμάτων. Ισχύει:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = v_\delta T \Rightarrow \lambda = 2\text{ m}$$

Για το σημείο Σ προκύπτει:

$$\frac{r_1 - r_2}{\lambda} = \frac{1 - 2}{2} \Rightarrow r_1 - r_2 = -\frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

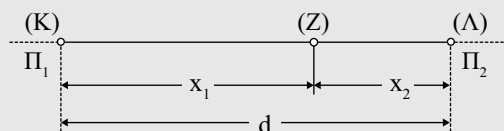
Η σχέση (1) είναι της μορφής:

$$r_1 - r_2 = (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \text{ με } N = -1$$

Επομένως το Σ είναι σημείο **ακυρωτικής συμβολής**.

γ) Ισχύει:

$$d = r_1 + r_2 \Rightarrow d = 3\text{ m}$$



Έστω ένα σημείο Z ακυρωτικής συμβολής του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Για το Z ισχύει:

$$x_1 - x_2 = (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (2)$$

Επίσης έχουμε:

$$x_1 + x_2 = d \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2), (3) έχουμε:

$$x_1 = (2N + 1) \frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} \Rightarrow x_1 = (2N + 1) \cdot 0,5 + 1,5$$

Προκύπτει:

$$0 \leq x_1 \leq d \Rightarrow 0 \leq (2N + 1) \cdot 0,5 + 1,5 \leq 3$$

$$\text{ή } -2 < N < 1 \text{ άρα } N = -1, 0$$

Επομένως υπάρχουν **2 σημεία ακυρωτικής συμβολής** στο ΚΛ.

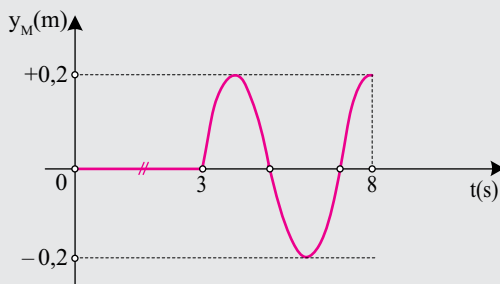
δ) Στο σημείο Μ τα δύο κύματα συμβάλλουν ταυτόχρονα τη χρονική στιγμή:

$$t = \frac{d}{v_\delta} \Rightarrow t = 3\text{ s}$$

Πριν τη χρονική στιγμή $t = 3\text{ s}$ το Μ θα είναι ακίνητο ενώ επειδή ανήκει στη μεσοκάθετο, αμέσως μετά τη χρονική στιγμή $t = 3\text{ s}$ (όπου και συμβάλλουν τα δύο κύματα) θα είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής. Κατά τη χρονική διάρκεια $t_0 = 0 \rightarrow t_3 = 8\text{ s}$ το Μ θα εκτελεί:

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = \frac{8\text{ s} - 3\text{ s}}{4} \Rightarrow N = 1,25 \text{ ταλ.}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



Το σημείο Σ πριν τη χρονική στιγμή

$$t_1 = \frac{r_1}{v_\delta} = 2\text{ s} \text{ είναι ακίνητο, ενώ από τη χρονική}$$

στιγμή t_1 μέχρι τη χρονική στιγμή

$$t_2 = \frac{r_2}{v_\delta} = 4\text{ s} \text{ (όπου έχει φτάσει μόνο το κύμα}$$

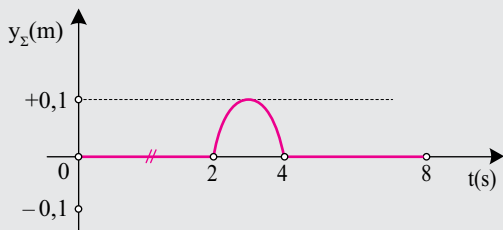
από την πηγή Π_1) ταλαντώνεται με πλάτος $A = A_M/2 = 0,1\text{ m}$.

Κατά τη χρονική διάρκεια $t_1 \rightarrow t_2$ το Σ θα εκτελεί:

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = \frac{4\text{ s} - 2\text{ s}}{4} \Rightarrow N = 0,5 \text{ ταλ}$$

Επειδή είναι σημείο ακυρωτικής συμβολής αμέσως μετά τη χρονική στιγμή t_2 θα παραμένει ακίνητο.

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



4.92 α) Από το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει:

$$A = 0,05 \text{ m}$$

$$\frac{9\lambda}{4} = 1,8 \text{ m} \Rightarrow \lambda = 0,8 \text{ m}$$

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της κυματικής έχουμε:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v_\delta}{\lambda} \Rightarrow f = 2,5 \text{ Hz} \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = 0,4 \text{ s}$$

Η εξίσωση του κύματος είναι η εξής:

$$y = A \cdot \eta\mu \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \Rightarrow$$

$$y = 0,05 \cdot \eta\mu (5\pi t - 2,5\pi x) \text{ (S.I.)}$$

β) Για τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

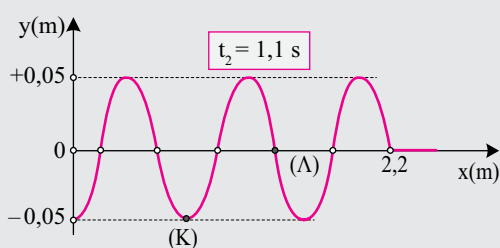
$$t_1 = \frac{x_1}{v_\delta} \Rightarrow t_1 = 0,9 \text{ s}$$

άρα, η χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \frac{T}{2} \Rightarrow t_2 = 1,1 \text{ s}$

Στον χρόνο αυτό το κύμα έχει διαδοθεί κατά

$$x_2 = v_\delta \cdot t_1 = 2,2 \text{ m} \Rightarrow x_2 = 2\lambda + \frac{3\lambda}{4}.$$

Το στιγμιότυπο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Από το στιγμιότυπο προκύπτει ότι τα σημεία του ομογενούς ελαστικού μέσου που είναι ακίνητα την ίδια στιγμή είναι **6**.

γ) Τη χρονική στιγμή $t_2 = 1,1 \text{ s}$ οι ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων (Κ) είναι $v_{(K)} = 0$ και (Λ) είναι:

$$v_{(\Lambda)} = +v_{\max} = \omega \cdot A = \frac{2\pi}{T} \cdot A \Rightarrow v_{(\Lambda)} = 0,25\pi \text{ m/s}$$

όπως προκύπτει από το στιγμιότυπο.

δ) Η διαφορά φάσης των σημείων (Κ) και (Λ) είναι:

$$\Delta\phi_{\text{KL}} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x_{\text{KL}} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{3\lambda}{4} = \frac{3\pi}{2} \text{ rad} \Rightarrow$$

$$\phi_K - \phi_\Lambda = \frac{3\pi}{2} \text{ rad} \Rightarrow \phi_K = \phi_\Lambda + \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

Τη χρονική στιγμή κατά την οποία το υλικό σημείο (Λ) βρίσκεται στη θέση $y = +0,025 \text{ m}$ έχουμε:

$$y_\Lambda = 0,05 \cdot \eta\mu\phi_\Lambda \Rightarrow 0,025 = 0,05 \cdot \eta\mu\phi_\Lambda \Rightarrow$$

$$\eta\mu\phi_\Lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{συν}\phi_\Lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Αφού κινείται προς την ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του τότε:

$$v_\Lambda > 0 \Rightarrow v_{\max} \cdot \text{συν}\phi_\Lambda > 0 \Rightarrow \text{συν}\phi_\Lambda > 0$$

$$\text{άρα, } \text{συν}\phi_\Lambda = +\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Η απομάκρυνση του υλικού σημείου (Κ) την ίδια χρονική στιγμή είναι:

$$y_K = 0,05 \cdot \eta\mu\phi_K \Rightarrow y_K = 0,05 \cdot \eta\mu \left(\phi_\Lambda + \frac{3\pi}{2} \right) \Rightarrow$$

$$y_K = -0,025\sqrt{3} \text{ m}$$

4.93 α) Από το διάγραμμα που δίνεται ισχύει:

$$\Delta t = t_1 - t_2 \Rightarrow \frac{3T}{2} = 1,1 - 0,8 \Rightarrow T = 0,2s \Rightarrow$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 5 \text{ Hz}$$

Υπολογίζουμε το μήκος κύματος των δύο κυμάτων. Ισχύει:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = v_\delta T \Rightarrow \lambda = 0,6 \text{ m}$$

β) Για τις αποστάσεις r_1 και r_2 του φελλού από τις δύο πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα έχουμε:

$$r_1 = v_\delta t_1 \Rightarrow r_1 = 3,3 \text{ m}$$

Επίσης έχουμε:

$$r_2 = v_\delta t_2 \Rightarrow r_2 = 2,4 \text{ m}$$

Στο φελλό έχουμε απόσβεση από τη χρονική στιγμή που φτάνουν σε αυτόν και τα δύο κύματα αφού παρατηρούμε ότι το πλάτος του μηδενίζεται από τη χρονική στιγμή 1,1 s και μετά.

γ) Έστω d_1 και d_2 οι αποστάσεις του σημείου (Z) από τις δύο πηγές. Αφού ανήκει στην ίδια υπερβολή απόσβεσης με το σημείο (Σ), ισχύει:

$$d_1 - d_2 = r_1 - r_2 = 3,3 - 2,4 = 0,9 \text{ m}$$

Το σημείο (Z) σταματάει την ταλάντωση του μια περίοδο πριν σταματήσει την ταλάντωσή του ο φελλός δηλαδή τη χρονική στιγμή:

$$t'_1 = t_1 - T = 0,9s$$

Εκείνη τη στιγμή στο σημείο (Z) φτάνει το κύμα από την πηγή Π_1 (αφού είναι πιο μακριά από το σημείο (Z)). Η απόστασή του d_1 από την πηγή Π_1 είναι $d_1 = v_\delta t'_1 \Rightarrow d_1 = 2,7 \text{ m}$

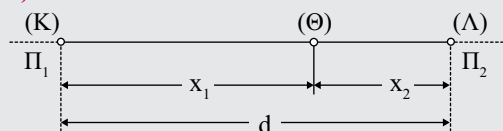
Έτσι έχουμε

$$d_1 - d_2 = 0,9m \Rightarrow d_2 = d_1 - 0,9m \Rightarrow d_2 = 1,8m$$

Η απόσταση των δύο πηγών είναι:

$$d = d_1 + d_2 \Rightarrow d = 4,5 \text{ m}$$

δ)



Έστω ένα σημείο (Θ) ενισχυτικής συμβολής του ευθύγραμμου τμήματος (ΚΛ).

Για το (Θ) ισχύει:

$$x_1 - x_2 = N\lambda \quad (1)$$

Επίσης έχουμε:

$$x_1 + x_2 = d \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε:

$$x_1 = N \frac{\lambda}{2} + \frac{d}{2} \Rightarrow x_1 = 0,3N + 2,25$$

Προκύπτει:

$$0 \leq x_1 \leq d \Rightarrow 0 \leq 0,3N + 2,25 \leq 4,5 \Rightarrow$$

$$-7,5 \leq N \leq 7,5$$

Επομένως υπάρχουν 15 σημεία ενισχυτικής συμβολής

4.94 α) Το σημείο (Κ) παραμένει διαρκώς ακίνητο μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,4 \text{ s}$ που φτάνει σε αυτό το κύμα από την πηγή Π_1 .

$$\text{Ισχύει: } v_\delta = \frac{r_1}{t_1} \Rightarrow v_\delta = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Έχουμε: } v_\delta = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v_\delta}{f} \Rightarrow \lambda = 0,4 \text{ m}$$

β) Τα κύματα από τις δύο πηγές Π_1 και Π_2 φτάνουν στο σημείο (Κ) τις χρονικές στιγμές $t_1 = 0,4 \text{ s}$ και $t_2 = \frac{r_2}{v_\delta} = 0,8 \text{ s}$.

Το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου (Κ) τη χρονική στιγμή 0,5 s είναι $A_{(K)} = 0,2 \text{ m}$ αφού αυτό ταλαντώνεται μόνο εξαιτίας του ενός κύματος από την πηγή Π_1 .

Τη χρονική στιγμή 1 s έχει αρχίσει το φαινόμενο της συμβολής στο σημείο (Κ). Ισχύει:

$$r_1 - r_2 = 0,8 - 1,6 = -0,8m = -2 \cdot 0,4m$$

οπότε, ικανοποιείται η συνθήκη ενίσχυσης $r_1 - r_2 = N\lambda$ με $N = -2$ άρα, το σημείο (Κ) ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος

$$A'_{(K)} = 2A \Rightarrow A'_{(K)} = 0,4 \text{ m}$$

γ) Μετά τη συμβολή των 2 κυμάτων στο σημείο (Λ) έχουμε:

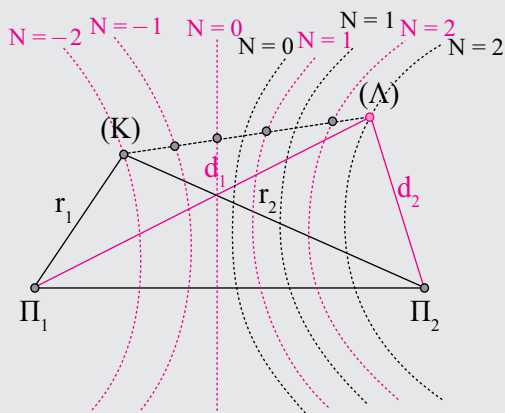
$$d_1 - d_2 = 2,4 - 1,4 = 1\text{ m} \Rightarrow$$

$$d_1 - d_2 = (2N + 1) \cdot \frac{0,4}{2}$$

οπότε, ικανοποιείται η συνθήκη απόσβεσης $d_1 - d_2 = (2N + 1) \frac{\lambda}{2}$ με $N = 2$ άρα, το σημείο

(Λ) παραμένει ακίνητο, δηλαδή $A_{(\Lambda)} = 0$

δ) Τα σημεία που βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα (ΚΛ) τα οποία ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος που ταλαντώνεται και το σημείο (Κ) μετά την έναρξη της συμβολής, είναι τα σημεία στα οποία έχω το φαινόμενο της ενίσχυσης και όπως φαίνεται από το παρακάτω σχήμα αυτά είναι 5 σημεία.



ε) Για να παραμένει διαρκώς ακίνητο μετά την έναρξη της συμβολής το σημείο (Κ), θα πρέπει σε αυτό να έχω απόσβεση, δηλαδή πρέπει:

$$r_1 - r_2 = (2N + 1) \frac{\lambda'}{2} \Rightarrow r_1 - r_2 = (2N + 1) \frac{v_\delta}{2f'} \Rightarrow$$

$$f' = (2N + 1) \frac{v_\delta}{2|r_1 - r_2|} \Rightarrow f' = (2N + 1) \cdot 1,25$$

$$\text{με } N = 0, 1, 2, \dots$$

άρα, $f' = 1,25 \text{ Hz}, 3,75 \text{ Hz}, 6,25 \text{ Hz}, 8,75 \text{ Hz}, \dots$

Το ελάχιστο ποσοστό αύξησης της συχνότητας των δύο κυμάτων είναι

$$\Pi\% = \frac{f' - f}{f} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi\% = 25\%$$

4.95 α) Από τις εξισώσεις των αρμονικών κυμάτων έχουμε:

$$\frac{2\pi t}{T} = 10\pi t \Rightarrow T = 0,2 \text{ s}$$

Επίσης έχουμε:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = 5\pi x \Rightarrow \lambda = 0,4 \text{ m}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει είναι η εξής:

$$y = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \sin 5\pi x \cdot \eta \mu 10\pi t \text{ (S.I.)}$$

β) Για το πλάτος του σημείου (Κ) ($x_K = -0,3 \text{ m}$) έχουμε:

$$A_K = |0,2 \cdot \sin(5\pi x_K)| = |0,2 \cdot \sin(5\pi \cdot (-0,3))| \Rightarrow$$

$$A_K = 0 \text{ (δεσμός)}$$

Για το πλάτος του σημείου (Λ) ($x_\Lambda = +0,6 \text{ m}$) έχουμε:

$$A_\Lambda = |0,2 \cdot \sin(5\pi x_\Lambda)| = |0,2 \cdot \sin(5\pi \cdot (+0,6))| \Rightarrow$$

$$A_\Lambda = 0,2 \text{ m (κοιλία)}$$

γ) Οι θέσεις των δεσμών υπολογίζονται από την εξίσωση:

$$x_\delta = (2N + 1) \frac{\lambda}{4} = 0,2N + 0,1 \quad (1)$$

Θέλω:

$$x_K \leq x_\delta \leq x_\Lambda \Rightarrow -0,3 \leq 0,2N + 0,1 \leq +0,6 \Rightarrow$$

$$-2 \leq N \leq 2,5$$

Άρα, $N = -2, -1, 0, 1, 2$

Βρίσκουμε τις θέσεις των δεσμών πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα (ΚΛ) θέτοντας στη σχέση (1) όπου $N = -2, -1, 0, 1, 2$ και έχουμε $-0,3 \text{ m}, -0,1 \text{ m}, 0,1 \text{ m}, 0,3 \text{ m}, 0,5 \text{ m}$.

Οι θέσεις των κοιλιών υπολογίζονται από την εξίσωση:

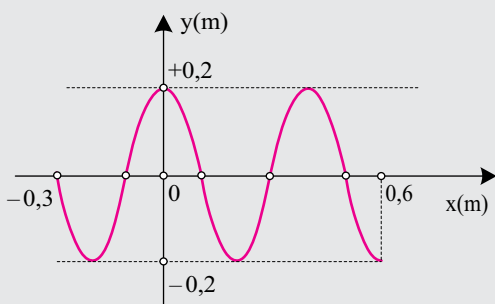
$$x_K = N \frac{\lambda}{2} = 0,2N \quad (2)$$

Θέλουμε:

$$x_K \leq x_K \leq x_A \Rightarrow -0,3 \leq 0,2N \leq +0,6 \\ \Rightarrow -1,5 \leq N \leq 3$$

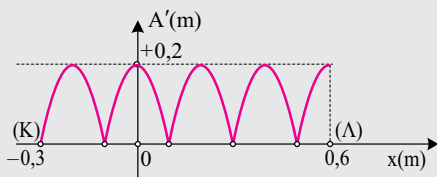
Άρα, $N = -1, 0, 1, 2, 3$

Βρίσκουμε τις θέσεις των κοιλιών πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα (ΚΛ) θέτοντας στη σχέση (2) όπου $N = -1, 0, 1, 2, 3$ και έχουμε $-0,2 \text{ m}, 0 \text{ m}, 0,2 \text{ m}, 0,4 \text{ m}, 0,6 \text{ m}$.



Το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος φαίνεται στο παραπάνω σχήμα από το οποίο προκύπτει ότι τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ των σημείων (Κ) και (Λ) του ελαστικού μέσου και ταλαντώνονται με πλάτος ίσο με το πλάτος ταλάντωσης των αρχικών κυμάτων η συμβολή των οποίων έδωσε το στάσιμο είναι **9**.

δ) Το διάγραμμα πλάτους σε συνάρτηση με τη θέση των σημείων μεταξύ των σημείων (Κ) και (Λ) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



4.96 α) Αφού το σημείο αυτό διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του 20 φορές κάθε δευτερόλεπτο τότε έχει εκτελέσει 10 ταλαντώσεις καθώς σε μια ταλάντωση διέρχεται 2 φορές από τη θέση ισορροπίας του. Επομένως θα έχει περάσει χρόνος ίσος με 10 περιόδους άρα:

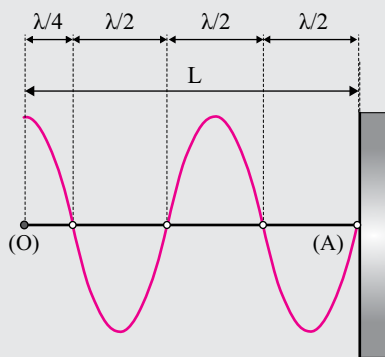
$$10T = 1 \Rightarrow T = 0,1 \text{ s}$$

β) Σε κάθε περίοδο το σημείο διανύει απόσταση ίση με 4 φορές το πλάτος του $4A_{(0)}$, άρα, σε 10T θα έχει διανύσει απόσταση $40A_{(0)}$. Ισχύει: $40A_{(0)} = 16 \Rightarrow A_{(0)} = 0,4 \text{ m}$.

Επειδή το σημείο (Ο) είναι κοιλιά ταλαντώνεται με πλάτος 2Α όπου Α το πλάτος των αρχικών κυμάτων η συμβολή των οποίων έδωσε το στάσιμο. Τελικά $A = 0,2 \text{ m}$.

Η μορφή της χορδής φαίνεται παρακάτω από την οποία προκύπτει:

$$L = \frac{3\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{7\lambda}{4} \Rightarrow \frac{7\lambda}{4} = 0,7 \text{ m} \Rightarrow \lambda = 0,4 \text{ m}$$



Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει είναι η εξής:

$$y = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \sin 5\pi x \cdot \eta \mu 20\pi t \text{ (S.I.)}$$

γ) Για το πλάτος του σημείου (Ζ) ($x_Z = 0,25 \text{ m}$) έχουμε:

$$A_Z = |0,4 \cdot \sin(5\pi x_Z)| \Rightarrow A_Z = 0,2\sqrt{2} \text{ m}$$

Από την εφαρμογή της Α.Δ.Ε_Τ για την ταλάντωση του (Ζ) για τη χρονική στιγμή t_1 , έχουμε (με απόδειξη):

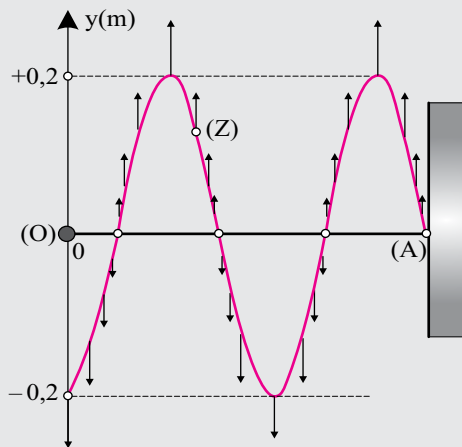
$$|v| = \omega \sqrt{A_Z^2 - y_Z^2} \Rightarrow |v| = 2\pi\sqrt{6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Αφού το σημείο (Ζ) απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του, έχει θετική ταχύτητα, άρα:

$$v = +2\pi\sqrt{6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ) Τη χρονική στιγμή t_1 όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου (εκτός από τους δεσμούς) θα βρίσκονται σε απομάκρυνση $y = \frac{|A'|}{2}$ όπου A' το πλάτος κάθε σημείου.

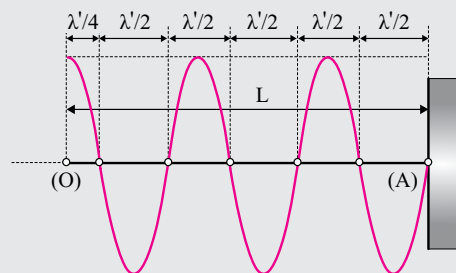
Η διαφορά φάσης του σημείου (O) με το (Z) είναι $\Delta\varphi = \pi \text{ rad}$, οπότε, το στιγμιότυπο της χορδής τη χρονική στιγμή t_1 είναι:



ε) Όταν μεταβάλλουμε τη συχνότητα ταλάντωσης του άκρου (O) του σχοινιού έτσι ώστε να εμφανίζονται στο σχοινί 2 περισσότερες κοιλίες, η μορφή της χορδής φαίνεται παρακάτω σχήμα, από την οποία προκύπτει για το νέο μήκος κύματος:

$$L = \frac{5\lambda'}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{11\lambda}{4} \Rightarrow \frac{11\lambda'}{4} = 0,7\text{m} \Rightarrow \lambda' = \frac{2,8}{11} \text{ m}$$

$$\text{Τελικά ισχύει } \lambda'f' = \lambda f \Rightarrow f' = \frac{\lambda f}{\lambda'} \Rightarrow f' = \frac{110}{7} \text{ Hz}$$



4.97 α) Αφού το σημείο (K) απέχει από την πηγή απόσταση 10λ , το κύμα για να φτάσει σε αυτό θέλει χρόνο $10T$. Για τη χρονική στιγμή $2,45 \text{ s}$ ισχύει:

$$10T + 2T + \frac{T}{4} = 2,45\text{s} \Rightarrow T = 0,2 \text{ s}$$

β) Το σημείο (K) μέχρι τη χρονική στιγμή $2,45 \text{ s}$ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του έχει εκτελέσει $2,25$ ταλαντώσεις άρα, έχει διανύσει απόσταση $9A$ αφού σε κάθε ταλάντωση διανύει απόσταση $4A$. Ισχύει:

$$9A = 4,5\lambda \Rightarrow 9 \cdot 0,2 = 4,5\lambda \Rightarrow \lambda = 0,4 \text{ m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 2 \text{ m/s}$$

γ) Η θέση του σημείου (K) είναι:

$$x_{(K)} = +10\lambda = +4 \text{ m}$$

Η διαφορά φάσης των σημείων (K) και (Λ) είναι:

$$\Delta\varphi_{KL} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x_{KL} \Rightarrow 2,5\pi = \frac{2\pi}{0,4} \cdot \Delta x_{KL} \Rightarrow$$

$$\Delta x_{KL} = 0,5\text{m} \Rightarrow x_{(Λ)} - x_{(K)} = 0,5\text{m} \Rightarrow$$

$$x_{(Λ)} = 4,5 \text{ m}$$

Η φάση του κύματος είναι:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi = 2\pi \left(\frac{t}{0,2} - \frac{x}{0,4} \right) \Rightarrow$$

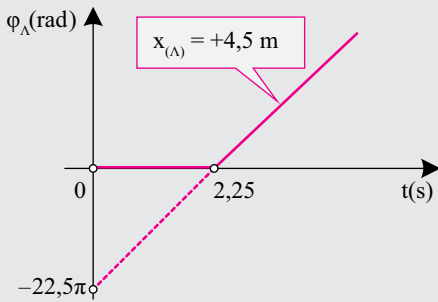
$$\varphi = 10\pi t - 5\pi x \text{ (S.I.)}$$

Η φάση του σημείου (Λ) σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:

$$\varphi_\Lambda = 10\pi t - 5\pi x_\Lambda \Rightarrow$$

$$\varphi_\Lambda = 10\pi t - 22,5\pi \text{ (S.I.)}$$

Το διάγραμμα της φάσης του σημείου (Λ) σε συνάρτηση με τον χρόνο t φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



δ) Η ταχύτητα του σημείου (Λ) μηδενίζεται για δεύτερη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσής του μετά από χρόνο $\frac{3T}{4}$ στην κάτω ακραία θέση του. Το σημείο (Κ) ταλαντώνεται για περισσότερο χρόνο από το (Λ) κατά $T + \frac{T}{4} = \frac{5T}{4}$ αφού απέχει από αυτό απόσταση $0,5 \text{ m} = \lambda + \frac{\lambda}{4}$. Δηλαδή το (Κ) όταν η ταχύτητα του σημείου (Λ) μηδενίζεται για δεύτερη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσής του, ταλαντώνεται για χρόνο $\frac{3T}{4} + \frac{5T}{4} = 2T$. Έτσι η ταχύτητα του σημείου (Κ) εκείνη τη στιγμή θα είναι:

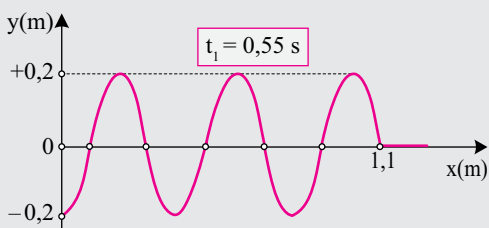
$$v_{(K)} = +v_{\max} = \omega \cdot A = \frac{2\pi}{T} \cdot A \Rightarrow v_{(K)} = 2\pi \text{ m/s}$$

ε) Για τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,55 \text{ s}$ ισχύει:

$$t_1 = 2T + \frac{3T}{4}$$

Το κύμα θα έχει διαδοθεί κατά $2\lambda + \frac{3\lambda}{4} = 1,1 \text{ m}$

Το στιγμιότυπο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



4.98 α) Σε χρονικό διάστημα κάθε το $\Delta t = 0,05 \text{ s}$ σημείο Ο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά μετά την $t = 0$ άρα:

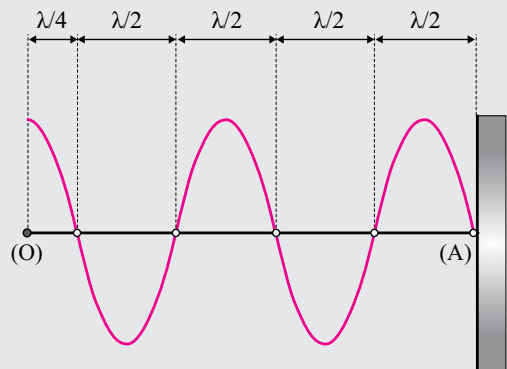
$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 0,1 \text{ s}$$

Η συχνότητα των δύο τρεχόντων κυμάτων ισούται με: $f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 10 \text{ Hz}$

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της κυματικής έχουμε:

$$v_{\delta} = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v_{\delta}}{f} \Rightarrow \lambda = 0,4 \text{ m}$$

Με κατάλληλη διαδικασία δημιουργείται στη χορδή στάσιμο κύμα με 5 συνολικά κοιλίες. Σχεδιάζοντας ένα τυχαίο στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Συμπεραίνουμε ότι το μήκος της χορδής ισούται με:

$$L = 2\lambda + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow L = 9\frac{\lambda}{4} \Rightarrow L = 0,9 \text{ m}$$

β) Σε χρονικό διάστημα κάθε $\Delta t = 0,05 \text{ s}$ το σημείο Ο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά μετά την $t = 0$ και στο χρονικό διάστημα αυτό έχει διανύει διάστημα $S = 0,02 \text{ m}$.

Αυτό σημαίνει ότι $S = 4A \Rightarrow A = 0,01 \text{ m}$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \eta \mu \frac{2\pi t}{T}$$

Άρα, $y = 0,02\sin(5\pi x) \eta\mu(20\pi t)$ (S.I.)

Οι εξισώσεις των δύο τρεχόντων απλών αρμονικών κυμάτων είναι:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \dot{\eta}$$

$$y_1 = 0,01\eta\mu 2\pi(10t - 2,5x) \text{ (S.I.) και}$$

$$y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \dot{\eta}$$

$$y_2 = 0,01\eta\mu 2\pi(10t + 2,5x) \text{ (S.I.)}$$

γ) Το υλικό σημείο M που βρίσκεται στο μέσο της χορδής βρίσκεται στη θέση:

$$x_M = \frac{L}{2} = 0,45 \text{ m}$$

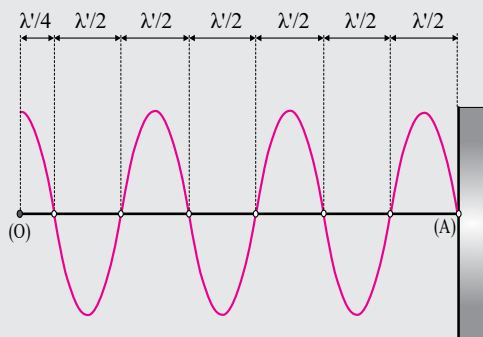
Ισχύει:

$$\frac{y_O}{y_M} = \frac{2A\sin\frac{2\pi x_O}{\lambda} \eta\mu\frac{2\pi t}{T}}{2A\sin\frac{2\pi x_M}{\lambda} \eta\mu\frac{2\pi t}{T}} \Rightarrow$$

$$\frac{y_O}{y_M} = \frac{\sin\frac{2\pi x_O}{\lambda}}{\sin\frac{2\pi x_M}{\lambda}} \Rightarrow \frac{y_O}{y_M} = \frac{\sin 0}{\sin\frac{9\pi}{4}} \Rightarrow$$

$$\frac{y_O}{y_M} = \sqrt{2} \Rightarrow y_M = 0,01\sqrt{2} \text{ m}$$

δ) Μεταβάλλουμε τη συχνότητα των δύο τρεχόντων κυμάτων, ώστε να παραμένουν μεταξύ τους ίσες, στο σημείο A να δημιουργείται δεσμός και μεταξύ του σημείου O (που παραμένει κοιλία και του σημείου A να υπάρχουν άλλες 2 κοιλίες.



Έχουμε:

$$L = 3\lambda' + \frac{\lambda'}{4} \Rightarrow L = \frac{13\lambda'}{4} \Rightarrow \lambda' = \frac{3,6}{13} \text{ m}$$

Η νέα συχνότητα θα είναι:

$$f' = \frac{v_\delta}{\lambda'} \Rightarrow f' = \frac{130}{9} \text{ Hz}$$

Η μεταβολή της συχνότητας ισούται με:

$$\Delta f = f' - f \Rightarrow \Delta f = \frac{40}{9} \text{ Hz}$$

4.99 α) Από το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,35 \text{ s}$ προκύπτουν τα εξής:

$$A = 0,4 \text{ m}$$

$$\frac{7\lambda}{4} = 0,7 \text{ m} \Rightarrow \lambda = 0,4 \text{ m}$$

$$v_\delta = \frac{x_1}{t_1} = \frac{0,7 \text{ m}}{0,35 \text{ s}} \Rightarrow v_\delta = 2 \text{ m/s}$$

β) Για την περίοδο του κύματος έχουμε:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v_\delta} \Rightarrow T = 0,2 \text{ s}$$

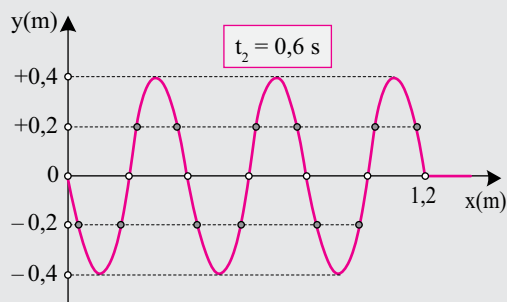
Η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι

$$y = A \cdot \eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu(10\pi t - 5\pi x) \text{ (S.I.)}$$

Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 0,6 \text{ s}$.

Ισχύει $t_2 = 3T$ οπότε, το κύμα τη χρονική στιγμή t_2 έχει διαδοθεί κατά απόσταση $d = 3\lambda = 1,2 \text{ m}$.



Τα σημεία που απέχουν από τη θέση ισορροπίας τους απόσταση $d = 0,2 \text{ m}$ τη χρονική στιγμή $t_2 = 0,6 \text{ s}$, είναι αυτά που βρίσκονται σε απομάκρυνση $y = \pm 0,2 \text{ m}$. Τα σημεία αυτά όπως φαίνεται από το διάγραμμα είναι 12.

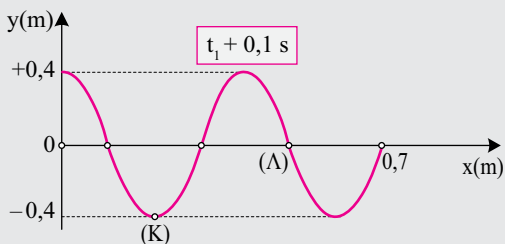
γ) Τα σημεία (Κ) και (Λ) απέχουν μεταξύ τους απόσταση $\Delta x = \frac{3\lambda}{4}$ με το σημείο (Κ) να είναι πιο κοντά στην πηγή του κύματος αφού το κύμα διαδίδεται προς τα θετικά του άξονα. Έτσι όταν το κύμα φτάνει στο (Κ), για να φτάσει στο (Λ) θέλει επιπλέον χρόνο $\Delta t = \frac{3T}{4}$.

Όταν το σημείο (Κ) ολοκληρώνει τη δεύτερη ταλάντωσή του (άρα, έχει περάσει χρόνος $2T$ από τη στιγμή που έφτασε το κύμα σε αυτό), το σημείο (Λ) ταλαντώνεται για χρόνο $\frac{3T}{4}$ λιγότερο από το (Κ) οπότε, ταλαντώνεται για χρόνο $\Delta t' = 2T - \frac{3T}{4} = \frac{5T}{4} = T + \frac{T}{4}$. Εκείνη τη στιγμή το σημείο (Λ) βρίσκεται στην μέγιστη θετική του απομάκρυνση οπότε, για την επιτάχυνσή του έχουμε:

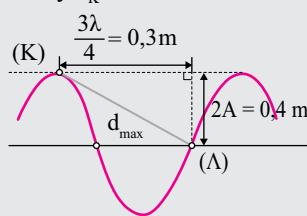
$$\alpha = -\alpha_{\max} = -\omega^2 A \Rightarrow \alpha = -\frac{4\pi^2}{T^2} A \Rightarrow$$

$$\alpha = -40\pi^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

δ) Μετά από χρόνο $\Delta t = 0,1 \text{ s} = \frac{T}{2}$ όλα τα σημεία του στάσιμου κύματος, εκτός από τους δεσμούς, θα βρίσκονται στην άλλη ακραία θέση της ταλάντωσής τους σε σχέση με αυτή που βρίσκονται τη χρονική στιγμή t_1 .



ε) Το σημείο (Λ) είναι δεσμός, οπότε, είναι διαρκώς ακίνητο στη Θέση Ισορροπίας του, ενώ το σημείο (Κ) είναι κοιλία και ταλαντώνεται με πλάτος $A_K = 2A = 0,4 \text{ m}$.



Τα σημεία (Κ) και (Λ) κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής τους απέχουν την μέγιστη απόστασή τους, όταν το σημείο (Κ) είναι σε μια από τις 2 ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του. Έχουμε:

$$d_{\max} = \sqrt{(2A)^2 + \left(\frac{3\lambda}{4}\right)^2} \Rightarrow d_{\max} = 0,5 \text{ m}$$

4.100 α) Το σημείο (Κ) του ελαστικού μέσου σε κάθε περίοδο της ταλάντωσής του διανύει απόσταση $4A$ άρα:

$$d = 4A \Rightarrow A = \frac{d}{4} = 0,2 \text{ m}$$

Ένα «όρος» του κύματος σε κάθε περίοδο διανύει απόσταση ίση με ένα μήκος κύματος, άρα, $\lambda = 0,2 \text{ m}$.

Για την ενέργεια ταλάντωσης του σημείου (Κ) έχουμε:

$$E_T = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot \omega^2 A^2 \Rightarrow$$

$$\omega = 20\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 0,1 \text{ s}$$

Ένα «όρος» του κύματος σε κάθε περίοδο διανύει απόσταση ίση με ένα μήκος κύματος, άρα:

$$\lambda = 0,2 \text{ m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_s = \lambda f \Rightarrow v_s = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_s = 2 \text{ m/s}$$

β) Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu \frac{2\pi t}{T}$$

Άρα:

$$y = 0,4 \sin 10\pi x \cdot \eta\mu 20\pi t \text{ (S.I.)}$$

γ) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,3 \text{ s}$ το κάθε κύμα έχει «προχωρήσει» σε σχέση με τη θέση $x = 0$ κατά $3\lambda = 0,6 \text{ m}$ αφού η περίοδος των δύο κυμάτων είναι $T = 0,1 \text{ s}$.

Άρα, στάσιμο κύμα έχει δημιουργηθεί μεταξύ των θέσεων $-0,6 \text{ m}$ και $+0,6 \text{ m}$ δηλαδή σε μήκος $1,2 \text{ m}$ του ομογενούς ελαστικού μέσου.

δ) Οι θέσεις των κοιλιών υπολογίζονται από την εξίσωση:

$$x_k = N \frac{\lambda}{2} = 0,1N \text{ (I)}$$

Θέλουμε:

$$\begin{aligned} -0,6 \leq x_k \leq 0,6 &\Rightarrow -0,6 \leq 0,1N \leq 0,6 \\ &\Rightarrow -6 \leq N \leq 6 \end{aligned}$$

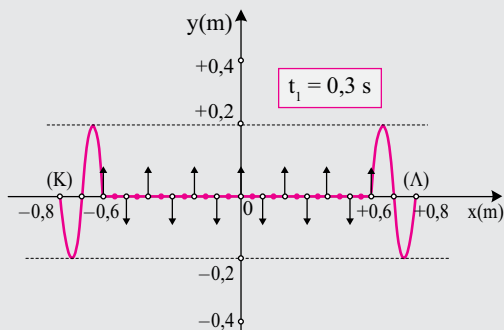
Άρα, $N = \pm 6, \pm 5, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$ (**13 κοιλίες**)

Για τις θέσεις των κοιλιών έχουμε:

$$\pm 0,6\text{m}, \pm 0,5\text{m}, \pm 0,4\text{m}, \pm 0,3\text{m}, \pm 0,2\text{m}, \pm 0,1\text{m}, 0$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,3 \text{ s} = 3T$ όλα τα σημεία στα οποία έχει δημιουργηθεί στάσιμο θα βρίσκονται στη θέση ισορροπίας τους με το σημείο που βρίσκεται στη θέση $x = 0$ να έχει θετική ταχύτητα.

Το στιγμιότυπο του ομογενούς και ελαστικού μέσου μεταξύ των σημείων (Κ) και (Λ) που βρίσκονται στις θέσεις $x_{(K)} = -0,8 \text{ m}$ και $x_{(Λ)} = +0,8 \text{ m}$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



ε) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,3 \text{ s}$ το σημείο (Ζ) που βρίσκεται στη θέση $x_{(Z)} = -0,725 \text{ m}$ ταλαντώνεται εξαιτίας του κύματος που διαδίδεται προς τα θετικά αφού σε αυτό το σημείο δεν έχει ακόμα δημιουργηθεί στάσιμο κύμα. Για την ταχύτητα της ταλάντωσης του σημείου (Ζ) έχουμε:

$$v_Z = \omega A \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{(Z)}}{\lambda} \right) \right] \Rightarrow$$

$$v_Z = 4\pi \cdot \sin(20\pi t + 7,25\pi) \text{ (S.I.)}$$

$$t_1 = 0,3 \text{ s}$$

$$\Rightarrow v_Z = 4\pi \cdot \sin(6\pi + 7,25\pi) \Rightarrow$$

$$v_Z = -2\pi\sqrt{2} \text{ m/s}$$

4.101 α) Συγκρίνουμε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που δίνεται με τον γενικό τύπο της θεωρίας:

$$y = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t}{T}$$

Προκύπτει:

$$2A = 0,6 \text{ m} \Rightarrow A = 0,3 \text{ m}$$

Επίσης ισχύει:

$$2\pi \frac{t}{T} = 20\pi t \Rightarrow T = 0,1 \text{ s}$$

$$\text{Και τέλος } 2\pi \frac{x}{\lambda} = 10\pi x \Rightarrow \lambda = 0,2 \text{ m}$$

Για την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων η συμβολή των οποίων δημιούργησε το στάσιμο κύμα έχουμε:

$$v_s = \lambda f \Rightarrow v_s = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_s = 2 \text{ m/s}$$

β) Τα σημεία του ελαστικού μέσου που κάθε χρονική στιγμή βρίσκονται στη θέση ισορροπίας τους είναι οι δεσμοί του στάσιμου κύματος. Για τις θέσεις των δεσμών ισχύει:

$$x_s = (2N + 1) \frac{\lambda}{4}$$

Θέλουμε:

$$x_K < x_\delta < x_\Lambda \Rightarrow x_K < (2N+1)\frac{\lambda}{4} < x_\Lambda \Rightarrow$$

$$-0,2 < (2N+1) \cdot \frac{0,2}{4} < +0,25 \Rightarrow$$

$$-2,5 < N < 2$$

Επομένως οι ακέραιες τιμές που παίρνει το N είναι $-2, -1, 0, 1$ άρα, **4** σημεία κάθε χρονική στιγμή βρίσκονται στη θέση ισορροπίας τους.

γ) Υπολογίζουμε το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου K .

$$A_K = 0,6 \cdot |\sin 10\pi x_K| = 0,6 \cdot |\sin 10\pi \cdot (-0,2)| \Rightarrow$$

$$A_K = 0,6 \text{ m} = 2A$$

Άρα, το **σημείο K** είναι **κοιλία** του στάσιμου κύματος.

Για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου K τη χρονική στιγμή t_1 που η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του είναι $y = -0,3 \text{ m}$, εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωσή του. Θεωρούμε ότι το σημείο K έχει στοιχειώδη μάζα Δm . Έχουμε:

$$E_{\text{ολ.}} = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} D A_K^2 = \frac{1}{2} \Delta m \cdot v^2 + \frac{1}{2} D y^2 \Rightarrow$$

$$D A_K^2 = \Delta m \cdot v^2 + D y^2 \stackrel{D=\Delta m \cdot \omega^2}{\Rightarrow}$$

$$\Delta m \cdot \omega^2 A_K^2 = \Delta m \cdot v^2 + \Delta m \cdot \omega^2 y^2 \Rightarrow$$

$$\omega^2 A_K^2 = v^2 + \omega^2 y^2 \Rightarrow |v| = \omega \sqrt{A_K^2 - y^2}$$

$$\text{Όμως } \omega = \frac{2\pi}{T} = 20\pi \text{ rad/s} \text{ } \Rightarrow \text{οπότε, τελικά έχουμε:}$$

$$|v| = 20\pi \sqrt{0,6^2 - (-0,3)^2} \Rightarrow |v| = 6\sqrt{3}\pi \text{ m/s}$$

δ) Υπολογίζουμε το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Λ .

$$A_\Lambda = 0,6 \cdot |\sin 10\pi x_\Lambda| = 0,6 \cdot |\sin 10\pi \cdot 0,25| \Rightarrow$$

$$A_\Lambda = 0$$

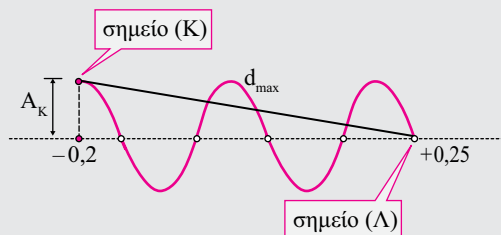
Το σημείο K είναι κοιλία ενώ το σημείο Λ είναι δεσμός.

Τα δύο αυτά σημεία απέχουν την μέγιστη απόσταση μεταξύ τους κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής τους όταν το σημείο K θα βρίσκεται σε

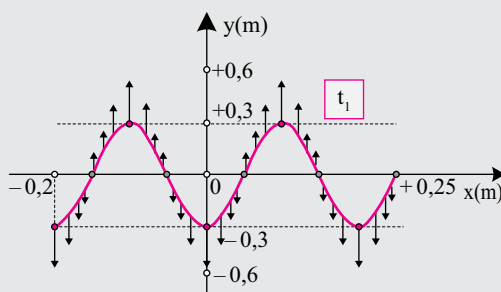
μία ακραία θέση της ταλάντωσής του. Για τη απόσταση αυτή ισχύει:

$$d_{\text{max}} = \sqrt{A_K^2 + (x_\Lambda - x_K)^2} \Rightarrow$$

$$d_{\text{max}} = 0,75 \text{ m}$$



ε) Τη χρονική στιγμή t_1 το σημείο K βρίσκεται στη θέση $y = -0,3 \text{ m}$ πράγμα το οποίο συμβαίνει για όλες τις κοιλίες που έχουν διαφορά φάσης $\Delta\phi = 0$ με το K , ενώ οι κοιλίες που έχουν διαφορά φάσης $\Delta\phi = \pi$ με το K βρίσκονται στη θέση $y = +0,3 \text{ m}$. Επιπλέον το σημείο που βρίσκεται στη θέση $x = 0$ είναι κοιλία και έχει διαφορά φάσης $\Delta\phi = 0$ με το K . Αφού επιβραδύνεται έπειτα αυτό κινείται προς τα κάτω όπως και όλα τα σημεία που έχουν $\Delta\phi = 0$ με αυτό ενώ τα υπόλοιπα που βρίσκονται στη θέση $y = +0,3 \text{ m}$ κινούνται προς τα πάνω. Από το ερώτημα γ έχουμε βρει τον αριθμό των δεσμών οπότε, το στιγμιότυπο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



4.102 α) Από τη σύγκριση της εξίσωσης του κύματος που διαδίδεται:

$$y = \frac{0,4}{\pi} \cdot \eta \mu (10\pi t - 5\pi x)$$

με τη γενική εξίσωση του κύματος:

$$y = A \cdot \eta \mu \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

προκύπτει:

$$A = \frac{0,4}{\pi} \text{ m}, T = 0,2 \text{ s}, f = 5 \text{ Hz},$$

$$\omega = 10 \pi \text{ rad/s}, \lambda = 0,4 \text{ m}.$$

Η περίοδος του κύματος είναι η ίδια με την περίοδο ταλάντωσης της πηγής δηλαδή του σώματος Σ_1 οπότε, έχουμε:

$$k = m_1 \omega^2 \Rightarrow k = 400 \text{ N/m}$$

β) Η ταχύτητα που αποκτάει το Σ_1 μετά την κρούση είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσής του αφού την αποκτά στη $(\Theta.I.)$ του, άρα, ισχύει:

$$v_1' = \omega \cdot A \Rightarrow v_1' = 4 \text{ m/s}$$

Για την ταχύτητα του Σ_2 πριν την κρούση εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. (I) $\rightarrow$ (II)

$$\Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_2 v_0^2 = -m_2 gh \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \Rightarrow v_2 = 10 \text{ m/s}$$

Από Αρχή Διατήρησης της Ορμής έχουμε:

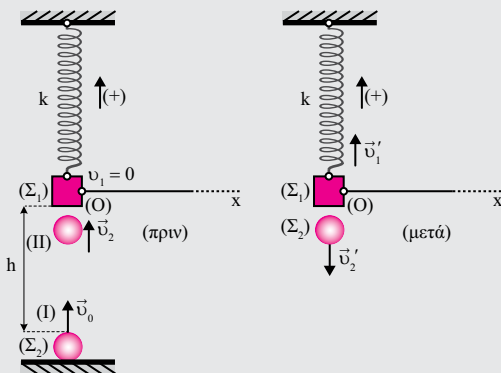
$$\vec{p}_{\text{ολ. (πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ. (μετά)}} \Rightarrow m_2 v_2 = m_1 v_1' - m_2 v_2' \Rightarrow$$

$$v_2' = 6 \text{ m/s}$$

$$K_{\text{ολ. (πριν)}} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 5 \text{ J}$$

$$K_{\text{ολ. (μετά)}} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = 5 \text{ J}$$

Επειδή $K_{\text{ολ. (πριν)}} = K_{\text{ολ. (μετά)}}$, η κρούση είναι ελαστική.



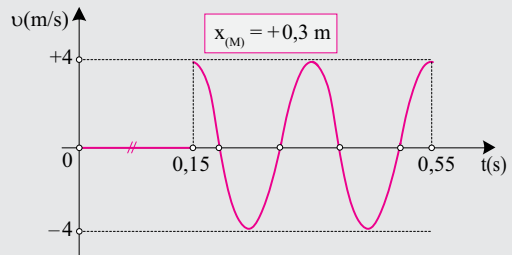
γ) Ισχύει: $v_\delta = \lambda f \Rightarrow v_\delta = 2 \text{ m/s}$

Το κύμα στο Μ φτάνει τη χρονική στιγμή

$$t_M = \frac{x_M}{v_\delta} = 0,15 \text{ s}.$$

$$v_{(z)} = \omega A \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right) \right] \Rightarrow$$

$$v_M = 4 \cdot \sin \left(10\pi t - \frac{3\pi}{2} \right) (\text{S.I.}), t \geq 0,15 \text{ s}$$



δ) $E_{\text{ολ.}} = K + U \xRightarrow{K=U} E_{\text{ολ.}} = 2U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} k y^2 \Rightarrow$

$$y = \pm \frac{A\sqrt{2}}{2} = \pm \frac{0,2\sqrt{2}}{\pi} \text{ m}$$

Επειδή σε κάθε περίοδο η δυναμική και η κινητική ενέργεια ενός σώματος γίνονται ίσες 4 φορές και αφού το Σ_1 ξεκινάει την ταλάντωσή του από τη $\Theta.I.$ του χωρίς αρχική φάση, τότε την 5η φορά που θα γίνουν οι 2 ενέργειες ίσες

το Σ_1 θα βρίσκεται στη θέση $y = + \frac{0,2\sqrt{2}}{\pi} \text{ m}$

για 3η φορά. Έχουμε:

$$y = \frac{0,4}{\pi} \cdot \eta \mu \left(10\pi t - 5\pi x \right) \xRightarrow{y = + \frac{0,2\sqrt{2}}{\pi} \text{ m}, x=0} \Rightarrow$$

$$+ \frac{0,2\sqrt{2}}{\pi} = \frac{0,4}{\pi} \cdot \eta \mu 10\pi t \Rightarrow \eta \mu 10\pi t = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$t = \frac{\kappa}{5} + \frac{1}{40} (1) \text{ ή } t = \frac{\kappa}{5} + \frac{3}{40} (2)$$

Η σχέση (1) για $\kappa = 1$ δίνει την 5η φορά που θα γίνουν οι 2 ενέργειες ίσες και είναι ίση με $t = 0,225 \text{ s}.$

Την συγκεκριμένη χρονική στιγμή το κύμα θα έχει διαδοθεί κατά απόσταση

$$x = v_{\delta} t \Rightarrow x = 0,45 \text{ m}$$

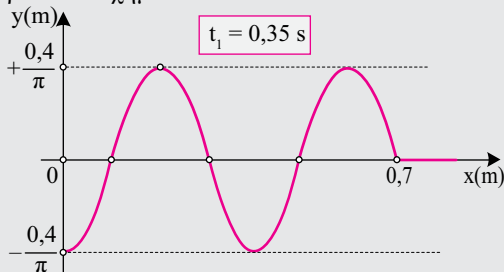
ε) $t_1 = 0,35 \text{ s} \Rightarrow t_1 = T + \frac{3T}{4}$

Σε κάθε περίοδο το κύμα διαδίδεται κατά απόσταση 1λ .

Σε χρόνο $T + \frac{3T}{4}$ το κύμα θα διαδοθεί κατά

απόσταση $\lambda + \frac{3\lambda}{4} = 0,7 \text{ m}$.

Το στιγμιότυπο του κύματος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



4.103 α) Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,1 \text{ s}$ έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα ανάμεσα στις θέσεις $-0,20 \text{ m}$ και $+0,20 \text{ m}$ λόγω της συμβολής των δύο κυμάτων. Όλα τα άλλα σημεία του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται με πλάτος $A = 0,3 \text{ m}$, που είναι και το πλάτος ταλάντωσης κάθε κύματος.

Επίσης κάθε κύμα έχει διαδοθεί κατά απόσταση $\Delta x = 0,20 \text{ m}$ στο χρονικό διάστημα 0 έως $0,1 \text{ s}$ που τυχαίνει όπως φαίνεται από το διάγραμμα να είναι και το μήκος κύματος δηλαδή $\lambda = 0,2 \text{ m}$. Η χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με την

περίοδο, άρα, $T = 0,1 \text{ s}$ οπότε $f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 10 \text{ Hz}$

(Σε χρόνο T το κάθε κύμα διαδίδεται κατά λ)

$$v_{\delta} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{\delta} = 2 \text{ m/s}$$

β) Στις θέσεις $-0,2 \text{ m}$, $-0,1 \text{ m}$, 0 m , $0,1 \text{ m}$, $0,2 \text{ m}$ υπάρχουν κοιλίες, ενώ στις θέσεις $-0,15 \text{ m}$, $-0,05 \text{ m}$, $0,05 \text{ m}$, $0,15 \text{ m}$ υπάρχουν δεσμοί του στάσιμου κύματος.

Για τα σημεία του ελαστικού μέσου που βρίσκονται σε θέσεις $x < -0,2 \text{ m}$ η απομάκρυνση τους οφείλεται στο κύμα που διαδίδεται προς τα θετικά άρα:

$$y = A \cdot \eta\mu \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \Rightarrow$$

$$y = 0,3 \cdot \eta\mu(20\pi t - 10\pi x) \text{ (S.I.)}$$

Για τα σημεία του ελαστικού μέσου που βρίσκονται σε θέσεις $x > +0,2 \text{ m}$ η απομάκρυνση τους οφείλεται στο κύμα που διαδίδεται προς τα αρνητικά άρα:

$$y = A \cdot \eta\mu \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \right] \Rightarrow$$

$$y = 0,3 \cdot \eta\mu(20\pi t + 10\pi x) \text{ (S.I.)}$$

Για τα σημεία του ελαστικού μέσου που βρίσκονται σε θέσεις $-0,2 \text{ m} \leq x \leq +0,2 \text{ m}$ είναι σημεία στάσιμου κύματος άρα, η απομάκρυνσή τους είναι:

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu \frac{2\pi t}{T} \Rightarrow$$

$$y = 0,6\sigma\upsilon\nu 10\pi x \cdot \eta\mu 20\pi t \text{ (S.I.)}$$

γ) Τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + T = 0,2 \text{ s}$, στάσιμο κύμα έχει διαδοθεί μεταξύ των θέσεων $-0,4 \text{ m}$ και $+0,4 \text{ m}$ αφού κάθε ένα από τα τρέχοντα κύματα έχει διαδοθεί επιπλέον κατά απόσταση ενός μήκους κύματος σε σχέση με τη χρονική στιγμή t_1 .

Σημεία με μέγιστο πλάτος (κοιλίες)

$$-0,4 \text{ m} \leq x_{\text{κοιλίας}} \leq +0,4 \text{ m} \Rightarrow$$

$$-0,4 \leq \frac{N\lambda}{2} \leq +0,4 \Rightarrow$$

$$-0,4 \leq 0,1N \leq +0,4 \Rightarrow -4 \leq N \leq +4$$

Επειδή N ακέραιος οι τιμές του N είναι $N = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$, οπότε, οι κοιλίες είναι **9** μαζί με τα σημεία που βρίσκονται στις θέσεις $-0,4 \text{ m}$ και $+0,4 \text{ m}$.

Σημεία που παραμένουν διαρκώς ακίνητα (δεσμοί).

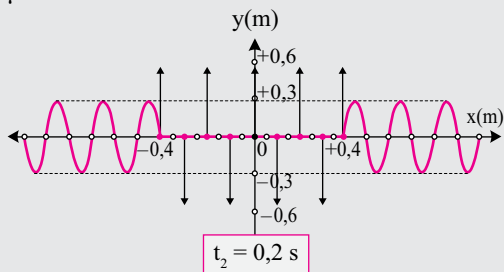
$$-0,4 \text{ m} \leq x_{\text{δεσμού}} \leq +0,4 \text{ m} \Rightarrow$$

$$-0,4 \leq (2N+1) \cdot \frac{\lambda}{2} \leq +0,4 \Rightarrow$$

$$-0,4 \leq 0,1N + 0,05 \leq +0,4 \Rightarrow -4,5 \leq N \leq +3,5$$

Επειδή N ακέραιος οι τιμές του N είναι $N = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, οπότε, οι δεσμοί είναι **8**.

δ) Τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + T = 0,2 \text{ s} = 2T$, στάσιμο κύμα έχει διαδοθεί μεταξύ των θέσεων $-0,4 \text{ m}$ και $+0,4 \text{ m}$. Στη θέση $x = 0$ υπάρχει κοιλία και εκείνη τη στιγμή θα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της κινούμενη προς τα θετικά. Οπότε, όλα τα σημεία του στάσιμου κύματος είναι στη θέση ισορροπίας τους. Άρα, το στιγμιότυπο είναι:



ε) Προφανώς, σε όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου που δεν έχει διαδοθεί στάσιμο κύμα το πλάτος ταλάντωσής τους είναι ίσο με το πλάτος ταλάντωσης των δύο κυμάτων. Αυτά βρίσκονται σε θέσεις για τις οποίες ισχύει $x > +0,4 \text{ m}$ και $x < -0,4 \text{ m}$.

Για τα σημεία του ελαστικού μέσου που βρίσκονται σε θέσεις $-0,4 \text{ m} \leq x \leq 0,4 \text{ m}$ έχω:

$$A' = 0,6 \cdot |\sin 10\pi x| \quad A' = 0,3\sqrt{2} \text{ m} \Rightarrow$$

$$0,3\sqrt{2} = 0,6 \cdot |\sin 10\pi x| \Rightarrow$$

$$|\sin 10\pi x| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 10\pi x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$10\pi x = (2\kappa + 1) \cdot \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = (2\kappa + 1) \cdot \frac{1}{40}$$

$$\text{όπου } \kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ομως:

$$-0,4 \text{ m} \leq x \leq +0,4 \text{ m} \Rightarrow$$

$$-0,4 \leq (2\kappa + 1) \cdot \frac{1}{40} \leq +0,4 \Rightarrow -8,5 \leq \kappa \leq 7,5$$

Άρα, υπάρχουν **16** σημεία τη χρονική στιγμή t_2 που ταλαντώνονται με πλάτος:

$$A' = 0,3\sqrt{2} \text{ m}$$

και βρίσκονται στις θέσεις:

$-0,375 \text{ m}, -0,325 \text{ m}, -0,275 \text{ m}, -0,225 \text{ m}, -0,175 \text{ m}, -0,125 \text{ m}, -0,075 \text{ m}, -0,025 \text{ m},$
 $+0,025 \text{ m}, +0,075 \text{ m}, +0,125 \text{ m}, +0,175 \text{ m}, +0,225 \text{ m}, +0,275 \text{ m}, +0,325 \text{ m}, +0,375 \text{ m}$

στ) Τη χρονική στιγμή $t_3 = t_1 + \frac{3T}{4} = 0,175 \text{ s}$

κάθε ένα απ' τα δύο κύματα έχει «προχωρήσει» κατά $\lambda + \frac{3\lambda}{4}$ απόσταση δηλαδή $0,35 \text{ m}$,

οπότε, στάσιμο κύμα έχει δημιουργηθεί μεταξύ των θέσεων $-0,35 \text{ m} \leq x \leq +0,35 \text{ m}$. Άρα, το σημείο M ταλαντώνεται εξαιτίας του κύματος που διαδίδεται προς τα αρνητικά οπότε:

$$y = 0,3 \cdot \eta\mu(20\pi t + 10\pi x)$$

$$t_3 = 0,175 \text{ s}, x_M = 0,45 \text{ m} \Rightarrow y_M = 0$$

$$v = \omega A \cdot \sin(20\pi t + 10\pi x)$$

$$t_3 = 0,175 \text{ s}, x_M = 0,45 \text{ m} \Rightarrow v_M = 6\pi \text{ m/s}$$

Κεφάλαιο 5: Ηλεκτρομαγνητισμός

ΘΕΜΑ Α

- 5.1 δ) 5.2 α) 5.3 γ) 5.4 δ)
 5.5 β) 5.6 α) 5.7 δ) 5.8 β)
 5.9 α) Λ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Σ
 5.10 δ) 5.11 α) 5.12 α) 5.13 γ)
 5.14 β) 5.15 β) 5.16 γ) 5.17 α)
 5.18 γ) 5.19 α) 5.20 δ) 5.21 β)

ΘΕΜΑ Β

5.51 Σωστή απάντηση το α).

Για ένα στοιχειώδες τμήμα $\Delta \vec{l}$ του ευθύγραμμου τμήματος του αγωγού (1), εφαρμόζουμε τον νόμο των Biot-Savart για να υπολογίσουμε το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί στο Κ.

Ισχύει:

$$\Delta B_{(K),1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot \Delta \ell}{\alpha^2} \cdot \eta \mu 0^\circ \Rightarrow \Delta B_{(K),1} = 0$$

Το ίδιο ακριβώς θα ισχύει και για το ευθύγραμμο τμήμα του αγωγού (2).

Εφαρμόζουμε τον νόμο των Biot-Savart για στοιχειώδες τμήμα του ημικυκλίου του αγωγού (1) για να υπολογίσουμε το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί στο Κ. Έχουμε:

$$\Delta B'_{(K),1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot \Delta \ell}{r^2} \cdot \eta \mu \theta(1)$$

Ισχύει ότι κάθε στοιχειώδες τμήμα $\Delta \vec{l}$ απέχει από το σημείο Κ απόσταση $r = \alpha_1$ ενώ η γωνία μεταξύ κάθε στοιχειώδους τμήματος $\Delta \vec{l}$ και $\vec{r}$ είναι $\theta = \pi/2$ rad. Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\Delta B'_{(K),1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot \Delta l}{\alpha_1^2} \cdot \eta \mu \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta B'_{(K),1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot \Delta l}{\alpha_1^2}$$

- 5.22 δ) 5.23 α) 5.24 δ) 5.25 α)
 5.26 β) 5.27 β) 5.28 β) 5.29 β)
 5.30 α) 5.31 β) 5.32 δ) 5.33 β)
 5.34 β) 5.35 α) 5.36 β) 5.37 δ)
 5.38 α) 5.39 δ) 5.40 β) 5.41 α)
 5.42 β)
 5.43 α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Σ
 5.44 β) 5.45 γ) 5.46 γ) 5.47 α)
 5.48 δ) 5.49 β) 5.50 β)

Για το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί στο Κ, ολόκληρο το ημικόκλιο, ισχύει:

$$B'_{(K),1} = \Sigma \Delta B'_{(K),1} \Rightarrow B'_{(K),1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1}{\alpha_1^2} \cdot \Sigma \Delta l \Rightarrow$$

$$B'_{(K),1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1}{\alpha_1^2} \cdot \pi \alpha_1 \Rightarrow$$

$$B'_{(K),1} = \frac{\mu_0 I_1}{4\alpha_1}$$

Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού το διάνυσμα του $\vec{B}'_{(K),1}$ έχει κατεύθυνση κατακόρυφη με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για το ημικυκλικό τμήμα του αγωγού (2) προκύπτει:

$$B'_{(K),2} = \frac{\mu_0 I_2}{4\alpha_2}$$

Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού το διάνυσμα του $\vec{B}'_{(K),2}$ έχει κατεύθυνση κατακόρυφη με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.

Το μέτρο της έντασης που δημιουργούν και οι δύο αγωγοί στο Κ θα είναι:

$$B_{(K)} = B'_{(K),1} + B'_{(K),2} \Rightarrow B_{(K)} = \frac{\mu_0 I_1}{4\alpha_1} + \frac{\mu_0 I_2}{4\alpha_2} \Rightarrow$$

$$B_{(K)} = \frac{\mu_0 I_1}{4\alpha_1} + \frac{\mu_0 3I_1}{4 \cdot 1,5 \cdot \alpha_1} \Rightarrow$$

$$B_{(K)} = \frac{3\mu_0 I_1}{4\alpha_1}$$

5.52 Σωστή απάντηση το β).

Από την εφαρμογή του νόμου του Ampere έχουμε:

$$\sum B \cdot \Delta l \cdot \sin \theta = \mu_0 (I_1 - I_2 - I_3 + I_4) \Rightarrow \\ 0 = \mu_0 (I - 2I - I + I_4) \Rightarrow I_4 = 2I$$

5.53 Σωστή απάντηση το β).

Σε γωνία $\Delta\theta$ ο αγωγός σαρώνει εμβαδόν ΔS .
Σε γωνία 2π ο αγωγός σαρώνει εμβαδόν:

$$\pi(l+d)^2 - \pi d^2$$

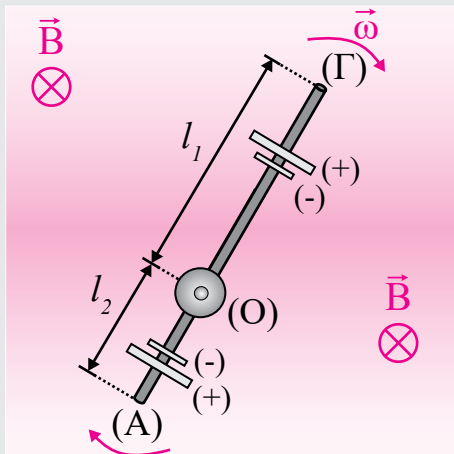
Ισχύει:

$$\Delta S = \frac{1}{2} l(l+2d) \cdot \Delta\theta \Rightarrow \\ \Delta S = \frac{1}{2} l \left(l + 2 \frac{l}{2} \right) \cdot \Delta\theta \Rightarrow \Delta S = l^2 \cdot \Delta\theta$$

Από τον νόμο του Faraday προκύπτει:

$$E_{\epsilon\pi} = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| \Rightarrow E_{\epsilon\pi} = \frac{B \cdot \Delta S}{\Delta t} \Rightarrow \\ E_{\epsilon\pi} = \frac{Bl^2 \cdot \Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow E_{\epsilon\pi} = Bl^2 \omega$$

5.54 Σωστή απάντηση το β).



Προσδιορίζουμε την πολικότητα της ΗΕΔ από επαγωγή στα τμήματα ΑΟ και ΟΓ του αγωγού. Το μέτρο της ΗΕΔ από επαγωγή σε κάθε τμήμα του αγωγού είναι:

$$E_{\epsilon\pi, \Gamma O} = \frac{1}{2} B \omega l_1^2 \text{ και } E_{\epsilon\pi, AO} = \frac{1}{2} B \omega l_2^2$$

Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του αγωγού είναι:

$$V_{AG} = E_{\epsilon\pi, AO} - E_{\epsilon\pi, \Gamma O} \Rightarrow V_{AG} = \frac{1}{2} B \omega (l_2^2 - l_1^2)$$

5.55 Σωστή απάντηση το γ).

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για να βρούμε το μέτρο της ταχύτητας που αποκτάει το σωματίδιο. Ισχύει:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{F_{\eta\lambda}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - 0 = qV \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

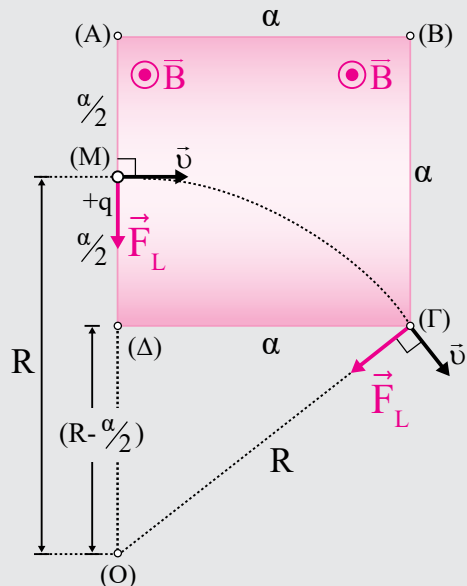
Ο χρόνος κίνησης στο μαγνητικό πεδίο είναι:

$$t = \frac{T}{4} \Rightarrow t = \frac{Bq}{4} \Rightarrow \frac{m}{q} = \frac{2Bt}{\pi}$$

Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι:

$$R = \frac{mv}{Bq} \Rightarrow R = \frac{2Bt}{B\pi} \sqrt{\frac{2qV}{m}} \Rightarrow R = 2 \sqrt{\frac{tV}{\pi B}}$$

5.56 Σωστή απάντηση το γ).



Βρίσκουμε το κέντρο της κυκλικής τροχιάς του σωματιδίου. Από το τρίγωνο ΓΔΟ έχουμε:

$$\left(R - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \alpha^2 = R^2 \Rightarrow R = \frac{5\alpha}{4} \Rightarrow \frac{mv}{Bq} = \frac{5\alpha}{4} \Rightarrow v = \frac{5\alpha Bq}{4m}$$

5.57 Σωστή απάντηση το α).

Υπολογίζουμε το βήμα της έλικας. Ισχύει:

$$\beta = v \cdot \sin 30^\circ \cdot T \Rightarrow \beta = v \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\pi m}{B|q|} \Rightarrow \beta = 2\sqrt{3}\pi R$$

Ο αριθμός των περιφορών του σωματιδίου θα είναι:

$$N = \frac{\Delta x}{\beta} \Rightarrow N = \left(\frac{5\sqrt{3}\pi R}{2\sqrt{3}\pi R}\right) \text{ περ.} \Rightarrow N = 2,5 \text{ περ.}$$

5.58 Σωστή απάντηση το γ).

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας που θα αποκτήσει το ηλεκτρόνιο. Ισχύει:

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = |q_e| V \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2|q_e|V}{m_e}}$$

Το βήμα της έλικας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\beta = v \cdot \sin 60^\circ \cdot T \Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{2|q_e|V}{m_e}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2m_e}{B|q_e|} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{B} \sqrt{\frac{2V m_e}{|q_e|}}$$

5.59 Σωστή απάντηση το γ).

Όταν ο μεταγωγός είναι στη θέση (1), το ρεύμα έχει σταθεροποιηθεί στην τιμή I_0 . Από τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα έχουμε:

$$I_0 = \frac{E}{R}$$

Η θερμότητα που θα παραχθεί στο κύκλωμα από τη στιγμή που ο μεταγωγός μεταφέρθηκε στη θέση (2) μέχρι να μηδενιστεί το ρεύμα στο κύκλωμα είναι:

$$Q = U_B \Rightarrow Q = \frac{1}{2} L I_0^2 \Rightarrow Q = \frac{L E^2}{2 R^2}$$

5.60 Σωστή απάντηση το γ).

Η τελική τιμή της έντασης του ρεύματος θα είναι:

$$I_0 = \frac{E}{R+r} \Rightarrow I_0 = \frac{E}{R + \frac{R}{10}} \Rightarrow I_0 = \frac{10E}{11R}$$

Τη χρονική στιγμή t_1 η ένταση του ρεύματος είναι:

$$i = \frac{55}{100} I_0 \Rightarrow i = \frac{55}{100} \cdot \frac{10E}{11R} \Rightarrow i = \frac{E}{2R}$$

Από τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff έχουμε:

$$E - |E_{\text{αυτ}}| = i(R+r) \Rightarrow E - L \left| \frac{di}{dt} \right| = i(R+r) \Rightarrow$$

$$E - L \left| \frac{di}{dt} \right| = \frac{E}{2R} \left(R + \frac{R}{10} \right) \Rightarrow$$

$$\left| \frac{di}{dt} \right| = \frac{9E}{20L}$$

Επειδή η ένταση του ρεύματος αυξάνεται, ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος είναι θετικός, επομένως προκύπτει:

$$\frac{di}{dt} = \frac{9E}{20L}$$

5.61 Σωστή απάντηση το γ).

Υπολογίζουμε τη θερμότητα που παράγεται στον αντιστάτη σε χρόνο μιας περιόδου του εναλλασσόμενου ρεύματος:

$$Q = Q_{\left(0-\frac{T}{4}\right)} + Q_{\left(\frac{T}{4}-\frac{3T}{4}\right)} + Q_{\left(\frac{3T}{4}-T\right)} = I^2 R \left(\frac{T}{4} - 0 \right) + I^2 R \left(\frac{3T}{4} - \frac{T}{4} \right) + 0 = I^2 R \frac{3T}{4}$$

Η ενεργός τιμή του παραπάνω εναλλασσόμενου ρεύματος πρέπει να προκαλεί το ίδιο θερμικό αποτέλεσμα στον αντιστάτη σε χρονική διάρκεια μιας περιόδου, άρα:

$$Q_{\text{εν.}} = Q \Rightarrow I_{\text{εν.}}^2 R T = I^2 R \frac{3T}{4} \Rightarrow I_{\text{εν.}} = \frac{I\sqrt{3}}{2}$$

5.62

Α. Σωστή απάντηση το α).

Αρχικά, όταν ο διακόπτης δ είναι ανοιχτός, στα άκρα του αγωγού ΚΛ αναπτύσσεται τάση

από επαγωγή αφού αυτός έχει ταχύτητα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές του γραμμές. Για την τάση αυτή ισχύει:

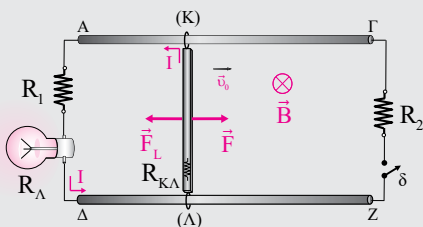
$$E_{\text{επ.}} = Bv_0L(1)$$

Το κλειστό κύκλωμα ΚΑΔΛΚ διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα έντασης:

$$I = \frac{E_{\text{επ.}}}{R_{\text{ολ.}}} \Rightarrow I = \frac{E_{\text{επ.}}}{R_1 + R_{\Lambda} + R_{\text{ΚΛ}}} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} I = \frac{Bv_0L}{3R}(2)$$

Ο αγωγός ΚΛ, αφού διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, δέχεται δύναμη Laplace η οποία αντιστέκεται στην κίνηση του αγωγού (κανόνας του Lenz) και έχει μέτρο:

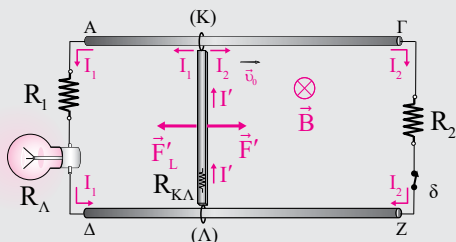
$$F_L = BIL \Rightarrow F_L = \frac{B^2L^2v_0}{3R}(3)$$



Για να κινείται ο αγωγός ΚΛ με σταθερή ταχύτητα πρέπει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = F_L \stackrel{(3)}{\Rightarrow} F = \frac{B^2L^2v_0}{3R}(4)$$

Η τάση στα άκρα του λαμπτήρα είναι $V_{\Lambda} = I \cdot R \Rightarrow V_{\Lambda} = \frac{Bv_0L}{3}(5)$ η οποία θα ισούται με την τάση κανονικής λειτουργίας του αφού αυτός λειτουργεί κανονικά.



Τελικά, όταν ο διακόπτης δ είναι κλειστός, στα άκρα του αγωγού ΚΛ αναπτύσσεται πάλι τάση από επαγωγή αλλά τώρα στο κύκλωμα υπάρχουν 3 ρεύματα όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Για να εξακολουθεί ο λαμπτήρας να λειτουργεί κανονικά θα πρέπει η τάση στα άκρα του να είναι πάλι ίση με την τάση κανονικής του λειτουργίας. Ισχύει:

$$V'_{\Lambda} = V_{\Lambda} \stackrel{(5)}{\Rightarrow} I_1 \cdot R = \frac{Bv_0L}{3} \Rightarrow I_1 = \frac{Bv_0L}{3R}(6)$$

Για την ολική αντίσταση του κυκλώματος όταν ο διακόπτης είναι κλειστός έχουμε:

$$R_{1,\Lambda} = R_1 + R_{\Lambda} = 2R$$

$$R_{1,\Lambda,2} = \frac{R_{1,\Lambda} \cdot R_2}{R_{1,\Lambda} + R_2} = \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = R$$

$$R_{\text{ολ.}} = R_{1,\Lambda,2} + R_{\text{ΚΛ}} = R + R = 2R$$

Για την νέα τάση από επαγωγή στα άκρα του αγωγού ισχύει $E'_{\text{επ.}} = Bv'_0L$ ενώ για το ολικό ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ έχουμε:

$$I' = \frac{E'_{\text{επ.}}}{R'_{\text{ολ.}}} \Rightarrow I' = \frac{Bv'_0L}{2R}(7)$$

$$\text{Επειδή } V_{1,\Lambda} = V_2 \Rightarrow I_1 \cdot 2R = I_2 \cdot 2R \Rightarrow I_1 = I_2$$

και αφού $I' = I_1 + I_2$ τελικά παίρνουμε:

$$I_1 = I_2 = \frac{I'}{2} \stackrel{(7)}{\Rightarrow} I_1 = \frac{Bv'_0L}{4R} \stackrel{(6)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{Bv_0L}{3R} = \frac{Bv'_0L}{4R} \Rightarrow v'_0 = \frac{4v_0}{3}$$

Β. Σωστή απάντηση το γ).

Για τη νέα δύναμη Laplace που ασκείται στον αγωγό ΚΛ όταν ο διακόπτης είναι κλειστός ισχύει:

$$F'_L = BI'L \Rightarrow F'_L = \frac{B^2L^2v'_0}{2R} \stackrel{(7)}{\Rightarrow}$$

$$F'_L = \frac{2B^2L^2v_0}{3R}(8)$$

Για να κινείται ο αγωγός ΚΛ με σταθερή ταχύτητα πρέπει:

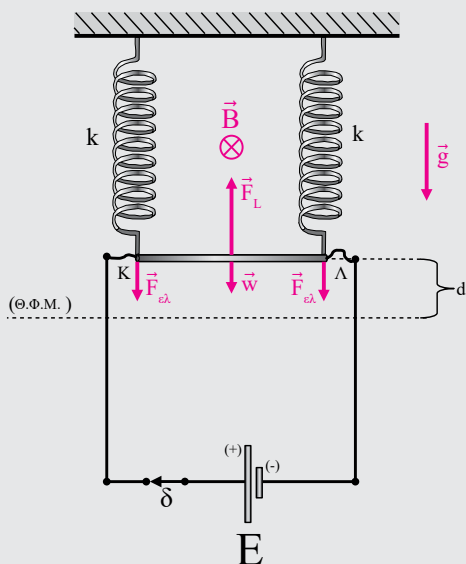
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F' = F'_L \stackrel{(8)}{\Rightarrow} F' = \frac{2B^2L^2v_0}{3R} \Rightarrow$$

$$F' = 2F$$

5.63 Σωστή απάντηση το α).

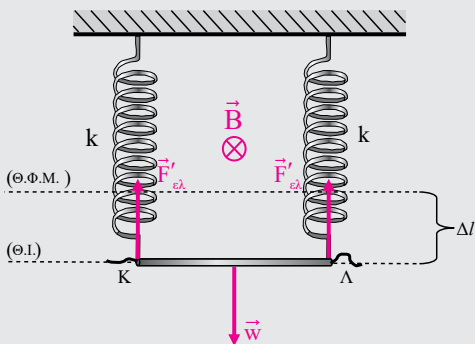
Στην αρχική κατάσταση ισορροπίας του αγωγού έχουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma F &= 0 \Rightarrow 2F_{ελ.} + w = F_L \Rightarrow \\ 2kd + mg &= BI l \Rightarrow \\ 2kd + mg &= B \frac{E}{R} l \Rightarrow R = \frac{B/E}{2kd + mg} \quad (1) \end{aligned}$$



Όταν ανοίξουμε το διακόπτη δ , ο αγωγός αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D = 2k$, γύρω από τη θέση ισορροπίας του, για την οποία ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow 2F'_{ελ.} = w \Rightarrow 2k \cdot \Delta l = mg \quad (2)$$



Τη στιγμή που ανοίγουμε το διακόπτη ο αγωγός έχει ταχύτητα $v = 0$, άρα, βρίσκεται σε

ακραία θέση της ταλάντωσής και επειδή καταργείται η δύναμη Laplace θα κινηθεί προς τα κάτω. Έτσι το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει είναι $A = d + \Delta l$.

Για την ολική ενέργεια της ταλάντωσης του ισχύει:

$$\begin{aligned} E_{ολ.} &= 9kd^2 \Rightarrow \frac{1}{2} DA^2 = 9kd^2 \Rightarrow \\ \frac{1}{2} 2kA^2 &= 9kd^2 \Rightarrow A^2 = 9d^2 \Rightarrow A = 3d \Rightarrow \\ d + \Delta l &= 3d \Rightarrow \Delta l = 2d \quad (3) \end{aligned}$$

$$(2) \Rightarrow 2k \cdot 2d = mg \Rightarrow 4kd = mg \quad (4)$$

$$\text{Τελικά } (1) \Rightarrow R = \frac{B/E}{2kd + 4kd} \Rightarrow R = \frac{B/E}{6kd}$$

5.64 Σωστή απάντηση το β).

Οι δύο αγωγοί είναι κατασκευασμένοι από το ίδιο σύρμα του ίδιου μήκους, άρα:

$$L_K = L_\Sigma \Rightarrow N_1 2\pi r_1 = N_2 2\pi r_2 \Rightarrow$$

$$N_1 r_1 = N_2 0,5 r_1 \Rightarrow N_2 = 2N_1 \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι η αντίσταση ενός αγωγού σταθερής διατομής είναι ανάλογη του μήκους του.

Επειδή:

$$L_K = L_\Sigma \Rightarrow R_K = R_\Sigma \quad (2)$$

Άρα, η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού αγωγού είναι:

$$B_K = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I_K}{r_1} N_1 \Rightarrow B_K = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi \frac{V}{R_K}}{r_1} N_1 \Rightarrow$$

$$B_K = \frac{\mu_0 V \cdot N_1}{2r_1 R_K} \quad (3)$$

Ενώ του σωληνοειδούς είναι:

$$B_\Sigma = \frac{\mu_0}{4\pi} 4\pi I_\Sigma \frac{N_2}{l} \Rightarrow$$

$$B_\Sigma = \frac{\mu_0}{4\pi} 4\pi \frac{V}{R_\Sigma} \cdot \frac{2N_1}{8r_1} \Rightarrow B_\Sigma = \frac{\mu_0 V \cdot N_1}{4R_K r_1} \quad (4)$$

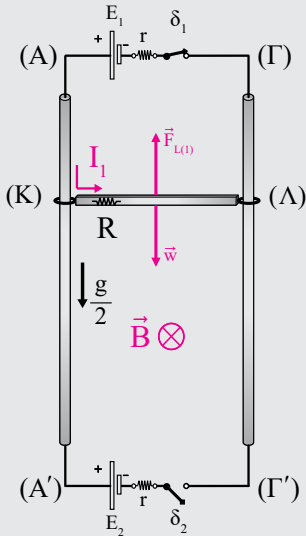
Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3) και

$$(4), \text{ έχουμε } \frac{B_K}{B_\Sigma} = 2.$$

5.65 Σωστή απάντηση το γ).

Όταν κλείσουμε τον διακόπτη δ_1 και αφήσουμε τον αγωγό ΚΛ ελεύθερο να κινηθεί, έχουμε: 2^{ος} Νόμος του Νεύτωνα:

$$\begin{aligned}\Sigma F &= m\alpha \Rightarrow \\ mg - F_{L(1)} &= m\alpha \Rightarrow mg - BI_1 l = m \frac{g}{2} \Rightarrow \\ m \frac{g}{2} &= BI_1 l \Rightarrow m \frac{g}{2} = B \frac{E_1}{R+r} l \Rightarrow \\ E_1 &= \frac{mg(R+r)}{2Bl} \quad (1)\end{aligned}$$

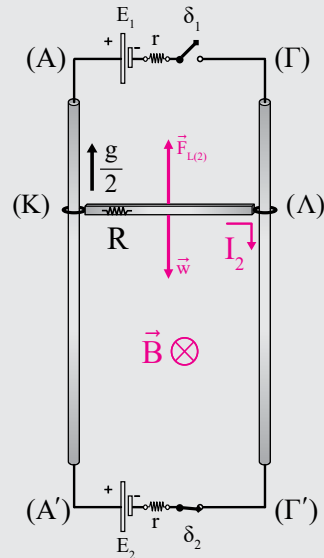


Όταν κλείσουμε τον διακόπτη δ_2 και αφήσουμε τον αγωγό ΚΛ ελεύθερο να κινηθεί, έχουμε: 2^{ος} Νόμος του Νεύτωνα:

$$\begin{aligned}\Sigma F &= m\alpha \Rightarrow \\ F_{L(2)} - mg &= m\alpha' \Rightarrow BI_2 l - mg = m \frac{g}{2} \Rightarrow \\ \frac{3mg}{2} &= BI_2 l \Rightarrow \frac{3mg}{2} = B \frac{E_2}{R+r} l \Rightarrow \\ E_2 &= \frac{3mg(R+r)}{2Bl} \quad (2)\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$E_2 = 3E_1$$



5.66 Σωστή απάντηση το β).

Α' Τρόπος

Τόσο στην περίπτωση του σχήματος Α όσο και στην περίπτωση του σχήματος Β, καθώς ο μαγνήτης αρχικά πλησιάζει και μετά απομακρύνεται από τους δύο δακτυλίους, όλο και περισσότερες αρχικά μαγνητικές δυναμικές γραμμές και στη συνέχεια όλο και λιγότερες μαγνητικές δυναμικές γραμμές διέρχονται από αυτούς, οπότε μεταβάλλεται η μαγνητική ροή και με βάση τον νόμο επαγωγής του Faraday αναπτύσσεται τάση από επαγωγή στα άκρα τους. Στην περίπτωση όμως που ο δακτύλιος φέρει εγκοπή (σχήμα Α), δεν υπάρχει κλειστό κύκλωμα, άρα, δε διαρρέεται ο δακτύλιος από επαγωγικό ρεύμα οπότε δε δημιουργεί αυτός μαγνητικό πεδίο. Έτσι, ο μαγνήτης στην περίπτωση του σχήματος Α εκτελεί ελεύθερη πτώση. Όταν φτάσει στη θέση ΙΙ έχει κινητική ενέργεια:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow K = 32J$$

Στην περίπτωση που ο δακτύλιος δεν φέρει εγκοπή (σχήμα Β), λόγω της τάσης που αναπτύσσεται στον δακτύλιο, επειδή έχουμε κλειστό κύκλωμα, αυτό θα διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα οπότε ο δακτύλιος θα δημιουργεί

μαγνητικό πεδίο. Η φορά του επαγωγικού ρεύματος που θα διαρρέει τον δακτύλιο με βάση τον κανόνα του Lenz θα αντιτίθεται στο αίτιο που το προκάλεσε, δηλαδή στην κίνηση του μαγνήτη (αρχικά καθώς πλησιάζει τον δακτύλιο και έπειτα καθώς απομακρύνεται από αυτόν). Έτσι το μαγνητικό πεδίο που θα δημιουργήσει ο δακτύλιος θα επιβραδύνει την κίνηση του μαγνήτη, οπότε όταν φτάσει στη θέση II θα έχει και μικρότερη ταχύτητα από αυτή που είχε στη ίδια θέση όταν ο δακτύλιος έχει την εγκοπή. Όταν φτάσει στη θέση II στην περίπτωση του σχήματος B, ο μαγνήτης έχει κινητική ενέργεια:

$$K' = \frac{1}{2}mv'^2 \Rightarrow K' = 8J$$

Η θερμότητα που αναπτύσσεται, λόγω φαινομένου Joule, στον μεταλλικό δακτύλιο, κατά την κίνησή του από τη θέση I στη θέση II στη δεύτερη περίπτωση, θα είναι ίση με τη διαφορά των δύο κινητικών ενεργειών, (Η κινητική ενέργεια στη θέση II στην περίπτωση του σχήματος A είναι ίση με την αρχική δυναμική ενέργεια του μαγνήτη αφού δεν έχουμε απώλειες ενέργειας) δηλαδή:

$$Q = K - K' \Rightarrow Q = 24J$$

B' Τρόπος

Στην περίπτωση του σχήματος A εφαρμόζουμε Αρχή διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε) για τις θέσεις I και II:

$$E_{\text{MHX.I}} = E_{\text{MHX.II}} \Rightarrow K_I + U_I = K_{II} + U_{II} \Rightarrow$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow mgh = 32J(1)$$

Στην περίπτωση του σχήματος B εφαρμόζουμε Αρχή διατήρησης της Ενέργειας (Α.Δ.Ε) για τις θέσεις I και II:

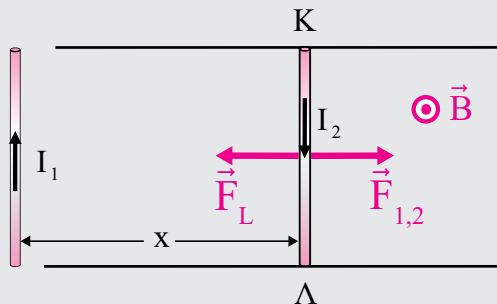
$$E_{\text{MHX.I}} = E_{\text{MHX.II}} + Q \Rightarrow$$

$$K_I + U_I = K_{II} + U_{II} + Q \Rightarrow$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv'^2 + Q \Rightarrow$$

$$Q = 24J$$

5.67 Σωστή απάντηση το α).



Ο αγωγός ΚΛ βρίσκεται μέσα στο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$ και μέσα στο μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται γύρω από τον ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό. Προφανώς ο αγωγός θα ισορροπήσει όταν η συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν πάνω του είναι ίση με μηδέν. Οι δυνάμεις που δέχεται ο αγωγός ΚΛ είναι:

Η δύναμη $\vec{F}_L$ από το ομογενές μαγνητικό πεδίο και η δύναμη $\vec{F}_{1,2}$ που ασκεί ο ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός στον αγωγό ΚΛ.

Ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_L = 0 \Rightarrow F_{1,2} = F_L \Rightarrow$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 \cdot I_2}{x} l = BI_2 l \Rightarrow$$

$$x = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi B}$$

5.68 Σωστή απάντηση το γ).

Η θερμότητα που εκλύεται στον αντιστάτη (έστω R) όταν διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα σε χρόνο $t = 0,5h$ είναι $Q = I_{\text{ev}}^2 R t(1)$.

Όμως $I_{\text{ev}} = \frac{I}{\sqrt{2}}$, οπότε η σχέση (1) γίνεται

$$Q = \frac{I^2}{2} R t(2).$$

Όταν ο ίδιος αντιστάτης διαρρέεται από σταθερό ρεύμα, ίσο με το πλάτος του εναλλασσόμενου ρεύματος σε χρόνο $t' = 2h = 4t$, η θερμότητα που εκλύεται στον αντιστάτη είναι:

$$Q' = I^2 R t' = I^2 R \cdot 4t = 4I^2 R t \Rightarrow Q' = 8Q$$

5.69 Σωστή απάντηση β).

Α' τρόπος

Η στιγμιαία ισχύς της εναλλασσόμενης τάσης είναι:

$$p = v \cdot i$$

και επειδή η στιγμιαία τιμή της τάσης είναι της μορφής $v = V \eta \mu \omega t$ τότε η στιγμιαία τιμή της έντασης είναι $i = I \eta \mu \omega t$ οπότε τελικά η στιγμιαία ισχύς δίνεται από τη σχέση:

$$p = v \cdot i = V \cdot \eta \mu \omega t \cdot I \eta \mu \omega t \Rightarrow p = VI \cdot \eta \mu^2 \omega t$$

όπου $p_{\max} = VI$.

Για το ποσό θερμότητας Q_1 που εκλύεται πάνω στην αντίσταση R_1 , σε χρονικό διάστημα $\Delta t = T$, όπου T η περίοδος της αρμονικά εναλλασσόμενης τάσης (1), ισχύει:

$$Q_1 = V_{\text{εφ.}} \cdot I_{\text{εφ.}} \cdot T \Rightarrow Q_1 = \frac{V}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I}{\sqrt{2}} T \Rightarrow$$

$$Q_1 = \frac{V \cdot I \cdot T}{2} (1)$$

Για το ποσό θερμότητας Q_2 που εκλύεται πάνω στην αντίσταση R_2 σε χρονικό διάστημα $\Delta t = T$, ισχύει:

$$Q_2 = V_{\Sigma} I_{\Sigma} T \Rightarrow Q_2 = P_{\Sigma} \cdot T$$

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $P_{\Sigma} = \frac{p_{\max}}{4}$

οπότε για το ποσό θερμότητας Q_2 τελικά παίρνουμε:

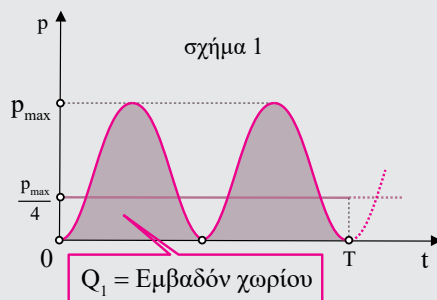
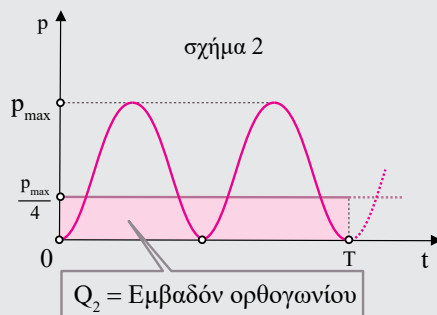
$$Q_2 = \frac{p_{\max}}{4} \cdot T \xRightarrow{p_{\max} = VI} Q_2 = \frac{V \cdot I \cdot T}{4} (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) τελικά προκύπτει:

$$Q_1 = 2Q_2$$

Β' τρόπος

Για τον υπολογισμό της θερμότητας μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν που σχηματίζεται μεταξύ της γραφικής παράστασης των αξόνων και των χρονικών στιγμών που θέλουμε να βρούμε τη θερμότητα, σε διάγραμμα $p = f(t)$.



Για τον υπολογισμό της θερμότητας Q_1 υπολογίζουμε το εμβαδόν του χωρίου που φαίνεται στο σχήμα 1. Λόγω συμμετρίας της γραφικής παράστασης της σχέσης $p(t) = p_{\max} \cdot \eta \mu^2 \omega t$, το εμβαδόν αυτό είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του ορθογώνιου με πλευρές τις $p_{\max}$ και T . Άρα:

$$Q_1 = \frac{1}{2} p_{\max} \cdot T (1)$$

Για τον υπολογισμό της θερμότητας Q_2 υπολογίζουμε το εμβαδόν του ορθογώνιου με πλευρές τις $\frac{p_{\max}}{4}$ και T που φαίνεται στο σχήμα 2. Άρα:

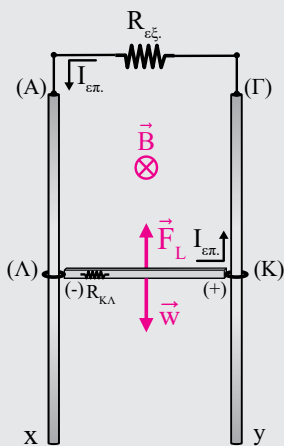
$$Q_2 = \frac{1}{4} p_{\max} \cdot T (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) τελικά προκύπτει:

$$Q_1 = 2Q_2$$

5.70 Σωστή απάντηση γ).

Έστω ότι τα πάνω άκρα Α και Γ των δύο κατακόρυφων συρμάτων x και y ενώνονται με μία εξωτερική αντίσταση $R_{\text{εξ.}}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.



Όταν αφήσουμε τη ράβδο ελεύθερη, αρχίζει να κινείται προς τα κάτω επιταχυνόμενη λόγω της δύναμης του βάρους. Λόγω της κίνησης της (αφού αποκτά ταχύτητα) καθώς βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο αναπτύσσεται στα άκρα της τάση από επαγωγή που θα δίνεται από τη σχέση:

$$E_{\varepsilon\pi.} = Bv l \quad (1)$$

Η τάση αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα το κύκλωμα να διαρρέεται από ρεύμα (επαγωγικό):

$$I_{\varepsilon\pi.} = \frac{E_{\varepsilon\pi.}}{R_{\text{ολ.}}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi.} = \frac{Bv l}{R_{\varepsilon\xi.} + R_{\text{ΚΛ}}} \quad (2)$$

Επειδή ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο θα του ασκηθεί δύναμη Laplace μέτρου:

$$F_L = B I_{\varepsilon\pi.} l \Rightarrow F_L = \frac{B^2 l^2}{R_{\varepsilon\xi.} + R_{\text{ΚΛ}}} \cdot v \quad (3)$$

Η φορά του ρεύματος σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz θα πρέπει να αντιτίθεται στο αίτιο που το προκάλεσε. Το ρεύμα το προκάλεσε η κίνηση του αγωγού προς τα κάτω, άρα, η δύναμη Laplace (που οφείλεται με τη σειρά της στο ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό) πρέπει να είναι προς τα πάνω οπότε με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι η φορά του ρεύματος είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

Ο αγωγός επιταχύνεται άρα:

$$v \uparrow \Rightarrow E_{\varepsilon\pi.} \uparrow \Rightarrow I_{\varepsilon\pi.} \uparrow \Rightarrow F_L \uparrow \Rightarrow \Sigma F \downarrow \Rightarrow a \downarrow$$

Η κίνηση που θα εκτελέσει ο αγωγός είναι ευθύγραμμη μη ομαλά επιταχυνόμενη με συνεχώς μειούμενη επιτάχυνση. Κάποια στιγμή η επιτάχυνση θα γίνει μηδέν όταν και η συνισταμένη δύναμη γίνει μηδέν, οπότε από εκεί και μετά ο αγωγός θα εκτελέσει Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με σταθερή (οριακή) ταχύτητα.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_L = mg \Rightarrow \frac{B^2 l^2}{R_{\varepsilon\xi.} + R_{\text{ΚΛ}}} v_{\text{ορ.}} = mg \Rightarrow$$

$$v_{\text{ορ.}} = \frac{mg(R_{\varepsilon\xi.} + R_{\text{ΚΛ}})}{B^2 l^2} \quad (4)$$

Στην περίπτωση 1 η εξωτερική αντίσταση είναι ο συνδυασμός των αντιστάσεων R_1 και R_2 που συνδέονται σε σειρά, ενώ στην περίπτωση 2 η εξωτερική αντίσταση είναι ο συνδυασμός των αντιστάσεων R_1 και R_2 που συνδέονται παράλληλα.

Περίπτωση 1: $R_{\varepsilon\xi.} = R_1 + R_2 = 4R$

$$(4) \Rightarrow v_{\text{ορ.}(1)} = \frac{mg(R_{\varepsilon\xi.} + R_{\text{ΚΛ}})}{B^2 l^2} = \frac{mg(4R + R)}{B^2 l^2} = \frac{5mgR}{B^2 l^2} \quad (5)$$

Περίπτωση 2: $R_{\varepsilon\xi.} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = R$

$$(4) \Rightarrow v_{\text{ορ.}(2)} = \frac{mg(R_{\varepsilon\xi.} + R_{\text{ΚΛ}})}{B^2 l^2} = \frac{mg(R + R)}{B^2 l^2} = \frac{2mgR}{B^2 l^2} \quad (6)$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (5) και (6) κατά μέλη παίρνουμε:

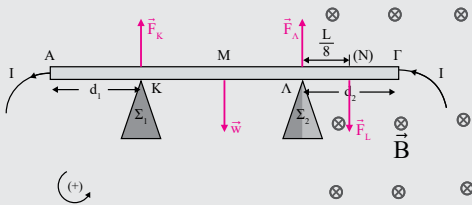
$$\frac{v_{\text{ορ.}(1)}}{v_{\text{ορ.}(2)}} = \frac{\frac{5mgR}{B^2 l^2}}{\frac{2mgR}{B^2 l^2}} = 2,5 \Rightarrow v_{\text{ορ.}(1)} = 2,5 v_{\text{ορ.}(2)}$$

5.71 Σωστή απάντηση το α).

Στη ρευματοφόρο ράβδο ασκούνται:

- οι δυνάμεις F_K και F_Λ από τα στηρίγματα,
- το βάρος $\vec{w}$ στο μέσο της M ,

- η δύναμη Laplace $\vec{F}_L$ από το μαγνητικό πεδίο στο μέσο M του τμήματος ΛΓ όπως φαίνεται στο σχήμα.



Εφόσον η ράβδος ισορροπεί, οριακά έτοιμη να ανατραπεί, θα ισχύει $F_K = 0$ και:

$$\begin{aligned}\Sigma \tau_A = 0 &\Rightarrow w \cdot (M\Lambda) - F_L \cdot (N\Lambda) = 0 \Rightarrow \\ mg \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4} \right) - F_L \frac{L}{8} &= 0 \Rightarrow mg \frac{L}{4} = BI \frac{L}{4} \frac{L}{8} \Rightarrow \\ I &= \frac{8mg}{BL}\end{aligned}$$

Για τον ρυθμό παραγωγής θερμότητας στον αγωγό ισχύει:

$$P_\Theta = I^2 R \Rightarrow P_\Theta = \frac{64m^2 g^2}{B^2 L^2} R$$

5.72 Σωστή απάντηση το γ).

Όταν αφήσουμε τον αγωγό ελεύθερο τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να κινείται προς τα κάτω επιταχυνόμενος λόγω της δύναμης του βάρους. Λόγω της κίνησής του, (αφού αποκτά ταχύτητα), καθώς βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, αναπτύσσεται στα άκρα του τάση από επαγωγή που θα δίνεται από τη σχέση:

$$E_{\text{επ.}} = BvI$$

και πολικότητας που φαίνεται στο σχήμα.

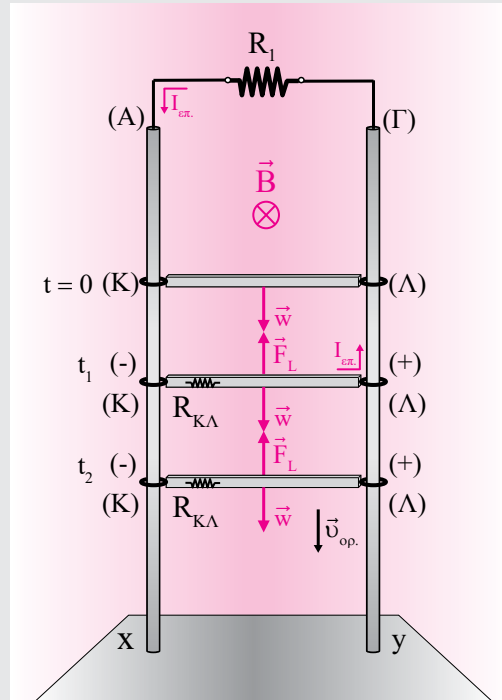
Η τάση αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα το κύκλωμα να διαρρέεται από ρεύμα (επαγωγικό):

$$I_{\text{επ.}} = \frac{E_{\text{επ.}}}{R_{\text{ολ.}}}$$

Επειδή ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο θα του ασκηθεί δύναμη Laplace μέτρου:

$$F_L = BI_{\text{επ.}} L (1)$$

Και φοράς αντίθετης του βάρους όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ο αγωγός επιταχύνεται άρα:

$$v \uparrow \Rightarrow E_{\text{επ.}} \uparrow \Rightarrow I_{\text{επ.}} \uparrow \Rightarrow F_L \uparrow \Rightarrow \Sigma F \downarrow \Rightarrow a \downarrow$$

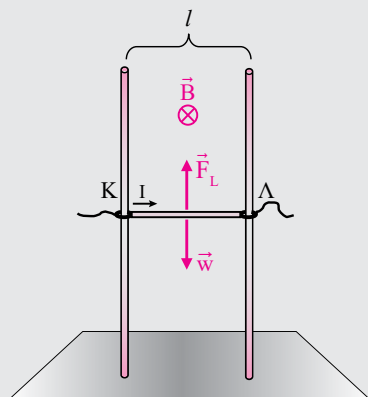
Η κίνηση που θα εκτελέσει ο αγωγός είναι ευθύγραμμη μη ομαλά επιταχυνόμενη με συνεχώς μειούμενη επιτάχυνση. Τη χρονική στιγμή t_2 που ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του αγωγού ΚΛ μηδενίζεται δηλαδή η επιτάχυνση μηδενίζεται, η συνισταμένη δύναμη θα γίνει μηδέν, οπότε από εκεί και μετά ο αγωγός θα εκτελέσει Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με σταθερή (οριακή) ταχύτητα. Άρα:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_L = mg \Rightarrow BI_{\text{επ.}} L = mg \Rightarrow I_{\text{επ.}} = \frac{mg}{BL} \quad (2)$$

Ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα, λόγω φαινομένου Joule, στην αντίσταση R_1 από τη χρονική στιγμή και μετά που ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του αγωγού ΚΛ μηδενίζεται, είναι:

$$\frac{\Delta Q_{R_1}}{\Delta t} = P_{R_1} = I_{\text{επ.}}^2 \cdot R_1 \Rightarrow \frac{\Delta Q_{R_1}}{\Delta t} = \left(\frac{mg}{BL} \right)^2 \cdot 3R \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta Q_{R_1}}{\Delta t} = \frac{3m^2 g^2 R}{B^2 L^2}$$

5.73 Α. Σωστή απάντηση είναι το α).

Εφόσον ο αγωγός βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, κάθετα στις δυναμικές του γραμμές και διαρρέεται από ρεύμα, τότε δέχεται δύναμη Laplace της οποίας το μέτρο θα δίνεται από τη σχέση:

$$F_L = BI l$$

Για να ισορροπεί ο αγωγός θα πρέπει σύμφωνα με τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα να ισχύει:

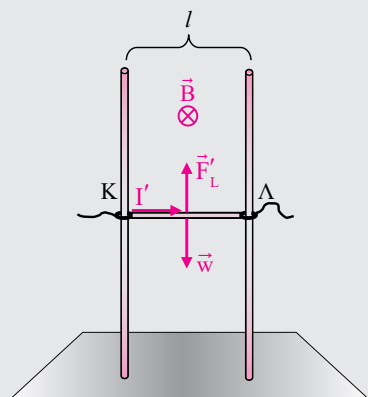
$$\Sigma F = 0$$

Για να συμβεί αυτό, θα πρέπει η φορά της δύναμης Laplace να είναι αντίθετη του βάρους και το μέτρο της ίσο με αυτό του βάρους. Με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού προκύπτει ότι για να έχει η δύναμη Laplace φορά προς τα πάνω (βλέπε σχήμα), θα πρέπει η φορά του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό να είναι από το άκρο του Κ προς το άκρο του Λ.

Β. Σωστή απάντηση είναι το β).

Απ' την αρχική ισορροπία του αγωγού έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_L = w = mg \quad (1)$$



Αν υποδιπλασιάσουμε την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό τότε η δύναμη Laplace θα υποδιπλασιαστεί:

$$F'_L = B \frac{I}{2} l = \frac{F_L}{2} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} F'_L = \frac{mg}{2} \quad (2)$$

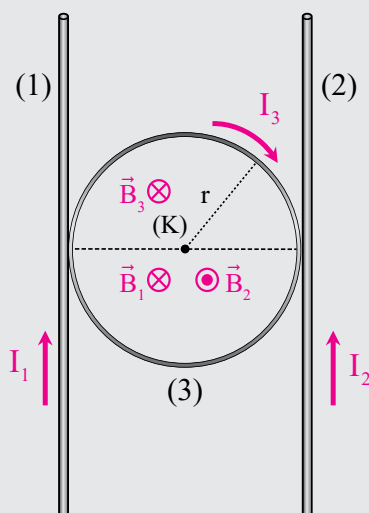
Επειδή $F'_L < mg$ ο αγωγός θα κινηθεί προς τα κάτω επιταχυνόμενος.

Για την αρχική επιτάχυνση που θα αποκτήσει ισχύει:

2ος Νόμος του Νεύτωνα

$$\Sigma F = ma \Rightarrow mg - F'_L = ma \stackrel{(2)}{\Rightarrow}$$

$$mg - \frac{mg}{2} = ma \Rightarrow a = \frac{g}{2}$$

5.74 Σωστή απάντηση είναι η α).

Για να είναι η συνολική ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο (Κ) του κυκλικού αγωγού ίση με μηδέν, πρέπει να ισχύει:

$$\vec{B}_{\text{ολ.}(K)} = 0 \Rightarrow B_1 + B_3 = B_2 \Rightarrow$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I_3}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{r} \Rightarrow$$

$$2I_1 + 2\pi I_3 = 2I_2 \Rightarrow I + \pi I_3 = 2I \Rightarrow I_3 = \frac{I}{\pi}$$

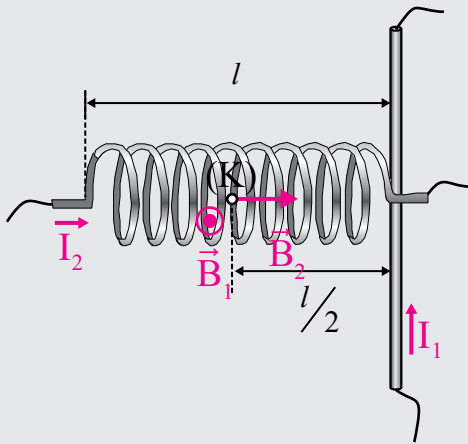
5.75 Σωστή απάντηση είναι η α).

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι κατευθύνσεις της έντασης του μαγνητικού πεδίου

ου εξαιτίας του ευθύγραμμου αγωγού και του σωληνοειδούς οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους. Για τα μέτρα των B_1 και B_2 αντίστοιχα έχουμε:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{d} \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \frac{I_1}{l} \quad (1)$$

$$B_2 = \mu_0 \cdot I_2 \frac{N}{l} \Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \frac{I_1 N}{l} \Rightarrow B_2 = NB_1 \quad (2)$$



Για τη συνολική ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο (Κ) του σωληνοειδούς που οφείλεται στον ευθύγραμμο αγωγό αλλά και στο σωληνοειδές, έχουμε:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} B^2 = B_1^2 + N^2 B_1^2 \Rightarrow B_1 = \frac{B}{\sqrt{N^2 + 1}}$$

5.76 Σωστή απάντηση είναι η α).

Με τη βοήθεια του διαγράμματος συμπεραίνουμε τα εξής: $I_1 = 2I$, $I_2 = I$ οπότε:

$$I_1 = 2I_2 \Rightarrow \frac{V_1}{R_1} = 2 \frac{V_2}{R_2} \Rightarrow \frac{V_1}{R_1} = 2 \frac{V_2}{4R_1} \Rightarrow V_2 = 2V_1 \quad (1)$$

$$\text{και } T_1 = 2T_2 \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega_1} = 2 \frac{2\pi}{\omega_2} \Rightarrow \omega_2 = 2\omega_1 \quad (2)$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\Phi_1 = N_1 B_1 A_1 \sin(\omega_1 t) \text{ και}$$

$$\Phi_2 = N_1 2B_1 A_2 \sin(\omega_2 t)$$

και γνωρίζοντας ότι το πλάτος της έντασης της εναλλασσόμενης τάσης ισούται με $V = N \omega B A$ έχουμε:

$$V_1 = N_1 \omega_1 B_1 A_1 \quad (3) \text{ και } V_2 = N_1 \omega_2 2B_1 A_2 \quad (4)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3), (4) έχουμε:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1 \omega_1 B_1 A_1}{N_1 \omega_2 2B_1 A_2} \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{2} = \frac{A_1}{4A_2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = 2$$

5.77 Σωστή απάντηση το γ).

Η συνολική αντίσταση του κυκλώματος ισούται με:

$$R_{ολ} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + r \Rightarrow R_{ολ} = \frac{3R \cdot 6R}{3R + 6R} + 2R \Rightarrow R_{ολ} = 4R$$

Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm ισχύει:

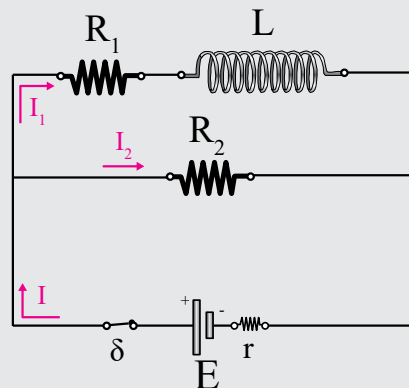
$$I = \frac{E}{R_{ολ}} \Rightarrow I = \frac{E}{4R}$$

Η πολική τάση στα άκρα της πηγής ισούται με:

$$V_{\pi} = E - Ir \Rightarrow V_{\pi} = E - \frac{E}{4R} 2R \Rightarrow V_{\pi} = \frac{E}{2}$$

Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει τον κλάδο που βρίσκεται το πηνίο ισούται με:

$$I_1 = \frac{V_{\pi}}{R_1} \Rightarrow I_1 = \frac{E}{6R}$$



Τη στιγμή που ανοίγει ο διακόπτης η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο ισούται με:

$$U = \frac{1}{2} L I_1^2 \quad (1)$$

Μετά το άνοιγμα του διακόπτη, το ρεύμα μειώνεται και στα άκρα του πηνίου εμφανίζεται Η.Ε.Δ. από αυτεπαγωγή. Την στιγμή που η απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής της έντασης του ρεύματος ισούται με $\left| \frac{di}{dt} \right| = \frac{E}{L}$ η απόλυ-

τη τιμή της Η.Ε.Δ από αυτεπαγωγή ισούται με:

$$|E_{\text{αυτ}}| = L \left| \frac{di}{dt} \right| \Rightarrow |E_{\text{αυτ}}| = E$$

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον βρόγχο του κυκλώματος που περιέχει το πηνίο και τις αντιστάσεις R_1, R_2 ισούται με:

$$i = \frac{E_{\text{αυτ}}}{R_1 + R_2} \Rightarrow i = \frac{E}{9R} \Rightarrow i = \frac{2I_1}{3}$$

Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο την παραπάνω χρονική στιγμή ισούται με:

$$U' = \frac{1}{2} Li^2 \Rightarrow U' = \frac{1}{2} L \frac{4I_1^2}{9} \Rightarrow U' = \frac{4U}{9}.$$

Η θερμότητα που εκλύθηκε στο κύκλωμα από την στιγμή που άνοιξε ο διακόπτης μέχρι τη στιγμή που η απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής της έντασης του ρεύματος ισούται με

$$\left| \frac{di}{dt} \right| = \frac{E}{L}, \text{ είναι } Q = U - U' \Rightarrow Q = \frac{5U}{9}$$

5.78 Σωστή απάντηση το α).

Ο αγωγός αρχικά εκτελεί ελεύθερη πτώση λόγω του βάρους του. Η ταχύτητα που έχει, αφού κατέβει κατά h , είναι:

$$\begin{aligned} E_{\text{MHX.}(αρχ.)} &= E_{\text{MHX.}(τελ.)} \Rightarrow \\ K_{αρχ.} + U_{αρχ.} &= K_{τελ.} + U_{τελ.} \Rightarrow \\ mgh &= \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ που κλείνουμε τον διακόπτη δ, έχουμε στα άκρα του αγωγού τάση από επαγωγή που θα δίνεται από τη σχέση:

$$E_{\text{επ.}} = Bvl = Bl\sqrt{2gh} \quad (1).$$

Η τάση αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα το κύκλωμα να διαρρέεται από ρεύμα (επαγωγικό):

$$I_{\text{επ.}} = \frac{E_{\text{επ.}}}{R_{\text{ολ.}}} = \frac{Bl\sqrt{2gh}}{4R} \quad (2)$$

Ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα, λόγω φαινομένου Joule, στην αντίσταση R_1 τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Q_{R_1}}{\Delta t} &= P_{R_1} = I_{\text{επ.}}^2 \cdot R_1 \Rightarrow \\ \frac{\Delta Q_{R_1}}{\Delta t} &= \left(\frac{Bl\sqrt{2gh}}{4R} \right)^2 \cdot 3R = \frac{B^2 l^2 2gh}{16R^2} \cdot 3R \Rightarrow \\ \frac{\Delta Q_{R_1}}{\Delta t} &= \frac{3ghB^2 l^2}{8R} \end{aligned}$$

5.79 Σωστή απάντηση είναι το β).

Αρχικά ο μεταγωγός είναι στη θέση Ι. Η συνολική αντίσταση του κυκλώματος ισούται με:

$$R_{k,2} = \frac{R \cdot R}{R + R} = \frac{R}{2} \text{ και}$$

$$R_{\text{ολ.}} = R_{k,2} + R_1 \Rightarrow R_{\text{ολ.}} = \frac{R}{2} + R \Rightarrow R_{\text{ολ.}} = \frac{3R}{2}$$

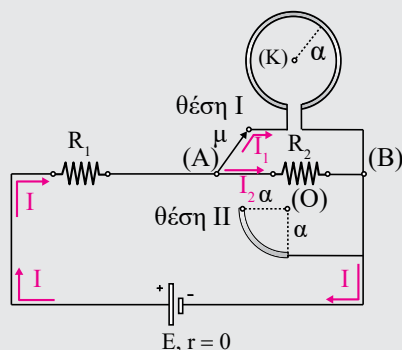
Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα έχουμε:

$$I = \frac{E}{R_{\text{ολ.}}} \Rightarrow I = \frac{2E}{3R}$$

$$V_{AB} = IR_{k,2} \Rightarrow V_{AB} = \frac{E}{3}$$

Για την ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον κυκλικό αγωγό έχουμε:

$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_k} \Rightarrow I_1 = \frac{E}{3R}$$



Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο (K) του κυκλικού αγωγού ισούται με:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{2\alpha}{\frac{\alpha}{2}} = 4 \Rightarrow \frac{\frac{m_1 v_1}{B|q_1|}}{\frac{m_2 v_2}{B|q_2|}} = 4 \Rightarrow \frac{m_1 v_1 |q_2|}{m_2 v_2 |q_1|} = 4 \quad (3)$$

Επειδή τα δύο σωματίδια Σ_1 και Σ_2 εξέρχονται από το πεδίο ταυτόχρονα, για τους χρόνους παραμονής Δt_1 και Δt_2 αντίστοιχα, ισχύει:

$$\Delta t_1 = \Delta t_2$$

Όμως $\Delta t_1 = \frac{\varphi}{360} \cdot T_1$ όπου για τη γωνία φ από

το τρίγωνο ΚΔΓ ισχύει:

$$\eta\mu\varphi = \frac{\beta}{R_1} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$$

$$\text{Έτσι } \Delta t_1 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot T_1 = \frac{2\pi m_1}{6B|q_1|} = \frac{\pi m_1}{3B|q_1|} \quad (4)$$

$$\Delta t_2 = \frac{T_2}{2} = \frac{2\pi m_2}{2B|q_2|} = \frac{\pi m_2}{B|q_2|} \quad (5)$$

$$\text{Πρέπει: } \Delta t_1 = \Delta t_2 \Rightarrow \frac{\pi m_1}{3B|q_1|} = \frac{\pi m_2}{B|q_2|} \Rightarrow$$

$$\frac{m_1}{3|q_1|} = \frac{m_2}{|q_2|} \Rightarrow m_1 |q_2| = 3m_2 |q_1| \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (3) και (6) έχουμε:

$$\frac{m_1 v_1 |q_2|}{m_2 v_2 |q_1|} = 4 \Rightarrow \frac{3m_2 |q_1| v_1}{m_2 v_2 |q_1|} = 4 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{4}{3}$$

ΘΕΜΑ Γ

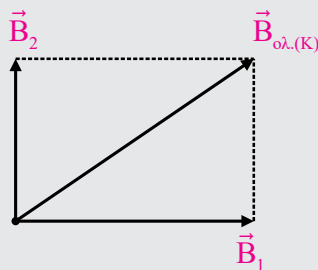
5.81 α) Το μέτρο της έντασης B_1 στο σημείο Κ που οφείλεται στον ευθύγραμμο αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα I_1 είναι:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{d} \Rightarrow B_1 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

β) Το μέτρο της έντασης B_2 στο σημείο Κ που οφείλεται στον κυκλικό αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα I_2 ισούται με:

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I_2}{r} \Rightarrow B_2 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

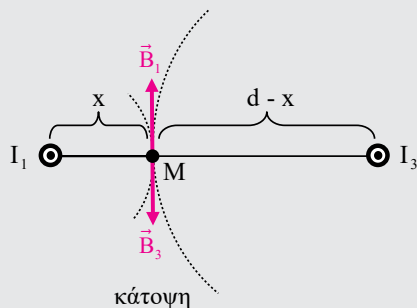
γ) Με τον κανόνα της δεξιάς παλάμης, προκύπτει ότι τα διανύσματα των εντάσεων του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Κ που οφείλονται στον ευθύγραμμο και στον κυκλικό αγωγό, αντίστοιχα, είναι μεταξύ τους κάθετα.



Για το συνολικό μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Κ του κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού έχουμε:

$$B_{\text{ολ.}(Κ)} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \Rightarrow B_{\text{ολ.}(Κ)} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

δ) Επειδή τα ρεύματα I_1 και I_3 είναι ομόρροπα, η συνισταμένη ένταση του μαγνητικού πεδίου θα είναι μηδέν εντός των δύο αγωγών και προς την πλευρά του αγωγού που διαρρέεται από την μικρότερη ένταση ηλεκτρικού ρεύματος (χρησιμοποιούμε τον κανόνα του δεξιού χεριού για τον προσδιορισμό των εντάσεων του μαγνητικού πεδίου - η συνισταμένη ένταση δεν μπορεί να είναι μηδέν, εκτός των δύο αγωγών γιατί οι εντάσεις είναι ομόρροπες).



Έστω Μ το σημείο που γίνεται αυτό. Θεωρούμε x την απόσταση του σημείου Μ από τον αγωγό που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα έντασης I_1 .

Προκύπτει:

$$B_{ολ.(M)} = 0 \Rightarrow B_1 = B_3 \Rightarrow$$

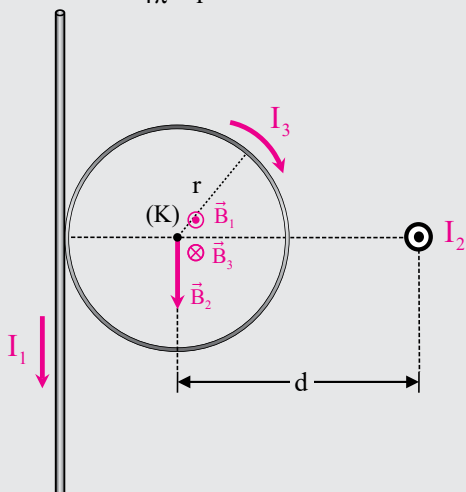
$$\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_3}{d-x} \quad I_3=3I_1 \Rightarrow$$

$$\frac{I_1}{x} = \frac{3I_1}{d-x} \Rightarrow x = \frac{d}{4} \Rightarrow$$

$$x = 0,5 \text{ cm}$$

5.82 α) Υπολογίζουμε στο σημείο Κ την ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ο κάθε αγωγός (μέτρο και κατεύθυνση). Για τον ευθύγραμμο αγωγό (1) έχουμε:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{r} \Rightarrow B_1 = 2\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}$$



Για τον ευθύγραμμο αγωγό (2) έχουμε:

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{d} \Rightarrow B_2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

Για τον κυκλικό αγωγό έχουμε:

$$B_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I_3}{r} \Rightarrow B_3 = 2\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

$$\text{Ισχύει } \vec{B}_K = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

$$\text{Ομως } \vec{B}_{1,3} = \vec{B}_1 + \vec{B}_3 \Rightarrow B_{1,3} = B_1 - B_3 = 0$$

Άρα: $B_K = B_2 \Rightarrow B_K = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}$ με κατεύθυνση ίδια με αυτήν του διανύσματος $\vec{B}_2$.

β) Εφόσον αλλάζουμε τη φορά του ρεύματος I_1 , αλλάζει και η κατεύθυνση της έντασης $\vec{B}_1$.

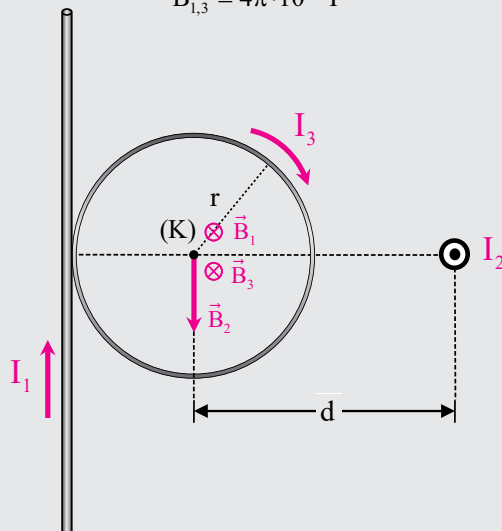
Από τον κανόνα του δεξιού χεριού η ένταση $\vec{B}_1$ θα έχει κατεύθυνση από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.

$$\text{Ισχύει } \vec{B}_K = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

Ομως:

$$\vec{B}_{1,3} = \vec{B}_1 + \vec{B}_3 \Rightarrow B_{1,3} = B_1 + B_3 \Rightarrow$$

$$B_{1,3} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}$$



Τα διανύσματα $\vec{B}_{1,3}$ και $\vec{B}_2$ είναι κάθετα μεταξύ τους συνεπώς έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{(K)} \quad \vec{B}_K &= \sqrt{B_{1,3}^2 + B_2^2} = \sqrt{2B_2^2} = B_2\sqrt{2} \Rightarrow \\ B_K &= 4\pi\sqrt{2} \cdot 10^{-7} \text{ T} \end{aligned}$$

$$\text{και με κατεύθυνση } \epsilon\phi\theta = \frac{B_{1,3}}{B_2} = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

με το διάνυσμα $\vec{B}_2$.

γ) Ισχύει: Η ένταση $\vec{B}_1$ στο κέντρο του κυκλικού αγωγού ισούται με:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I}{r} \Rightarrow I = \frac{B_1 4\pi r}{\mu_0 2\pi} \Rightarrow I = 5 \text{ A}$$

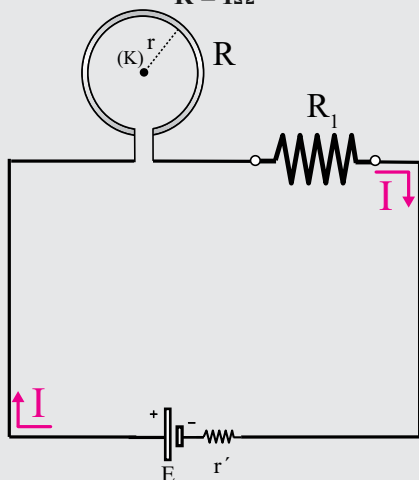
Από τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα έχουμε:

$$I = \frac{E}{R_{ολ.}} \Rightarrow R_{ολ.} = \frac{E}{I} \Rightarrow R_{ολ.} = 6\Omega$$

Ισχύει:

$$R_{ολ} = R_1 + R + r' \Rightarrow$$

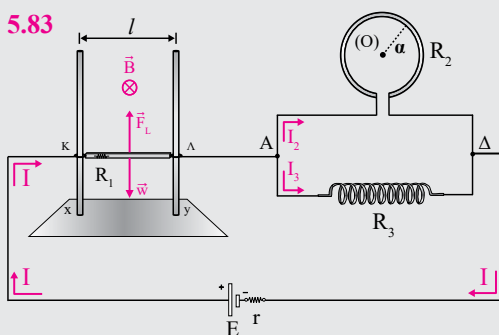
$$R = 1\Omega$$



δ) Σύμφωνα με τον νόμο του Joule ισχύει:

$$Q = I^2 \cdot R \cdot \Delta t \Rightarrow Q = 250J$$

5.83



α) Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα ισχύει:

$$I = \frac{E}{R_{ολ}}(1)$$

Υπολογίζουμε τη συνολική αντίσταση του κυκλώματος:

$$R_{ολ} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + r + R_1 \Rightarrow R_{ολ} = 12\Omega$$

Από τη σχέση (1) έχουμε $I = 5A$.

Ο αγωγός ΚΛ διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα I και είναι τοποθετημένος κάθετα στις μα-

γνητικές γραμμές του ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $\vec{B}$, οπότε ασκείται σε αυτόν δύναμη Laplace.

Ο αγωγός ΚΛ ισορροπεί άρα:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_L + \vec{w} = 0 \Rightarrow F_L - w = 0 \Rightarrow$$

$$F_L = w \Rightarrow BI\ell = mg \Rightarrow$$

$$m = 0,5\text{ kg}$$

β) Ο κυκλικός αγωγός και το σωληνοειδές είναι συνδεδεμένα παράλληλα οπότε ισχύει:

$$V_2 = V_3 \Rightarrow I_2 R_2 = I_3 R_3 \Rightarrow I_2 = I_3 \quad (2)$$

Σύμφωνα με τον κανόνα του Kirchhoff ισχύει:

$$I = I_2 + I_3 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2), (3) έχουμε:

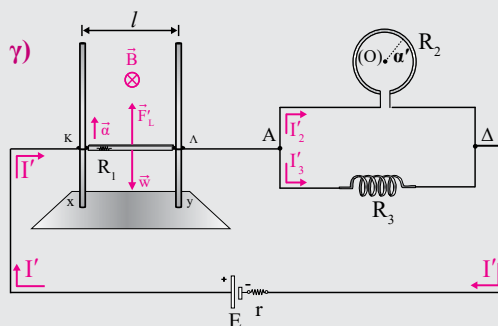
$$I_2 = I_3 = 2,5A$$

Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται στο κέντρο O του κυκλικού αγωγού εξ' αιτίας του ρευματοφόρου κυκλικού αγωγού είναι:

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I_2}{a} \Rightarrow B_2 = 5 \cdot 10^{-5} T$$

Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται στο εσωτερικό του σωληνοειδούς είναι:

$$B_3 = \mu_0 I_3 \frac{N}{\ell'} \Rightarrow B_3 = 10^{-2} T$$



Αποσυνδέουμε τον κυκλικό αγωγό από το παραπάνω κύκλωμα και ξετυλίγουμε το σύρμα από το οποίο είναι φτιαγμένος. Στη συνέχεια, τυλίγουμε ξανά ολόκληρο το σύρμα, ώστε να φτιάξουμε ένα κυκλικό πλαίσιο, ακτίνας a' , που αποτελείται από $N = 2$ σπείρες. Το μη-

κος του σύρματος δεν αλλάζει, επομένως, δεν αλλάζει και η ωμική του αντίσταση. Ισχύει :

$$L = L' \Rightarrow 2\pi a = N2\pi a' \Rightarrow a' = \frac{\pi}{2} 10^{-2} \text{ m.}$$

Το τμήμα του σωληνοειδούς που συνδέουμε στο αρχικό κύκλωμα θα έχει αντίσταση

$$R'_3 = \frac{R_3}{4} \Rightarrow R'_3 = 2,5 \Omega. \left(R = \rho \frac{\ell'}{S} \right)$$

Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα ισχύει:

$$I' = \frac{E}{R'_{\text{ολ}}} (4)$$

Υπολογίζουμε τη συνολική αντίσταση του κυκλώματος:

$$R'_{\text{ολ}} = \frac{R_2 \cdot R'_3}{R_2 + R'_3} + r + R_1 \Rightarrow R'_{\text{ολ}} = 9 \Omega$$

Από τη σχέση (4) έχουμε $I' = \frac{20}{3} \text{ A.}$

$$V'_2 = V'_3 \Rightarrow I'_2 \cdot R_2 = I'_3 \cdot R'_3 \Rightarrow I'_2 = \frac{I'_3}{4} (5)$$

Σύμφωνα με τον κανόνα του Kirchhoff ισχύει:

$$I' = I'_2 + I'_3 (6)$$

Από τις σχέσεις (5), (6) έχουμε:

$$I'_2 = \frac{4}{3} \text{ A}$$

Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται στο κέντρο Ο του κυκλικού αγωγού εξ' αιτίας του ρευματοφόρου κυκλικού αγωγού είναι:

$$B'_2 = N' \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I'_2}{a'} \Rightarrow B'_2 = \frac{32}{3} \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

δ) Για τον αγωγό ΚΛ ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{F}_L + \vec{w} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow$$

$$F_L - m \cdot g = m \cdot a \Rightarrow$$

$$B \cdot I' \cdot \ell - m \cdot g = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{10 \text{ m}}{3 \text{ s}^2}$$

με κατεύθυνση ομόρροπη της $\vec{F}_L$.

5.84 α) Όταν κλείσουμε τον διακόπτη δ_1 το κλειστό κύκλωμα ΑΓΖΔΑ διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα.

Από τη σύγκριση της δοθείσας χρονικής εξίσωσης της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει την αντίσταση R_1 :

$$i = 10 \cdot \eta \mu 100\pi t \text{ (S.I.)}$$

με τη γενική της μορφή $i = I \cdot \eta \mu \omega t$ προκύπτει ότι το πλάτος της έντασης είναι $I = 10 \text{ A}$ και η γωνιακή συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι $\omega = 100\pi \text{ rad/s.}$

$$\text{Όμως } \omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = 50 \text{ Hz}$$

Από τον νόμο του Ohm για τα πλάτη της τάσης και της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος έχουμε:

$$I = \frac{V}{R_1} \Rightarrow V = I \cdot R_1 \Rightarrow V = 20 \text{ V}$$

Η ενεργός τιμή της τάσης είναι:

$$V_{\text{ev.}} = \frac{V}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_{\text{ev.}} = 10\sqrt{2} \text{ V}$$

β) Η χρονική εξίσωση της εναλλασσόμενης τάσης είναι:

$$v = V \cdot \eta \mu \omega t \Rightarrow v = 20 \cdot \eta \mu 100\pi t \text{ (S.I.)}$$

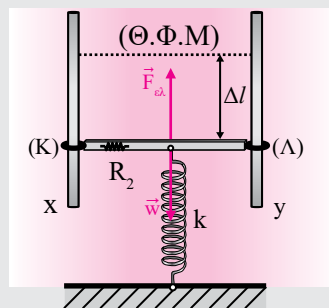
γ) Για τη θερμότητα που παράγεται στην αντίσταση R_1 σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$, σύμφωνα με τον νόμο του Joule, ισχύει:

$$Q = I_{\text{ev.}}^2 \cdot R_1 \cdot \Delta t$$

$$\text{Όμως } I_{\text{ev.}} = \frac{I}{\sqrt{2}} \Rightarrow I_{\text{ev.}} = 5\sqrt{2} \text{ A} \text{ οπότε για τη}$$

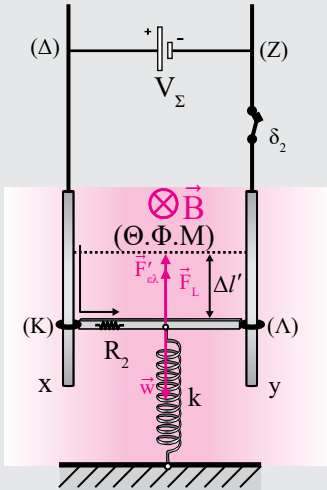
θερμότητα τελικά παίρνουμε με αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση $Q = 6000 \text{ J}$

δ)



Στην αρχική κατάσταση ισορροπίας του αγωγού ΚΛ όταν οι δύο διακόπτες είναι ανοικτοί, το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά Δl σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ.} = w \Rightarrow k \cdot \Delta l = w(1)$$



Στη νέα κατάσταση ισορροπίας του αγωγού ΚΛ διαρρέεται από συνεχές ρεύμα και επειδή βρίσκεται μέσα σε Ο.Μ.Π. κάθετα στις δυναμικές του γραμμές θα του ασκείται δύναμη Laplace, όπως φαίνεται στο σχήμα. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F'_{ελ.} + F_L = w \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l' + BI_{\Sigma} l = w \Rightarrow k \cdot \frac{\Delta l}{2} + BI_{\Sigma} l = w \Rightarrow \quad (1)$$

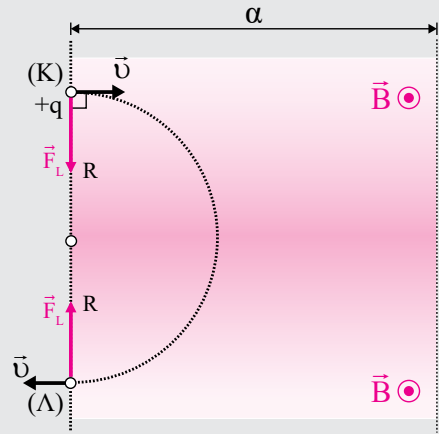
$$\frac{w}{2} + BI_{\Sigma} l = w \Rightarrow BI_{\Sigma} l = \frac{w}{2} \Rightarrow B \frac{V_{\Sigma}}{R_2} l = \frac{w}{2} \Rightarrow$$

$$V_{\Sigma} = \frac{mgR_2}{2Bl} \Rightarrow V_{\Sigma} = 10V$$

5.85 α) Το σωματίδιο δέχεται δύναμη Lorentz από το μαγνητικό πεδίο η οποία είναι κάθετη στην ταχύτητα $\vec{v}$ και βρίσκεται πάνω στο διαχωριστικό όριο του πεδίου.

Υπολογίζουμε την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς. Ισχύει:

$$K\lambda = 2R \Rightarrow R = \frac{K\lambda}{2} \Rightarrow R = 2 \text{ m}$$



Για τη μάζα του σωματιδίου ισχύει:

$$R = \frac{mv}{B|q|} \Rightarrow m = \frac{RB|q|}{v} \Rightarrow m = 10^{-9} \text{ kg}$$

β) Το τόξο που διαγράφει το σωματίδιο μέσα στο μαγνητικό πεδίο είναι ημικύκλιο. Το μήκος του υπολογίζεται από τον τύπο:

$$s = \pi R \text{ ή } s = 2\pi m$$

Ο χρόνος παραμονής μέσα στο μαγνητικό πεδίο είναι:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi m}{\frac{B|q|}{v}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi m}{B|q|} \Rightarrow \Delta t = 0,01\pi \text{ s}$$

γ) Κατά την κίνηση στο μαγνητικό πεδίο το μέτρο της ορμής του σωματιδίου δε μεταβάλλεται. Ισχύει, δηλαδή:

$$|p_{αρχ}| = |p_{τελ}| = mv \Rightarrow$$

$$|p_{αρχ}| = |p_{τελ}| = 2 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Θεωρώντας ως θετική τη φορά της ορμής κατά την έξοδο από το σημείο Λ, έχουμε:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ} \Rightarrow \Delta p = p_{τελ} - (-p_{αρχ}) \Rightarrow$$

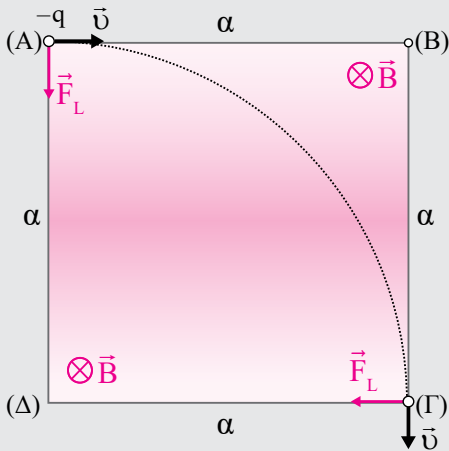
$$\Delta p = p_{τελ} + p_{αρχ} \Rightarrow \Delta p = 2p_{αρχ} \Rightarrow$$

$$\Delta p = 4 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ) Για να μην εξέρχεται το σωματίδιο από την απέναντι πλευρά θα πρέπει η ακτίνα της τροχιάς του να είναι μικρότερη από το εύρος του πεδίου, δηλαδή:

$$R \leq \alpha \Rightarrow \frac{mv}{B|q|} \leq \alpha \Rightarrow B \geq \frac{mv}{|q|\alpha} \Rightarrow B \geq 0,02 \text{ T}$$

5.86 α) Σχεδιάζουμε τη δύναμη Lorentz τη στιγμή της εισόδου και τη στιγμή της εξόδου του σωματιδίου από το μαγνητικό πεδίο. Η κορυφή Δ είναι το κέντρο της κυκλικής τροχιάς του σωματιδίου. Το σωματίδιο διαγράφει τεταρτοκύκλιο, επομένως, ισχύει $R = \alpha = 0,8 \text{ m}$.



Θέλουμε να υπολογίσουμε το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου. Ισχύει:

$$R = \frac{mv}{B|q|} \Rightarrow B = \frac{mv}{R|q|} \Rightarrow B = 1 \text{ T}$$

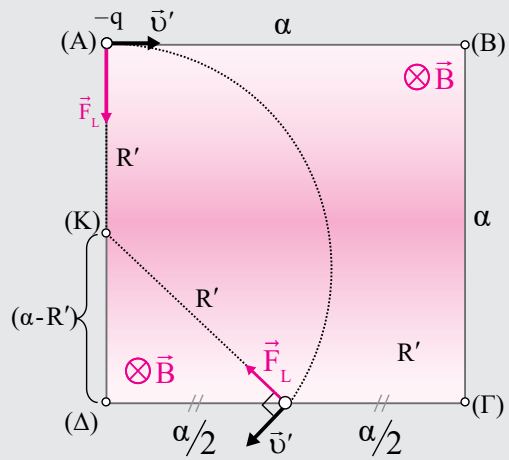
β) Η χρονική διάρκεια κίνησης του σωματιδίου είναι:

$$\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi m}{B|q|} \Rightarrow \Delta t = \pi \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

γ) Η κινητική ενέργεια του σωματιδίου δε μεταβάλλεται γιατί το μέτρο της ταχύτητάς του παραμένει σταθερό. Επομένως, για τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας έχουμε: $\Delta K = 0$

δ) Σχεδιάζουμε τη δύναμη Lorentz στα σημεία εισόδου και εξόδου από το μαγνητικό πεδίο. Το σημείο τομής των φορέων των δυνάμεων είναι το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Το κέντρο Κ της τροχιάς του σωματιδίου βρίσκεται στην πλευρά ΑΔ. Από το τρίγωνο ΚΔΜ έχουμε:

$$\begin{aligned} KM^2 &= K\Delta^2 + \Delta M^2 \Rightarrow \\ R'^2 &= (\alpha - R')^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Rightarrow \\ R' &= \frac{5\alpha}{8} \Rightarrow R' = 0,5 \text{ m} \end{aligned}$$



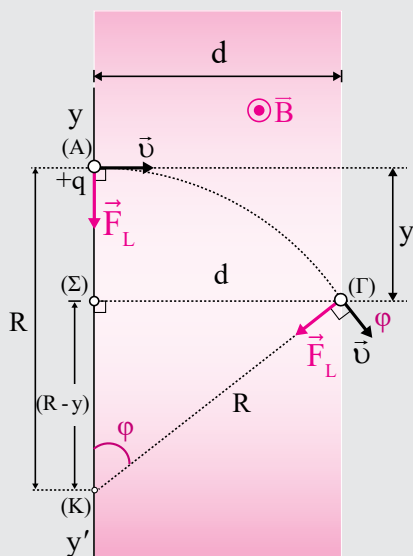
Για το μέτρο της ταχύτητας εισόδου θα έχουμε:

$$R' = \frac{mv'}{B|q|} \Rightarrow v' = \frac{R' B |q|}{m} \Rightarrow v' = 250 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5.87 α) Το σωματίδιο επιταχύνεται από δι-αφορά δυναμικού V. Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σωματιδίου υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας που αποκτάει το σωματίδιο. Ισχύει:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{F_{\eta\lambda}} \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 - 0 = qV \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} \Rightarrow v = 4 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



β) Σχεδιάζουμε τη δύναμη Lorentz στα σημεία εισόδου και εξόδου από το μαγνητικό πεδίο. Το σημείο τομής των φορέων των δυνάμεων είναι το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Υπολογίζουμε την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς. Ισχύει:

$$R = \frac{mv}{B|q|} \Rightarrow R = 0,1\text{m}$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΓΣ έχουμε:

$$\eta\mu\varphi = \frac{\Gamma\Sigma}{\text{ΚΓ}} \Rightarrow \eta\mu\varphi = \frac{d}{R} \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την κατακόρυφη απόκλιση y.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΓΣ προκύπτει:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{R-y}{R} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{R-y}{R} \Rightarrow y = \frac{R}{2}$$

$$y = 0,05\text{m}$$

γ) Το μήκος του τόξου που διαγράφει το σωματίδιο είναι:

$$s = R\varphi \Rightarrow s = \frac{\pi}{30} \text{ m}$$

Η περίοδος της κυκλικής κίνησης του σωματιδίου είναι:

$$T = \frac{2\pi m}{B|q|} \Rightarrow T = 5\pi \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

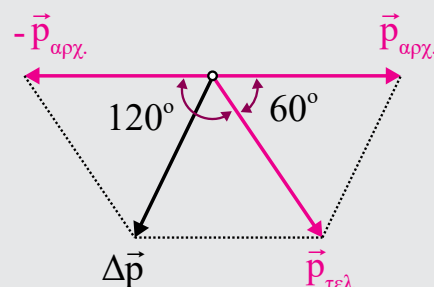
Για τον χρόνο κίνησης στο ομογενές μαγνητικό πεδίο έχουμε:

$$\omega = \frac{\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi/3}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{6} \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{5\pi}{6} \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

δ) Το μέτρο της ορμής του σωματιδίου κατά την κίνησή του στο ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι σταθερό και ισχύει:

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} = p = mv \Rightarrow p = 4 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Για τη μεταβολή της ορμής έχουμε:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{τελ}} - \vec{p}_{\text{αρχ}} \Rightarrow \Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{τελ}} + (-\vec{p}_{\text{αρχ}})$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής θα είναι:

$$\Delta p = \sqrt{p_{\text{αρχ}}^2 + p_{\text{τελ}}^2 + 2p_{\text{αρχ}}p_{\text{τελ}} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3}} \Rightarrow$$

$$\Delta p = \sqrt{p^2 + p^2 + 2p^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow \Delta p = p \Rightarrow$$

$$\Delta p = 4 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5.88 α) Η ταχύτητα αναλύεται σε δύο συνιστώσες μια παράλληλη στη διεύθυνση των μαγνητικών γραμμών:

$$v_{\pi} = v \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$$

Και μια κάθετη στη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών:

$$v_k = v \cdot \eta \mu \phi$$

Από τον τύπο της ακτίνας της ελικοειδούς τροχιάς έχουμε:

$$R = \frac{mv_k}{B|q|} \Rightarrow R = \frac{mv \cdot \eta \mu \phi}{B|q|} \Rightarrow \\ \Rightarrow \eta \mu \phi = \frac{B|q|R}{mv} \Rightarrow \eta \mu \phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \phi = 30^\circ$$

β) Η περίοδος της ελικοειδούς κίνησης είναι:

$$T = \frac{2\pi m}{B|q|} \Rightarrow T = \pi \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

Για το βήμα της έλικας έχουμε:

$$\beta = v_\pi T \Rightarrow \beta = v \cdot \sigma \nu \nu \phi \cdot T \Rightarrow \\ \beta = 2\pi\sqrt{3} \text{ m}$$

γ) Το μήκος της τροχιάς που θα διαγράψει το σωματίδιο είναι:

$$s = v \cdot \Delta t \Rightarrow s = 8\pi \text{ m}$$

δ) Το σωματίδιο κατά μήκος των δυναμικών γραμμών εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα μέτρου v_π . Σε κάθε περίοδο διανύει στη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών απόσταση ίση με το βήμα της έλικας. Επομένως, προκύπτει:

$$N = \frac{\Delta x}{\beta} \Rightarrow N = 10 \text{ περ.}$$

5.89 α) Υπολογίζουμε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας με τη βοήθεια του τύπου της κεντρομόλου επιτάχυνσης. Ισχύει:

$$\alpha_k = \omega^2 \cdot KM \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\alpha_k}{L}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

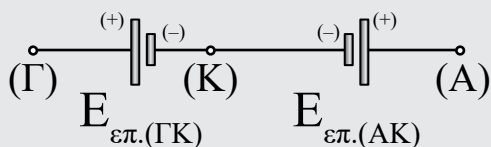
β) Η ΗΕΔ από επαγωγή που εμφανίζεται στο τμήμα ΓΚ του αγωγού είναι:

$$E_{\text{επ.ΓΚ}} = \frac{1}{2} B \omega \cdot \Gamma K^2 \Rightarrow E_{\text{επ.ΓΚ}} = \frac{1}{2} B \omega \cdot \left(\frac{L}{4}\right)^2 \Rightarrow \\ E_{\text{επ.ΓΚ}} = 0,1 \text{ V}$$

γ) Η ΗΕΔ από επαγωγή που εμφανίζεται στο τμήμα ΑΚ του αγωγού θα είναι:

$$E_{\text{επ.ΑΚ}} = \frac{1}{2} B \omega \cdot \text{ΑΚ}^2 \Rightarrow \\ E_{\text{επ.ΑΚ}} = \frac{1}{2} B \omega \cdot \left(L - \frac{L}{4}\right)^2 \Rightarrow \\ E_{\text{επ.ΑΚ}} = 0,9 \text{ V}$$

δ) Με τη βοήθεια του κανόνα του δεξιού χεριού καθορίζουμε τις πολικότητες των ΗΕΔ από επαγωγή στα δύο τμήματα. Ισχύει:



Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του αγωγού θα είναι:

$$V_{\text{ΑΓ}} = E_{\text{επ.ΑΚ}} - E_{\text{επ.ΓΚ}} \Rightarrow V_{\text{ΑΓ}} = 0,8 \text{ V}$$

5.90 α) Από τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff έχουμε:

$$|E_{\text{αυτ}}| = E - iR(1)$$

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, ισχύει $i = 0$ και ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος είναι μέγιστος. Από τη σχέση (1) ισχύει:

$$L \left(\frac{di}{dt} \right)_{\text{max}} = E \Rightarrow \left(\frac{di}{dt} \right)_{\text{max}} = \frac{E}{L} \Rightarrow \\ \left(\frac{di}{dt} \right)_{\text{max}} = 10^3 \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

β) Όταν η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα του πηνίου μηδενιστεί η ένταση του ρεύματος σταθεροποιείται στη μέγιστη τιμή της. Η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος προκύπτει από τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα. Ισχύει:

$$I = \frac{E}{R} \Rightarrow I = 10 \text{ A}$$

Η μέγιστη τιμή της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου που έχει αποθηκευτεί στο πηνίο είναι:

$$U_{\text{max}} = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow U_{\text{max}} = 1 \text{ J}$$

γ) Τη χρονική στιγμή t_1 η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι:

$$i_1 = \frac{20}{100} I \Rightarrow i_1 = 2 \text{ A}$$

Από τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff για τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$|E_{\text{αυτ}}|_{t_1} = E - i_1 R \Rightarrow L \frac{di}{dt} = E - i_1 R \Rightarrow$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{E - i_1 R}{L} \Rightarrow \frac{di}{dt} = 800 \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

δ) Με τη βοήθεια του τύπου της ισχύος της πηγής υπολογίζουμε την ένταση του ρεύματος τη χρονική στιγμή t_2 . Ισχύει:

$$P = E i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{P}{E} \Rightarrow i_2 = 4 \text{ A}$$

Εφαρμόζουμε πάλι τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff για τη χρονική στιγμή t_2 για να υπολογίσουμε την ΗΕΔ από αυτεπαγωγή τη χρονική στιγμή t_2 . Έχουμε:

$$|E_{\text{αυτ}}|_{t_2} = E - i_2 R \Rightarrow |E_{\text{αυτ}}|_{t_2} = |E_{\text{αυτ}}|_{t_1} = 12 \text{ V}$$

Ο ρυθμός αποθήκευσης ενέργειας στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$P_L = |E_{\text{αυτ}}|_{t_2} \cdot i_2 \Rightarrow P_L = 48 \text{ W}$$

5.91 α) Με τον μεταγωγό στη θέση (1) το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης που υπολογίζεται από το νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα. Ισχύει:

$$I = \frac{E}{R + r} \Rightarrow I = 6 \text{ A}$$

Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου θα είναι:

$$U_0 = \frac{1}{2} L I^2 \Rightarrow U_0 = 18 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

β) Τη χρονική στιγμή t_1 η τιμή της έντασης του ρεύματος είναι:

$$i_1 = \frac{I}{2} \Rightarrow i_1 = 3 \text{ A}$$

Από τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα έχουμε:

$$i_1 = \frac{|E_{\text{αυτ}}|}{R} \Rightarrow \left| \frac{\Delta i}{\Delta t} \right| = \frac{i_1 R}{L} \Rightarrow \left| \frac{\Delta i}{\Delta t} \right| = 12000 \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

Επειδή η ένταση του ρεύματος μειώνεται θα ισχύει:

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = -12000 \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

γ) Η θερμική ισχύς του αντιστάτη θα είναι:

$$P_R = i_1^2 R \Rightarrow P_R = 36 \text{ W}$$

δ) Υπολογίζουμε με τη βοήθεια του νόμου του Ohm την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, τη χρονική στιγμή t_2 . Έχουμε:

$$i_2 = \frac{V_2}{R} \Rightarrow i_2 = 2 \text{ A}$$

Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη εκείνη τη χρονική στιγμή στο πηνίο είναι:

$$U_2 = \frac{1}{2} L i_2^2 \Rightarrow U_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Η θερμότητα που εκλύεται από τον αντιστάτη κατά τη χρονική διάρκεια $t_0 \rightarrow t_2$ θα είναι:

$$Q_R = U_0 - U_2 \Rightarrow Q_R = 16 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

5.92 α) Ισχύει:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{d} \Rightarrow I = \frac{2\pi B d}{\mu_0} \Rightarrow I = 5 \text{ A}$$

Για την ΗΕΔ της πηγής προκύπτει:

$$E = I(R_1 + R_3 + r) \Rightarrow E = 45 \text{ V}$$

β) Ισχύει:

$$I' = I + 4 \text{ A} \Rightarrow I' = 9 \text{ A}$$

Έχουμε:

$$I' = \frac{E}{R_{2,3} + r + R_1} \Rightarrow R_{2,3} = \frac{E - I'r - I'R_1}{I'} \Rightarrow$$

$$R_{2,3} = 2 \Omega$$

Τελικά προκύπτει:

$$R_{2,3} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \Rightarrow R_2 = \frac{R_3 R_{2,3}}{R_3 - R_{2,3}} \Rightarrow R_2 = 3 \Omega$$

γ) Ισχύει:

$$V_{\Gamma\Delta} = I' R_{2,3} \Rightarrow V_{\Gamma\Delta} = 18 \text{ V}$$

Έχουμε:

$$I'_2 = \frac{V_{\Gamma\Delta}}{R_2} \Rightarrow I'_2 = 6\text{ A}$$

Η ζητούμενη θερμική ισχύς είναι:

$$P_{R_2} = I'^2_2 R_2 \Rightarrow P_{R_2} = 108\text{ W}$$

δ) Έχουμε:

$$I'_3 = \frac{V_{\Gamma\Delta}}{R_3} \Rightarrow I'_3 = 3\text{ A}$$

Προκύπτει:

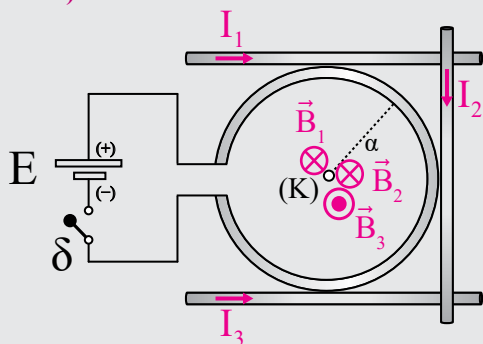
$$B' = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I'_3}{d} \Rightarrow B' = 1,2 \cdot 10^{-5}\text{ T}$$

Το ζητούμενο ποσοστό επί τοις εκατό θα είναι ίσο:

$$\Pi(\%) = \frac{B' - B}{B} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = -40\%$$

5.93 α)



Ισχύουν:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{r} \Rightarrow B_1 = 2 \cdot 10^{-6}\text{ T}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{r} \Rightarrow B_2 = 2 \cdot 10^{-6}\text{ T}$$

$$B_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_3}{r} \Rightarrow B_3 = 8 \cdot 10^{-6}\text{ T}$$

Η ένταση του σύνθετου μαγνητικού πεδίου στο κέντρο K θα έχει μέτρο:

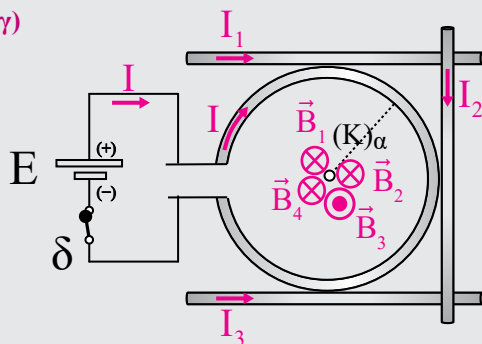
$$B_K = B_3 - B_2 - B_1 \Rightarrow B_K = 4 \cdot 10^{-6}\text{ T}$$

με φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη.

β) Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον κυκλικό αγωγό είναι:

$$I = \frac{E}{R} \Rightarrow I = \frac{E}{R \cdot 2\pi r} \Rightarrow I = \frac{20}{\pi}\text{ A}$$

γ)



Το μέτρο της έντασης του κυκλικού αγωγού στο κέντρο του K θα είναι:

$$B_4 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I}{r} \Rightarrow B_4 = 8 \cdot 10^{-6}\text{ T}$$

Η νέα ένταση του σύνθετου μαγνητικού πεδίου στο κέντρο K θα έχει μέτρο:

$$B'_K = B_1 + B_2 - B_3 + B_4 \Rightarrow B'_K = 4 \cdot 10^{-6}\text{ T}$$

με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.

δ) Ισχύει:

$$0 = B_1 + B_2 - B_3 + B'_4 \Rightarrow B'_4 = B_3 - B_1 - B_2 \Rightarrow$$

$$B'_4 = 4 \cdot 10^{-6}\text{ T}$$

Έχουμε:

$$B'_4 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I'}{r} \Rightarrow I' = \frac{B'_4 r}{\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2\pi} \Rightarrow$$

$$I' = \frac{10}{\pi}\text{ A}$$

Η τιμή της ΗΕΔ της πηγής είναι:

$$E' = I'R \cdot 2\pi r \Rightarrow E' = 10\text{ V}$$

5.94 α) Η τιμή της ΗΕΔ της πηγής είναι:

$$V_\pi = E \Rightarrow E = 175\text{ V}$$

β) Έχουμε:

$$I = \frac{E}{R_\Sigma + r + R_1} \Rightarrow I = 5\text{ A}$$

Το ποσό της θερμότητας που εκλύεται σε όλο το κύκλωμα είναι:

$$Q = I^2 (R_\Sigma + r + R_1) \cdot \Delta t \Rightarrow Q = 105000\text{ J}$$

γ) Ισχύει:

$$B = \mu_0 nI \Rightarrow B = \pi \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

Για το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου, στα άκρα του σωληνοειδούς, έχουμε:

$$B_{\text{ακρ}} = \frac{B}{2} \Rightarrow B_{\text{ακρ}} = 5\pi \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

δ) Βρίσκουμε τη νέα ένταση του ρεύματος που διαρρέει την πηγή:

$$I' = \frac{E}{\frac{R_{\Sigma} R_2}{R_{\Sigma} + R_2} + r + R_1} \Rightarrow I' = 7 \text{ A}$$

Η τάση στα άκρα του σωληνοειδούς είναι:

$$V = I' \frac{R_{\Sigma} R_2}{R_{\Sigma} + R_2} \Rightarrow V = 140 \text{ V}$$

Η ένταση του ρεύματος που θα διαρρέει το σωληνοειδές θα είναι:

$$I_{\Sigma} = \frac{V}{R_{\Sigma}} \Rightarrow I_{\Sigma} = \frac{14}{3} \text{ A}$$

Προκύπτει:

$$B' = \mu_0 n I_{\Sigma} \Rightarrow B' = \frac{28}{3} \pi \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

5.95 α) Για την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα προκύπτει:

$$P_R = I^2 R \Rightarrow I = \sqrt{\frac{P_R}{R}} \Rightarrow I = 2 \text{ A}$$

β) Προκύπτει:

$$Q_{\Theta} = I^2 R_{\pi} \cdot \Delta t \Rightarrow R_{\pi} = \frac{Q_{\Theta}}{I^2 \cdot \Delta t} \Rightarrow R_{\pi} = 2 \Omega$$

Υπολογίζουμε τον αριθμό των σπειρών του πηνίου. Έχουμε:

$$L = N\pi\Delta \Rightarrow N = \frac{L}{\pi\Delta} \Rightarrow N = 200 \text{ σπ.}$$

γ) Υπολογίζουμε το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του πηνίου. Προκύπτει:

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \Rightarrow B = \mu_0 \frac{N}{N\delta} I \Rightarrow B = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

Υπολογίζουμε το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στα άκρα του πηνίου. Ισχύει:

$$B_{\text{ακρ}} = \frac{B}{2} \Rightarrow B_{\text{ακρ}} = 2\pi \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

δ) Βρίσκουμε την ηλεκτρεγερτική δύναμη της πηγής. Έχουμε:

$$E = I(R_{\pi} + R) \Rightarrow E = 20 \text{ V}$$

Τελικά προκύπτει:

$$P = EI \Rightarrow P = 40 \text{ W}$$

5.96 α) Ισχύει:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{\frac{L}{2}} \Rightarrow B_1 = 6\pi \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

β) Με τη βοήθεια του διαγράμματος προκύπτει:

$$E = 12 \text{ V}, I_{\beta} = 12 \text{ A}$$

Ισχύει:

$$I_{\beta} = \frac{E}{r} \Rightarrow r = \frac{E}{I_{\beta}} \Rightarrow r = 1 \Omega$$

Για την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το σωληνοειδές προκύπτει:

$$I_{\Sigma} = \frac{E}{r + R_{\Sigma}} \Rightarrow I_{\Sigma} = 1 \text{ A}$$

γ) Για το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου, στο εσωτερικό του σωληνοειδούς έχουμε:

$$B_2 = \mu_0 \cdot \frac{N}{L} I_{\Sigma} \Rightarrow B_2 = 8\pi \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

δ) Για το μέτρο της έντασης του σύνθετου μαγνητικού πεδίου στο Κ έχουμε:

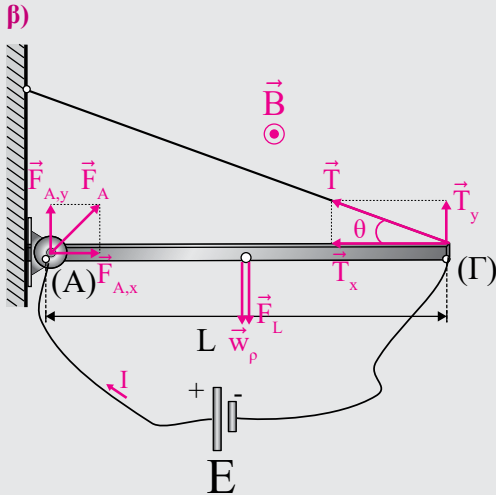
$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \Rightarrow B = \pi \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

5.97 α) Υπολογίζουμε την ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό. Ισχύει:

$$I = \frac{E}{R} \Rightarrow I = 5 \text{ A}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που ασκείται στον αγωγό θα είναι:

$$F_L = BIL \Rightarrow F_L = 40 \text{ N}$$



Στον αγωγό ασκούνται το βάρος του $\vec{w}_p$, η δύναμη από την άρθρωση $\vec{F}_a$, η τάση του νήματος $\vec{T}$ και η δύναμη Laplace $\vec{F}_L$.

Αφού ο αγωγός ισορροπεί, η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στον αγωγό είναι μηδέν ως προς οποιοδήποτε σημείο του αγωγού. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma \tau_A = 0 &\Rightarrow T \cdot \eta\mu\theta \cdot L - w_p \frac{L}{2} - F_L \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \\ T &= \frac{Mg + F_L}{2 \cdot \eta\mu\theta} \Rightarrow \\ T &= 50 \text{ N} \end{aligned}$$

γ) Από την ισορροπία του αγωγού προκύπτει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{A,x} = T \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow F_{A,x} = 30 \text{ N}$$

Επίσης έχουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow F_{A,y} + T \cdot \eta\mu\theta = w_p + F_L \Rightarrow \\ F_{A,y} &= Mg + F_L - T \cdot \eta\mu\theta \Rightarrow \\ F_{A,y} &= 40 \text{ N} + 40 \text{ N} - 40 \text{ N} \Rightarrow \\ F_{A,y} &= 40 \text{ N} \end{aligned}$$

Η δύναμη που δέχεται ο αγωγός από την άρθρωση θα έχει μέτρο:

$$F_A = \sqrt{F_{A,x}^2 + F_{A,y}^2} \Rightarrow F_A = 50 \text{ N}$$

δ) Από την ισορροπία του αγωγού έχουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma \tau_A = 0 &\Rightarrow T_{\theta p} \cdot \eta\mu\theta \cdot L - w_p \frac{L}{2} - F_L' \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \\ 2T_{\theta p} \cdot \eta\mu\theta - Mg &= BI'L \Rightarrow \\ 2T_{\theta p} \cdot \eta\mu\theta - Mg &= B \frac{E'}{R} L \Rightarrow \\ E' &= \frac{R \cdot (2T_{\theta p} \cdot \eta\mu\theta - Mg)}{BL} \Rightarrow \\ E' &= 30 \text{ V} \end{aligned}$$

5.98 α) Από την ισορροπία του αγωγού έχουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow w = F_L \Rightarrow mg = BIL \Rightarrow I = \frac{mg}{BL} \Rightarrow \\ I &= 8 \text{ A} \end{aligned}$$

Προκύπτει:

$$I = \frac{E}{r + R} \text{ ή } r = \frac{E - IR}{I} \Rightarrow r = 2 \Omega$$

β) Ισχύει:

$$I' = \frac{E}{r} \Rightarrow I' = 40 \text{ A}$$

Για το μέτρο της επιτάχυνσης που αποκτάει ο αγωγός, ισχύει:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = ma &\Rightarrow F_L' - w = ma \Rightarrow \\ BI'L - mg &= ma \Rightarrow a = \frac{BI'L - mg}{m} \Rightarrow \\ a &= 40 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

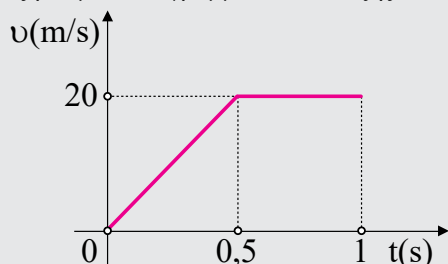
γ) Για τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας, ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \Sigma F \cdot v_1 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = ma(\alpha_1) \Rightarrow \\ \frac{dK}{dt} &= 128 \frac{\text{J}}{\text{s}} \end{aligned}$$

δ) Ο αγωγός μετά τη χρονική στιγμή $t_2 = 0,5 \text{ s}$ θα αρχίσει να εκτελεί Ε.Ο.Κ. με ταχύτητα μέτρου:

$$v_2 = at_2 \Rightarrow v_2 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



5.99 α) Ισχύει:

$$\Phi_0 = B_0 \pi r^2 \Rightarrow \Phi_0 = 5\pi \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

β) Έχουμε:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\Delta B}{\Delta t} \Rightarrow \frac{dB}{dt} = \frac{B - B_0}{t - t_0} \Rightarrow B = B_0 + \frac{dB}{dt} t \Rightarrow$$

$$B = 0,5 + 10\pi t \text{ (S.I.)}$$

$$\text{Ισχύει: } \Phi = B \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow \Phi = 5\pi \cdot 10^{-3} + t \text{ (S.I.)}$$

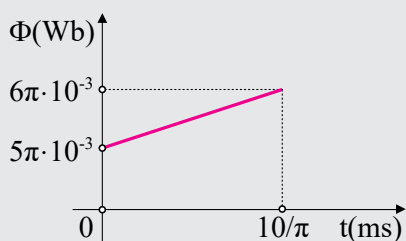
Τη χρονική στιγμή $t_1 = 10/\pi \text{ ms}$ παίρνουμε:

$$B_1 = 0,5 + 10\pi t_1 \Rightarrow B_1 = 0,6 \text{ T}$$

Προκύπτει:

$$\Phi_1 = B_1 \pi r^2 \Rightarrow \Phi_1 = 6\pi \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



γ) Η ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο πλαίσιο είναι:

$$E_{\text{επ}} = -N \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E_{\text{επ}} = -N\pi r^2 \frac{dB}{dt} \Rightarrow$$

$$E_{\text{επ}} = -100 \text{ V}$$

δ) Για το ηλεκτρικό φορτίο που διέρχεται από μια διατομή του αγωγού, ισχύει:

$$q_{\text{επ}} = N \frac{|\Delta\Phi|}{R} \Rightarrow q_{\text{επ}} = 0,05\pi \text{ C}$$

5.100 α) Για τον αριθμό των σπειρών του πλαισίου προκύπτει:

$$\ell = N2\pi a \Rightarrow N = \frac{\ell}{2\pi a} \Rightarrow N = 1000 \text{ σπείρες}$$

β) $0 \leq t < 2\text{s}$:

Ισχύει:

$$E_{\text{επ},1} = -N \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E_{\text{επ},1} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$E_{\text{επ},1} = -5\text{V}$$

Επίσης έχουμε:

$$I_{\text{επ},1} = \frac{E_{\text{επ},1}}{R} \Rightarrow I_{\text{επ},1} = -1\text{A}$$

$2\text{s} \leq t < 6\text{s}$:

Ισχύει:

$$E_{\text{επ},2} = -N \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E_{\text{επ},2} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow E_{\text{επ},2} = 4\text{V}$$

Επίσης έχουμε:

$$I_{\text{επ},2} = \frac{E_{\text{επ},2}}{R} \Rightarrow I_{\text{επ},2} = 0,8\text{A}$$

$6\text{s} \leq t \leq 10\text{s}$:

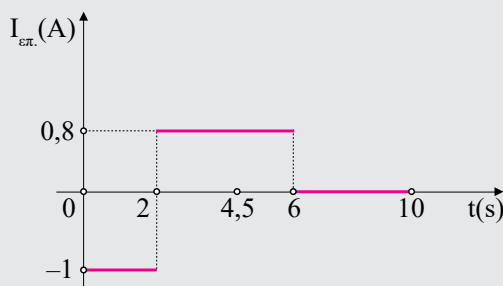
Ισχύει:

$$E_{\text{επ},3} = -N \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E_{\text{επ},3} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow E_{\text{επ},3} = 0$$

Επίσης έχουμε:

$$I_{\text{επ},3} = \frac{E_{\text{επ},3}}{R} \Rightarrow I_{\text{επ},3} = 0$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



γ) $0 \leq t < 2s$:

Ισχύει:

$$|q_1| = N \frac{|\Delta\Phi|}{R} \Rightarrow |q_1| = 2C$$

$2s \leq t < 6s$:

Ισχύει:

$$|q_2| = N \frac{|\Delta\Phi|}{R} \Rightarrow |q_2| = 3,2C$$

$6s \leq t \leq 10s$:

Ισχύει:

$$|q_3| = N \frac{|\Delta\Phi|}{R} \Rightarrow |q_3| = 0$$

Για το φορτίο που πέρασε από μια διατομή του σύρματος, προκύπτει:

$$|q_{ολ}| = |q_1| + |q_2| + |q_3| \Rightarrow |q_{ολ}| = 5,2C$$

δ) $0 \leq t < 2s$:

Ισχύει:

$$Q_1 = I_{επ,1}^2 R \cdot \Delta t \Rightarrow Q_1 = 10J$$

$2s \leq t < 6s$:

Ισχύει:

$$Q_2 = I_{επ,2}^2 R \cdot \Delta t \Rightarrow Q_2 = 12,8J$$

$6s \leq t < 10s$:

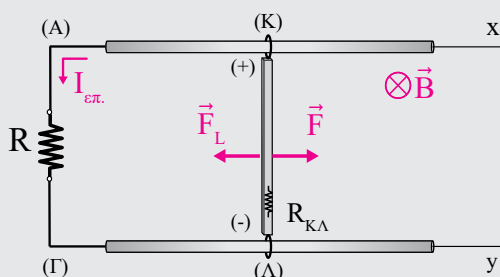
Ισχύει:

$$Q_3 = 0$$

Για τη θερμότητα που εκλύθηκε από το πλαίσιο, λόγω φαινομένου Joule, προκύπτει:

$$Q_{ολ} = Q_1 + Q_2 + Q_3 \Rightarrow Q_{ολ} = 22,8J$$

5.101 α)



Ισχύει:

$$E_{επ} = \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E_{επ} = \frac{BL \cdot dx}{dt} \Rightarrow E_{επ} = BvL$$

Μια τυχαία χρονική στιγμή $t > t_1$ το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_{επ} = \frac{E_{επ}}{R + R_{KΛ}} \Rightarrow I_{επ} = \frac{BvL}{R + R_{KΛ}}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στον αγωγό θα είναι:

$$F_L = BI_{επ}L \Rightarrow F_L = \frac{B^2 v L^2}{R + R_{KΛ}}$$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον αγωγό ΑΓ προκύπτει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F - F_L = ma \Rightarrow a = \frac{F - \frac{B^2 v L^2}{R + R_{KΛ}}}{m} \quad (1)$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $a = 0$ υπολογίζουμε το μέτρο της οριακής ταχύτητας. Έχουμε:

$$v_{op} = \frac{F(R + R_{KΛ})}{B^2 L^2} \Rightarrow v_{op} = 10 \frac{m}{s}$$

β) Ισχύει:

$$v_1 = \frac{v_{op}}{5} \Rightarrow v_1 = 2 \frac{m}{s}$$

Προκύπτει:

$$I_{επ,1} = \frac{Bv_1 L}{R + R_{KΛ}} \Rightarrow I_{επ,1} = 0,5A$$

Τελικά έχουμε:

$$P_{R_{KΛ}} = I_{επ,1}^2 R_{KΛ} \Rightarrow P_{R_{KΛ}} = 0,25W$$

γ) Για την ισχύ της δύναμης Laplace προκύπτει:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v_3 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = F_L \cdot v_3 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = P_{F_L} \Rightarrow P_{F_L} = -16W$$

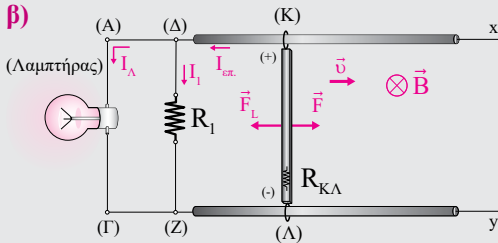
δ) Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. για τον αγωγό ΚΛ έχουμε:

$$0 - \frac{1}{2} m v_{op}^2 = W_{F_L} \Rightarrow W_{F_L} = -5J$$

5.102 α) Για την αντίσταση του λαμπτήρα ισχύει:

$$R_{\Lambda} = \frac{V_{\kappa}^2}{P_{\kappa}} \Rightarrow R_{\Lambda} = 4\Omega$$

β)



Ισχύει:

$$I_{\Lambda} = \frac{P_{\kappa}}{V_{\kappa}} \Rightarrow I_{\Lambda} = 2A$$

Προκύπτει:

$$V_{K\Lambda} = I_{\Lambda} R_{\Lambda} \Rightarrow V_{K\Lambda} = 8V$$

Τελικά έχουμε:

$$P_{R_1} = \frac{V_{K\Lambda}^2}{R_1} \Rightarrow P_{R_1} = \frac{16}{3} W$$

γ) Προκύπτει:

$$I = I_{\Lambda} + I_1 \Rightarrow I = I_{\Lambda} + \frac{V_{K\Lambda}}{R_1} \Rightarrow I = \frac{8}{3} A$$

Ισχύει:

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = \frac{BL \cdot dx}{dt} \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = BuL$$

Επίσης έχουμε:

$$I = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{K\Lambda} + R_{\Lambda}} \Rightarrow I = \frac{BuL}{R_{K\Lambda} + \frac{R_{\Lambda} R_1}{R_{\Lambda} + R_1}} \Rightarrow$$

$$L = \frac{I \left(R_{K\Lambda} + \frac{R_{\Lambda} R_1}{R_{\Lambda} + R_1} \right)}{Bu} \Rightarrow$$

$$L = 0,8 m$$

δ) Έχουμε:

$$F_L = BIL \Rightarrow F_L = \frac{256}{30} N$$

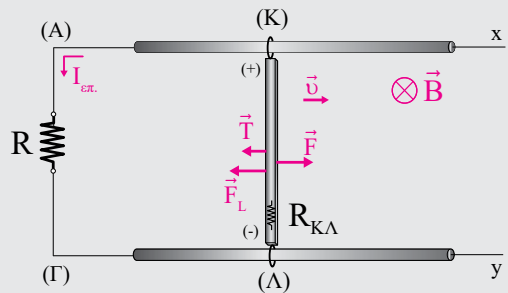
Ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = F_L \Rightarrow F = \frac{256}{30} N$$

Για την ισχύ της εξωτερικής δύναμης που ασκείται στον αγωγό, προκύπτει:

$$P_F = Fv \Rightarrow P_F = \frac{128}{3} W$$

5.103 α)



Ισχύει:

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = \frac{BL \cdot dx}{dt} \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = BuL \Rightarrow$$

$$E_{\varepsilon\pi} = 4V$$

Μια τυχαία χρονική στιγμή $t > t_1$ το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R + R_{K\Lambda}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = 1A$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στον αγωγό θα είναι:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi} L \Rightarrow F_L = 2N$$

β) Για τον συντελεστή τριβής ολίσθησης προκύπτει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = F_L + T \Rightarrow F = F_L + \mu mg \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{F - F_L}{mg} \Rightarrow \mu = 0,2$$

γ) Ισχύει:

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R + R_{K\Lambda}} \Rightarrow q = \frac{Bu \cdot \Delta t \cdot L}{R + R_{K\Lambda}} \Rightarrow$$

$$q = 2C$$

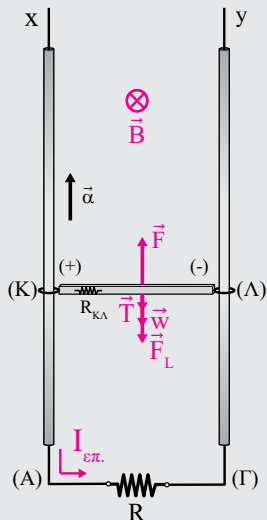
δ) Για το ζητούμενο ποσοστό έχουμε:

$$\Pi(\%) = \frac{Q}{W_F} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = \frac{|T v \cdot \Delta t|}{F v \cdot \Delta t} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{\mu mg}{F} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{100}{3} \%$$

5.104 α)



Ισχύει:

$$E_{επ} = \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E_{επ} = \frac{BLdy}{dt} \Rightarrow$$

$$E_{επ} = BLv \Rightarrow E_{επ} = BLat$$

Μια τυχαία χρονική στιγμή $t > t_0$ το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_{επ} = \frac{E_{επ}}{R + R_{KΛ}} \Rightarrow I_{επ} = \frac{BLat}{R + R_{KΛ}} \Rightarrow I_{επ} = t(\text{S.I.})$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στον αγωγό θα είναι:

$$F_L = BI_{επ}L \Rightarrow F_L = t(\text{S.I.})$$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον αγωγό ΚΛ προκύπτει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F - F_L - w - T = ma \Rightarrow$$

$$F = ma + F_L + mg + T \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{5} + \mathbf{t}(\text{S.I.})$$

β) Ισχύει:

$$I_{επ,1} = t_1 \Rightarrow I_{επ,1} = 1A$$

Για τη ζητούμενη θερμική ισχύ, προκύπτει:

$$P_R = I_{επ,1}^2 R \Rightarrow P_R = 2W$$

γ) Έχουμε:

$$P_F = F_2 v_2 \Rightarrow P_F = (5 + t_2) \alpha t_2 \Rightarrow$$

$$P_F = 70W$$

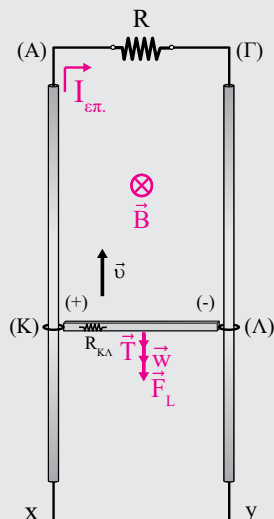
δ) Ισχύει:

$$h = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \Rightarrow h = 2,5m$$

Για τη μέση ισχύ του βάρους του αγωγού, προκύπτει:

$$\bar{P}_w = \frac{-mgh}{t_1} \Rightarrow \bar{P}_w = -5W$$

5.105 α)



Ισχύει:

$$v_1 = \frac{v_0}{4} \Rightarrow v_1 = 2 \frac{m}{s}$$

Προκύπτει:

$$E_{επ,1} = B v_1 L \Rightarrow E_{επ,1} = 2V$$

Την χρονική στιγμή t_1 το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα έντασης:

$$I_{επ,1} = \frac{E_{επ,1}}{R + R_{KΛ}} \Rightarrow I_{επ,1} = 0,5A$$

Για τη ζητούμενη θερμική ισχύ, έχουμε:

$$P_R = I_{επ,1}^2 R \Rightarrow P_R = 0,75W$$

β) Ισχύει:

$$P_{\eta\lambda} = E_{\varepsilon\pi,1} I_{\varepsilon\pi,1} \Rightarrow P_{\eta\lambda} = 1W$$

γ) Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στον αγωγό τη χρονική t_1 θα είναι:

$$F_{L,1} = BI_{\varepsilon\pi,1} L \Rightarrow F_{L,1} = 0,5N$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του αγωγού ΚΛ είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v_1 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = (-F_{L,1} - w - T) \cdot v_1 \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -7 \frac{J}{s}$$

δ) Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον αγωγό ΚΛ τη χρονική στιγμή t_2 , προκύπτει:

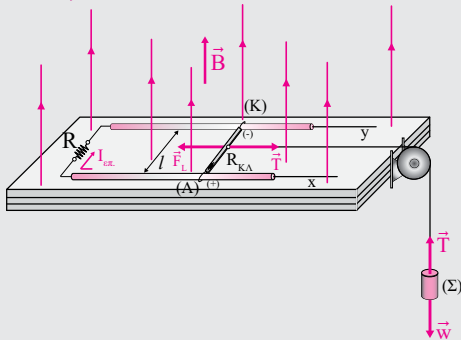
$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow F_{L,2} + w + T = m\alpha \Rightarrow$$

$$\frac{B^2 v_2 L^2}{R + R_{K\Lambda}} = m\alpha - mg - T \Rightarrow$$

$$v_2 = \frac{(m\alpha - mg - T)(R + R_{K\Lambda})}{B^2 L^2} \Rightarrow$$

$$v_2 = 1 \frac{m}{s}$$

5.106 α)



Για το σώμα Σ ισχύει:

$$\Sigma F_y = m\alpha \Rightarrow w - T = m\alpha \Rightarrow mg - T = m\alpha \quad (1)$$

Μια τυχαία χρονική στιγμή $t > t_0$ το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R + R_{K\Lambda}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{BvL}{R + R_{K\Lambda}}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στη ράβδο ΚΛ θα είναι:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi} L \Rightarrow F_L = \frac{B^2 v L^2}{R + R_{K\Lambda}}$$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη ράβδο ΚΛ προκύπτει:

$$\Sigma F_y = m_{K\Lambda} \alpha \Rightarrow T - F_L = m_{K\Lambda} \alpha \Rightarrow$$

$$T - \frac{B^2 v L^2}{R + R_{K\Lambda}} = m_{K\Lambda} \alpha \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε:

$$\alpha = \frac{mg - \frac{B^2 v L^2}{R + R_{K\Lambda}}}{m + m_{K\Lambda}} \quad (3)$$

Από την τελευταία σχέση (3) προκύπτει ότι όσο αυξάνεται η ταχύτητα της ράβδου ΚΛ, τόσο θα μειώνεται και το μέτρο της επιτάχυνσής της. Επομένως, **η ράβδος θα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση που το μέτρο της συνεχώς μειώνεται μέχρι τη στιγμή που θα μηδενιστεί η επιτάχυνση και πλέον θα κινείται με σταθερή ταχύτητα, την οριακή της ταχύτητα.**

β) Θέτοντας στη σχέση (3) όπου $\alpha = 0$ βρίσκουμε το μέτρο της οριακής ταχύτητας του αγωγού. Για το μέτρο της οριακής ταχύτητας που αποκτάει η ράβδος, προκύπτει:

$$\frac{B^2 v_{op} L^2}{R + R_{K\Lambda}} = mg \Rightarrow v_{op} = \frac{(R + R_{K\Lambda})}{B^2 L^2} mg \Rightarrow$$

$$v_{op} = 10 \frac{m}{s}$$

γ) Ισχύει:

$$F_{L,1} = \frac{B^2 v_{op} L^2}{R + R_{K\Lambda}} \Rightarrow F_{L,1} = 1N$$

Τελικά προκύπτει:

$$\frac{dE_{\eta\lambda}}{dt} = \left| F_{L,1} \frac{v_{op}}{5} \right| \Rightarrow \frac{dE_{\eta\lambda}}{dt} = 2 \frac{J}{s}$$

δ) Ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του Σ είναι:

$$\frac{dU}{dt} = -mg \frac{v_{op}}{5} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -10 \frac{J}{s}$$

5.107 α) Για την περίοδο της εναλλασσόμενης τάσης προκύπτει:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2 \cdot \Delta t \Rightarrow T = 20ms$$

Η γωνιακή συχνότητα της τάσης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 100\pi \frac{rad}{s}$$

β) Προκύπτει:

$$t_1 = \frac{T}{4} \Rightarrow t_1 = 5ms$$

γ) Για τη ζητούμενη μεταβολή της φάσης ισχύει:

$$\Delta\phi = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta\phi = 8\pi \text{ rad}$$

δ) Ισχύει:

$$v = V\eta\mu\omega t \Rightarrow \frac{V}{2} = V\eta\mu\omega t_2 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\omega t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega t_2 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{T} t_2 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{T}{12}$$

Επίσης ισχύει:

$$v = V\eta\mu\omega t \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}V}{2} = V\eta\mu\omega t_3 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\omega t_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\omega t_3 = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_3 = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow t_3 = \frac{5T}{8}$$

Για τη ζητούμενη χρονική διάρκεια, προκύπτει:

$$\Delta t = t_3 - t_2 \Rightarrow \Delta t = \frac{5T}{8} - \frac{T}{12} \Rightarrow \Delta t = \frac{13T}{24} \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{65}{6} ms$$

5.108 α) Βρίσκουμε την αντίσταση του λαμπτήρα. Ισχύει:

$$R_{\Lambda} = \frac{V_K^2}{P_K} \Rightarrow R_{\Lambda} = 50\Omega$$

Ισχύει:

$$p = vi \Rightarrow p = VI \cdot \eta\mu^2\omega t \Rightarrow p = \frac{V^2}{R_{\Lambda}} \cdot \eta\mu^2\omega t \Rightarrow$$

$$p = 6400W$$

β) Ισχύει:

$$V_{ev} = \frac{V}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_{ev} = 400V$$

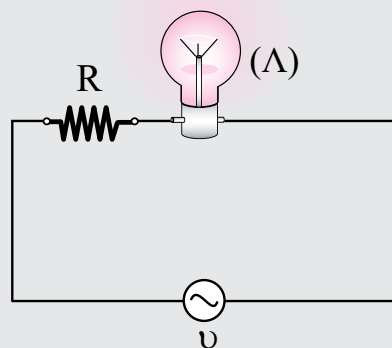
Επομένως, προκύπτει ότι:

$$V_{ev} > V_K$$

Αρα, ο λαμπτήρας δεν λειτουργεί κανονικά.

γ) Για να λειτουργεί κανονικά ο λαμπτήρας θα πρέπει να διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_K = \frac{P_K}{V_K} \Rightarrow I_K = 2A$$



Για την αντίσταση R προκύπτει:

$$V_{ev} = I_K (R + R_{\Lambda}) \Rightarrow R = \frac{V_{ev} - I_K R_{\Lambda}}{I_K} \Rightarrow$$

$$R = 150\Omega$$

δ) Ισχύει:

$$i = \frac{I_K}{2} \Rightarrow i = 1A$$

Η ισχύς που καταναλώνει ο αντιστάτης είναι:

$$p_R = i^2 R \Rightarrow p_R = 150 \text{ W}$$

5.109 α) Για την περίοδο του ρεύματος προκύπτει:

$$i = I \eta \mu \omega t \Rightarrow \frac{I}{\sqrt{2}} = I \eta \mu \omega t_1 \Rightarrow$$

$$\eta \mu \omega t_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \omega t_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow T = 8 t_1 \Rightarrow T = 0,04 \text{ s}$$

β) Έχουμε:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{80 \cdot 10^{-3} \text{ s}}{0,04 \text{ s}} \Rightarrow \Delta t = 2T$$

Επομένως, η ένταση του ρεύματος μηδενίζεται σε χρονική διάρκεια Δt 4 φορές.

γ) Ισχύει:

$$\frac{t_2}{T} = \frac{10^{-2}}{0,04} \Rightarrow t_2 = \frac{T}{4}$$

Για το πλάτος της έντασης του ρεύματος προκύπτει:

$$i_2 = I \Rightarrow I = 2 \text{ A}$$

δ) Έχουμε:

$$i = I \eta \mu \omega t \Rightarrow \pm \frac{I}{\sqrt{2}} = I \eta \mu \omega t \Rightarrow \eta \mu \omega t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\eta \mu \omega t = \eta \mu \frac{\pi}{4} (1) \text{ και } \eta \mu \omega t = \eta \mu - \frac{\pi}{4} (2)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτουν οι λύσεις:

$$\omega t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$t = \left(\kappa + \frac{1}{8} \right) T (3)$$

Θέτοντας στην (3) $\kappa = 0$ προκύπτει:

$$t = \frac{T}{8}$$

Από τη σχέση (1) προκύπτουν επίσης οι λύσεις:

$$\omega t = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$$

$$t = \left(\kappa + \frac{3}{8} \right) T (4)$$

Θέτοντας στην (4) $\kappa = 0$ προκύπτει:

$$t = \frac{3T}{8}$$

Από τη σχέση (2) προκύπτουν οι λύσεις:

$$\omega t = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$t = \left(\kappa - \frac{1}{8} \right) T (5)$$

Θέτοντας στην (5) $\kappa = 1$ προκύπτει:

$$t = \frac{7T}{8}$$

Από τη σχέση (2) προκύπτουν επίσης οι λύσεις:

$$\omega t = 2\kappa\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} \Rightarrow$$

$$t = \left(\kappa + \frac{5}{8} \right) T (6)$$

Θέτοντας στην (6) $\kappa = 1$ προκύπτει:

$$t = \frac{5T}{8}$$

5.110 α) Από το διάγραμμα έχουμε:

$$T + \frac{T}{2} = 15 \text{ ms} \Rightarrow T = 10 \text{ ms}$$

Για τη συχνότητα της εναλλασσόμενης τάσης, προκύπτει:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 100 \text{ Hz}$$

β) Ισχύει:

$$p = v i \Rightarrow p = V I \cdot \eta \mu^2 \omega t (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$p_{\max} = V I \Rightarrow p_{\max} = I^2 R \Rightarrow I = \sqrt{\frac{p_{\max}}{R}} \Rightarrow$$

$$I = 2\sqrt{2} \text{ A}$$

Για την ενεργό ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη έχουμε:

$$I_{\text{ev}} = \frac{I}{\sqrt{2}} \Rightarrow I_{\text{ev}} = 2 \text{ A}$$

γ) Για τη μέση ισχύ έχουμε:

$$\bar{P} = V_{\text{εV}} I_{\text{εV}} \Rightarrow \bar{P} = \frac{VI}{2} \Rightarrow \bar{P} = \frac{P_{\text{max}}}{2} \Rightarrow \bar{P} = 200 \text{ W}$$

δ) Για τη ζητούμενη θερμότητα προκύπτει:

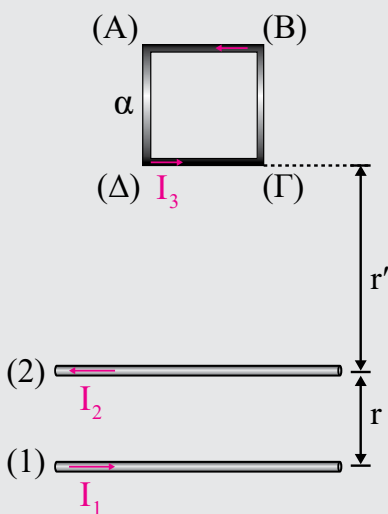
$$Q_{\Theta} = I_{\text{εV}}^2 R \cdot \Delta t \Rightarrow Q_{\Theta} = 10 \text{ J}$$

ΘΕΜΑ Δ

5.111 α) Οι αγωγοί (1), (2) απωθούνται επομένως τα ρεύματα I_1 , I_2 είναι αντίρροπα. Για το μήκος της πλευράς του πλαισίου έχουμε:

$$\frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2}{r} \Rightarrow r = \frac{2 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I_1 I_2}{\frac{F}{\ell}} \Rightarrow$$

$$\alpha = 0,2 \text{ m}$$

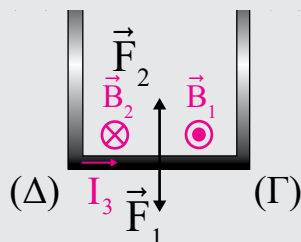


β) Ισχύει:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{r + r'} \Rightarrow B_1 = 10^{-6} \text{ T}$$

Επίσης ισχύει:

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{r'} \Rightarrow B_2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$



Έχουμε:

$$F_1 = B_1 I_3 \alpha \Rightarrow F_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

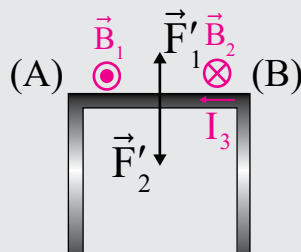
$$F_2 = B_2 I_3 \alpha \Rightarrow F_2 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται η πλευρά ΔΓ του πλαισίου είναι:

$$\Sigma F_{\Delta\Gamma} = F_2 - F_1 \Rightarrow \Sigma F_{\Delta\Gamma} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

γ) Ισχύει:

$$B'_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{\alpha + r + r'} \Rightarrow B'_1 = 8 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$



Επίσης ισχύει:

$$B'_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{r' + r} \Rightarrow B'_2 = 15 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

Έχουμε:

$$F'_1 = B'_1 I_3 \alpha \Rightarrow F'_1 = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

Επίσης έχουμε:

$$F'_2 = B'_2 I_3 \alpha \Rightarrow F'_2 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται η πλευρά ΑΒ του πλαισίου είναι:

$$\Sigma F_{AB} = F'_2 - F'_1 \Rightarrow \Sigma F_{AB} = 1,4 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

δ) Η συνισταμένη δύναμη στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ είναι ίση με μηδέν.

Τελικά, η συνισταμένη δύναμη που δέχεται όλο το πλαίσιο, είναι:

$$\Sigma F_{\text{ολ}} = \Sigma F_{\Delta\Gamma} - \Sigma F_{\text{AB}} \Rightarrow \Sigma F_{\text{ολ}} = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

5.112 α) Για το μήκος του σύρματος από το οποίο είναι φτιαγμένο το πηνίο ισχύει:

$$l_1 = N_1 \pi \Delta$$

Το εμβαδόν διατομής του σύρματος είναι:

$$S = \pi \frac{\delta^2}{4}$$

Για την αντίσταση του πηνίου έχουμε:

$$R_\pi = \rho \frac{l_1}{S} \Rightarrow R_\pi = \rho \frac{N_1 \pi \Delta}{\pi \frac{\delta^2}{4}} \Rightarrow R_\pi = \frac{4 \rho N_1 \Delta}{\delta^2} \Rightarrow R_\pi = 2 \Omega$$

β) Υπολογίζουμε την ένταση του ρεύματος που διαρρέει την πηγή:

$$I_1 = \frac{E}{R_\pi + r + R} \Rightarrow I_1 = 2 \text{ A}$$

Για την πολική τάση της πηγής προκύπτει:

$$V_\pi = E - I_1 r \Rightarrow V_\pi = 18 \text{ V}$$

γ) Ισχύει:

$$\Pi(\%) = \frac{I_1^2 R \cdot \Delta t}{EI_1 \cdot \Delta t} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = \frac{I_1 R}{E} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 70\%$$

δ) Για να είναι η ένταση του μαγνητικού πεδίου ίση με μηδέν στο κέντρο του κυκλικού αγωγού θα πρέπει οι εντάσεις $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$ λόγω του πηνίου και λόγω του κυκλικού πλαισίου να είναι αντίθετες. Δηλαδή ισχύει:

$$B_1 = B_2 \Rightarrow \mu_0 \frac{N_1}{\ell} I_1 = N_2 \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I_2}{r_2} \Rightarrow N_2 = \frac{2N_1 I_1 r_2}{I_2 \ell} \Rightarrow N_2 = 1000 \text{ σπείρες}$$

5.113 α) Έχουμε:

$$\frac{R_{\Sigma_1}}{R_{\Sigma_2}} = \frac{L_1}{L_2} \Rightarrow \frac{R_{\Sigma_1}}{R_{\Sigma_2}} = 3 \Rightarrow R_{\Sigma_2} = \frac{R_{\Sigma_1}}{3}$$

Τελικά, για την αντίσταση του πηνίου Π_1 , προκύπτει:

$$R_{\Sigma_1} + R_{\Sigma_2} = R_\Sigma \Rightarrow \frac{4R_{\Sigma_1}}{3} = R_\Sigma \Rightarrow R_{\Sigma_1} = 12 \Omega$$

Ισχύει:

$$n_1 = n \Rightarrow n_1 = 600 \frac{\text{σπείρες}}{\text{m}}$$

β) Έχουμε:

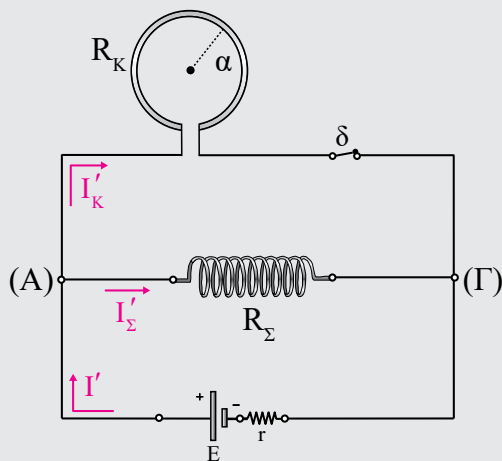
$$I = \frac{E}{R_{\Sigma_1} + r} \Rightarrow I = 5 \text{ A}$$

Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου, στο κέντρο του πηνίου Π_1 , είναι:

$$B_1 = \mu_0 n_1 I \Rightarrow B_1 = 12 \cdot \pi \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

γ) Έχουμε:

$$I' = \frac{E}{\frac{R_{\Sigma_1} R_K}{R_{\Sigma_1} + R_K} + r} \Rightarrow I' = 14 \text{ A}$$



Ισχύει:

$$V_{\Delta\Gamma} = V_\pi \Rightarrow V_{\Delta\Gamma} = E - I' r \Rightarrow V_{\Delta\Gamma} = 42 \text{ V}$$

Προκύπτει:

$$I'_K = \frac{V_{\Delta\Gamma}}{R_K} \Rightarrow I'_K = 10,5 \text{ A}$$

Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου, στο κέντρο του κυκλικού αγωγού, είναι:

$$B_K = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I'_K}{a} \Rightarrow B_K = 42 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

δ) Για την ηλεκτρική ισχύ που παρέχει η πηγή στο εξωτερικό κύκλωμα, έχουμε:

$$P_{e\xi} = V_{\pi} I' \Rightarrow P_{e\xi} = 588 \text{ W}$$

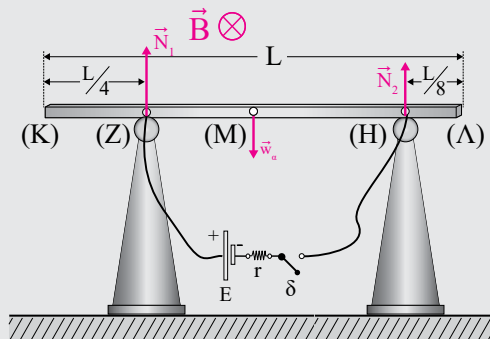
Ισχύει:

$$I'_{\Sigma} = \frac{V_{A\Gamma}}{R_{\Sigma_1}} \Rightarrow I'_{\Sigma} = \frac{21}{6} \text{ A}$$

Προκύπτει τελικά:

$$B_a = \frac{\mu_0 n_1 I'_{\Sigma}}{2} \Rightarrow B_a = 42\pi \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

5.114 α)



Ισχύει:

$$\Sigma \tau_Z = 0 \Rightarrow N_2 \frac{5L}{8} = w_{\alpha} \frac{L}{4} \Rightarrow N_2 = \frac{2mg}{5} \Rightarrow$$

$$N_2 = 16 \text{ N}$$

Επίσης έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = w_{\alpha} \Rightarrow N_1 = mg - N_2 \Rightarrow$$

$$N_1 = 24 \text{ N}$$

β) Ισχύει:

$$ZH = \frac{5L}{8} \Rightarrow ZH = 0,5 \text{ m}$$

Βρίσκουμε την αντίσταση του τμήματος ZH του αγωγού ΚΛ. Ισχύει:

$$\frac{R_{K\Lambda}}{R_{ZH}} = \frac{L}{5L} \Rightarrow R_{ZH} = \frac{5}{8} R_{K\Lambda} \Rightarrow R_{ZH} = 5 \Omega$$

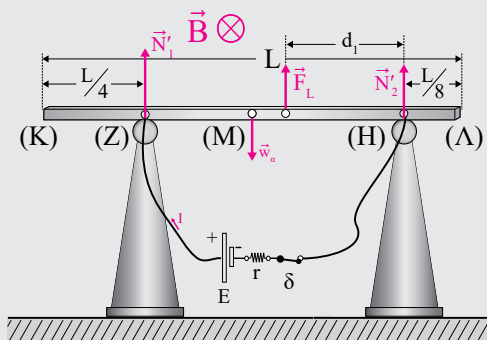
Υπολογίζουμε την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα. Ισχύει:

$$I = \frac{E}{R_{ZH}} \Rightarrow I = 5 \text{ A}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που ασκείται στον αγωγό είναι:

$$F_L = BI \cdot ZH \Rightarrow F_L = 5 \text{ N}$$

γ)



Έχουμε:

$$d_1 = \frac{ZH}{2} \Rightarrow d_1 = 0,25 \text{ m}$$

Ισχύει:

$$\Sigma \tau_H = 0 \Rightarrow N'_1 \frac{5L}{8} + F_L d_1 = w_{\alpha} \frac{3L}{8} \Rightarrow$$

$$N'_1 = \frac{mg \frac{3L}{8} - F_L d_1}{\frac{5L}{8}} \Rightarrow N'_1 = 21,5 \text{ N}$$

Επίσης έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N'_1 + N'_2 + F_L = w_{\alpha} \Rightarrow$$

$$N'_2 = mg - N'_1 - F_L \Rightarrow$$

$$N'_2 = 13,5 \text{ N}$$

δ) Για να μην ανατρέπεται ο αγωγός θα πρέπει:

$$N'_2 \geq 0(1)$$

Ισχύει:

$$\Sigma \tau_z = 0 \Rightarrow N_2'' \frac{5L}{8} + F_L'' d_1 = w_\alpha \frac{L}{4} \Rightarrow$$

$$N_1'' = \frac{mg \frac{L}{4} - BI \cdot ZH \cdot d_1}{\frac{5L}{8}} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$mg \frac{L}{4} - BI \cdot ZH \cdot d_1 \geq 0 \Rightarrow B \leq \frac{mg \frac{L}{4}}{I \cdot ZH \cdot d_1} \Rightarrow$$

$$B_{\max} = 12,8 \text{ T}$$

5.115 α) Ισχύει:

$$\Delta U = 0 - mgh \Rightarrow h = \frac{-\Delta U}{mg} \Rightarrow h = 0,05 \text{ m}$$

Υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας του αγωγού τη χρονική στιγμή t_1 :

$$v_1 = gt_1 \Rightarrow v_1 = g \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow v_1 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$E_{\varepsilon\pi,1} = \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = \frac{BLdy}{dt} \Rightarrow E_{\varepsilon\pi,1} = BLv_1 \Rightarrow$$

$$E_{\varepsilon\pi,1} = 2 \text{ V}$$

Για την τάση στα άκρα του αγωγού ισχύει:

$$V_{A\Gamma} = E_{\varepsilon\pi,1} \Rightarrow V_{A\Gamma} = 2 \text{ V}$$

β) Τη χρονική στιγμή t_1 η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι:

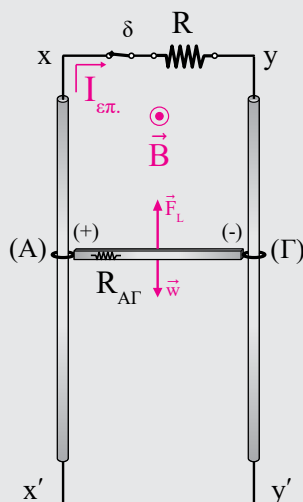
$$I_{\varepsilon\pi,1} = \frac{E_{\varepsilon\pi,1}}{R + R_{A\Gamma}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi,1} = 4 \text{ A}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που ασκείται στον αγωγό ΑΓ είναι:

$$F_{L,1} = BI_{\varepsilon\pi,1}L \Rightarrow F_{L,1} = 8 \text{ N}$$

Το βάρος του αγωγού είναι:

$$w = mg \Rightarrow w = 5 \text{ N}$$



Παρατηρούμε ότι $w < F_{L,1}$ επομένως, αμέσως μετά τη χρονική στιγμή που θα κλείσουμε τον διακόπτη, ο αγωγός ΑΓ θα αρχίσει να επιβραδύνεται.

Μια τυχαία χρονική στιγμή $t > t_1$ το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R + R_{A\Gamma}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{BvL}{R + R_{A\Gamma}}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στον αγωγό θα είναι:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi}L \Rightarrow F_L = \frac{B^2 v L^2}{R + R_{A\Gamma}}$$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον αγωγό ΑΓ προκύπτει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F_L - w = ma \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\frac{B^2 v L^2}{R + R_{A\Gamma}} - mg}{m} \quad (1)$$

Από την τελευταία σχέση (1) προκύπτει ότι όσο μικραίνει η ταχύτητα του αγωγού ΑΓ, τόσο θα μειώνεται και το μέτρο της επιβραδυνσης του αγωγού. Επομένως, ο αγωγός θα εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση που το μέτρο της συνεχώς μειώνεται

μέχρι τη στιγμή που θα μηδενιστεί η επιβράδυνση και πλέον θα κινείται με σταθερή ταχύτητα, την οριακή του ταχύτητα.

γ) Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $\alpha = 0$ βρίσκουμε το μέτρο της οριακής ταχύτητας του αγωγού. Προκύπτει:

$$v_{op} = \frac{mg(R + R_{AG})}{B^2 L^2} \Rightarrow v_{op} = 0,625 \frac{m}{s}$$

Ισχύει:

$$v_2 = \frac{6v_{op}}{5} \Rightarrow v_2 = 0,75 \frac{m}{s}$$

Προκύπτει:

$$I_{\varepsilon\pi,2} = \frac{Bv_2 L}{R + R_{AG}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi,2} = 3A$$

Τελικά έχουμε:

$$P_R = I_{\varepsilon\pi,2}^2 R \Rightarrow P_R = 2,7W$$

δ) Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας είναι:

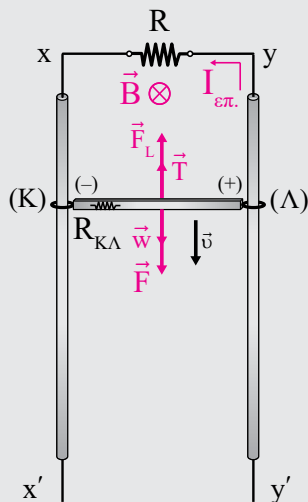
$$\frac{dU}{dt} = -mgv_{op} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -3,125 \frac{J}{s}$$

5.116 α) Ισχύει:

$$E_{\varepsilon\pi} = BLv \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = BL(v_0 + \alpha t)$$

Μια τυχαία χρονική στιγμή $t > t_0$ το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R + R_{KL}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{BL(v_0 + \alpha t)}{R + R_{KL}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = 8 + 4t \text{ (S.I.)}$$



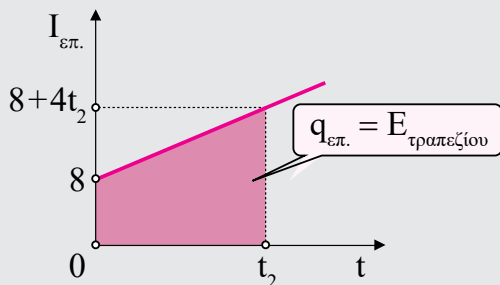
Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στον αγωγό θα είναι:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi} L \Rightarrow F_L = 8 + 4t \text{ (S.I.)}$$

Τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$F_{L,1} = 8 + 4t_1 \Rightarrow F_{L,1} = 10N$$

β) Σχεδιάζουμε το διάγραμμα $I_{\varepsilon\pi}$ - t για τη χρονική διάρκεια $t_0 = 0 \rightarrow t_2$:



Ισχύει:

$$q_{\varepsilon\pi} = E \Rightarrow q_{\varepsilon\pi} = \frac{t_2(8 + 8 + 4t_2)}{2} \Rightarrow t_2^2 + 4t_2 - 5 = 0 \Rightarrow t_2 = 1s$$

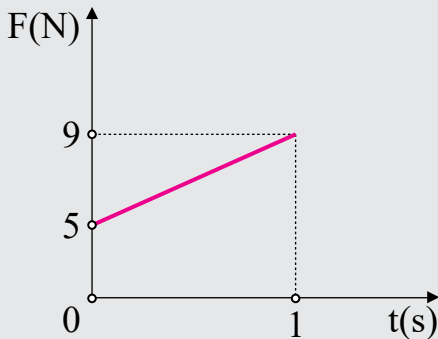
γ) Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον αγωγό ΚΛ προκύπτει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F - F_L + w - T = ma \Rightarrow$$

$$F = ma + F_L - mg + T \Rightarrow$$

$$F = 5 + 4t \text{ (S.I.)}$$

Το διάγραμμα για τη χρονική διάρκεια 0-1s είναι το εξής:



δ) Για το μέτρο της οριακής ταχύτητας που θα αποκτήσει ο αγωγός ΚΛ, προκύπτει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow -F_L - T + w = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{B^2 v_{op} L^2}{R + R_{KL}} + T = mg \Rightarrow$$

$$v_{op} = \frac{(mg - T)(R + R_{KL})}{B^2 L^2} \Rightarrow v_{op} = 2 \frac{m}{s}$$

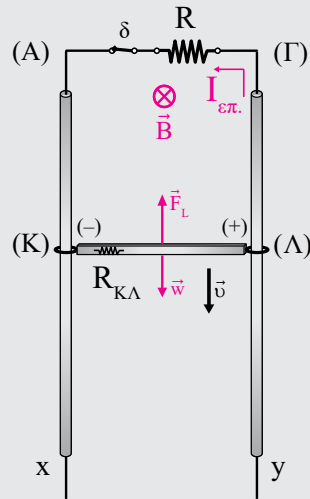
5.117 α) Για το μέτρο της ταχύτητας του αγωγού, έχουμε:

$$\frac{dU}{dt} = -mgv_1 \Rightarrow v_1 = \frac{\frac{dU}{dt}}{-mg} \Rightarrow v_1 = 2 \frac{m}{s}$$

β) Τη χρονική στιγμή t_1 η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι:

$$I_{\varepsilon\pi,1} = \frac{E_{\varepsilon\pi,1}}{R + R_{KL}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi,1} = \frac{Bv_1 L}{R + R_{KL}} \Rightarrow$$

$$I_{\varepsilon\pi,1} = 2A$$



Το μέτρο της δύναμης Laplace που ασκείται στον αγωγό ΚΛ είναι:

$$F_{L,1} = BI_{\varepsilon\pi,1} L \Rightarrow F_{L,1} = 1N$$

Το βάρος του αγωγού είναι:

$$w = mg \Rightarrow w = 2N$$

Παρατηρούμε ότι $w > F_{L,1}$ επομένως, αμέσως μετά τη χρονική στιγμή που θα κλείσουμε τον διακόπτη, ο αγωγός ΑΓ θα αρχίσει να επιταχύνεται.

Μια τυχαία χρονική στιγμή $t > t_1$ το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R + R_{KL}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{BvL}{R + R_{KL}}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στον αγωγό θα είναι:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi} L \Rightarrow F_L = \frac{B^2 v L^2}{R + R_{KL}}$$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον αγωγό ΚΛ προκύπτει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow w - F_L = ma \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{mg - \frac{B^2 v L^2}{R + R_{KL}}}{m} \quad (1)$$

Από την τελευταία σχέση (1) προκύπτει ότι όσο αυξάνεται η ταχύτητα του αγωγού ΚΛ,

τόσο θα μειώνεται και το μέτρο της επιτάχυνσης του αγωγού. Επομένως, ο αγωγός θα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση που το μέτρο της συνεχώς μειώνεται μέχρι τη στιγμή που θα μηδενιστεί η επιτάχυνση και πλέον ο αγωγός θα κινείται με σταθερή ταχύτητα, την οριακή του ταχύτητα.
Θέτοντας στη σχέση (1), όπου $\alpha = 0$, βρίσκουμε το μέτρο της οριακής ταχύτητας του αγωγού. Προκύπτει:

$$v_{op} = \frac{mg(R + R_{KL})}{B^2 L^2} \Rightarrow v_{op} = 4 \frac{m}{s}$$

Η κινητική ενέργεια του αγωγού θα είναι:

$$K = \frac{1}{2} m v_{op}^2 \Rightarrow K = 1,6 J$$

γ) Ισχύει:

$$q_{\varepsilon\pi} = \frac{|\Delta\Phi|}{R + R_{KL}} \Rightarrow q_{\varepsilon\pi} = \frac{BLh}{R + R_{KL}} \Rightarrow$$

$$q_{\varepsilon\pi} = 7,2 C$$

δ) Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε:

$$\frac{1}{2} m v_{op}^2 - \frac{1}{2} m v^2 = W_{F_L} + W_w \Rightarrow$$

$$W_{F_L} = \frac{1}{2} m v_{op}^2 - \frac{1}{2} m v^2 - mgh \Rightarrow$$

$$W_{F_L} = -13,2 J$$

Η συνολική θερμότητα που εκλύεται από το κύκλωμα για τη συγκεκριμένη κίνηση είναι:

$$Q_{\Theta} = -|W_{F_L}| \Rightarrow Q_{\Theta} = 13,2 J$$

Επειδή οι δύο αντιστάτες κάθε χρονική στιγμή διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, θα ισχύει:

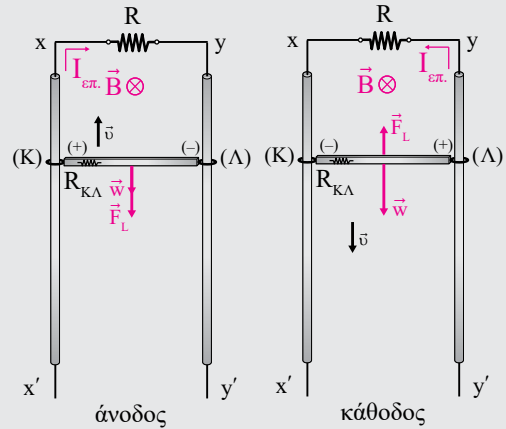
$$\frac{Q_{R_{KL}}}{Q_R} = \frac{R_{KL}}{R} \Rightarrow \frac{Q_{R_{KL}}}{Q_R} = \frac{3}{2} \Rightarrow Q_R = \frac{2}{3} Q_{R_{KL}}$$

Τελικά προκύπτει:

$$Q_{\Theta} = Q_{R_{KL}} + Q_R \Rightarrow Q_{\Theta} = \frac{5}{3} Q_{R_{KL}} \Rightarrow Q_{R_{KL}} = \frac{3Q_{\Theta}}{5}$$

$$\Rightarrow Q_{R_{KL}} = 7,92 J$$

5.118



α) Άνοδος:

Μια τυχαία χρονική στιγμή το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R + R_{KL}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{BvL}{R + R_{KL}}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στον αγωγό θα είναι:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi}L \Rightarrow F_L = \frac{B^2 v L^2}{R + R_{KL}}$$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον αγωγό ΑΓ (θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα κάτω) προκύπτει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F_L + w = ma \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\frac{B^2 v L^2}{R + R_{KL}} + mg}{m} \quad (1)$$

Από την τελευταία σχέση (1) προκύπτει ότι όσο μειώνεται η ταχύτητα του αγωγού ΑΓ, τόσο θα μειώνεται και το μέτρο της επιβράδυνσής του. Επομένως, ο αγωγός θα εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση που το μέτρο της συνεχώς μειώνεται μέχρι τη στιγμή που στιγμιαία ακινητοποιείται.

Κάθοδος:

Μετά τη στιγμιαία ακινητοποίησή του, ο αγωγός λόγω του βάρους του θα αρχίσει να κινεί-

ται προς τα κάτω. Η Η.Ε.Δ. από επαγωγή που θα εμφανίζεται στα άκρα του θα έχει διαφορετική πολικότητα από αυτήν της ανόδου, άρα, θα έχει αντίθετη φορά το επαγωγικό ρεύμα όπως και η δύναμη Laplace.

Μια τυχαία χρονική στιγμή το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R + R_{\kappa\lambda}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{BvL}{R + R_{\kappa\lambda}}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στον αγωγό θα είναι:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi}L \Rightarrow F_L = \frac{B^2vL^2}{R + R_{\kappa\lambda}}$$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον αγωγό ΚΛ (θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα κάτω) προκύπτει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow w - F_L = ma \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{mg - \frac{B^2vL^2}{R + R_{\kappa\lambda}}}{m} \quad (2)$$

Από την τελευταία σχέση (2) προκύπτει ότι όσο αυξάνεται η ταχύτητα του αγωγού ΚΛ, τόσο θα μειώνεται και το μέτρο της επιτάχυνσής του. Επομένως, **ο αγωγός θα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση που το μέτρο της συνεχώς μειώνεται μέχρι τη στιγμή που θα μηδενιστεί η επιτάχυνση και πλέον θα κινείται με σταθερή ταχύτητα, την οριακή του ταχύτητα.**

β) Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $v = 2\text{ m/s}$ έχουμε:

$$\alpha = \frac{\frac{B^2vL^2}{R + R_{\kappa\lambda}} + mg}{m} \Rightarrow \alpha = 12,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Για το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του αγωγού, προκύπτει:

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F \quad \text{ή} \quad \frac{dp}{dt} = ma \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 1,25 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

γ) Ισχύει:

$$F_L = \frac{B^2vL^2}{R + R_{\kappa\lambda}} \Rightarrow F_L = 0,25 \text{ N}$$

Τελικά έχουμε:

$$P_{F_L} = F_L v \Rightarrow P_{F_L} = 0,5 \text{ W}$$

δ) Θέτοντας στη σχέση (2) όπου $\alpha = 0$ βρίσκουμε το μέτρο της οριακής ταχύτητας του αγωγού. Προκύπτει:

$$v_{op} = \frac{mg(R + R_{\kappa\lambda})}{B^2L^2} \Rightarrow v_{op} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την κίνηση του αγωγού από την αρχική θέση εκτόξευσης μέχρι να επιστρέψει στη θέση αυτή. Ισχύει:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + Q \quad (3)$$

Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι το μέτρο της ταχύτητας του αγωγού όταν περνάει ξανά από τη θέση εκτόξευσης είναι $v < v_0 \Rightarrow v < 4 \text{ m/s}$. Επομένως, ο αγωγός αποκτάει την οριακή του ταχύτητα (κατά την κάθοδό του) χαμηλότερα από την αρχική θέση εκτόξευσής του.

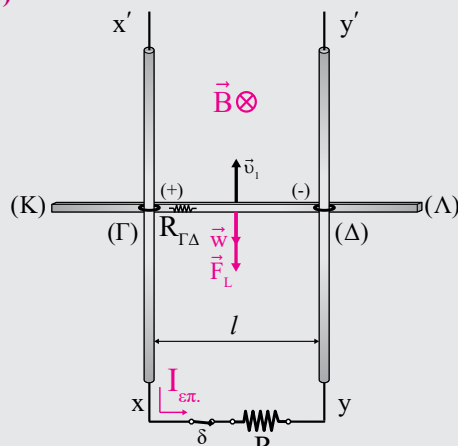
5.119 α) Ισχύει:

$$v_1 = v_0 - gt_1 \Rightarrow v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η ζητούμενη κινητική ενέργεια του αγωγού είναι:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow K_1 = 0,8 \text{ J}$$

β)



Γενικά έχουμε:

$$E_{\varepsilon\pi} = BvL$$

Προκύπτει:

$$E_{\varepsilon\pi,1} = Bv_1l \Rightarrow E_{\varepsilon\pi,1} = 4V$$

Επίσης ισχύει:

$$\frac{R_{\kappa\lambda}}{R_{\Gamma\Delta}} = \frac{L}{l} \text{ ή } R_{\Gamma\Delta} = \frac{R_{\kappa\lambda}}{2} \Rightarrow R_{\Gamma\Delta} = 2\Omega$$

Η ένταση του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη, είναι:

$$I_{\varepsilon\pi,1} = \frac{E_{\varepsilon\pi,1}}{R + R_{\Gamma\Delta}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi,1} = 1A$$

γ) Ισχύει:

$$v_2 = \frac{v_1}{2} \Rightarrow v_2 = 2 \frac{m}{s}$$

Έχουμε:

$$I_{\varepsilon\pi,2} = \frac{E_{\varepsilon\pi,2}}{R + R_{\Gamma\Delta}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi,2} = \frac{Bv_2\ell}{R + R_{\Gamma\Delta}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi,2} = 0,5A$$

Ισχύει:

$$F_{L,2} = BI_{\varepsilon\pi,2}\ell \Rightarrow F_{L,2} = 0,5N$$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον αγωγό ΚΛ τη χρονική στιγμή t_2 , προκύπτει:

$$\Sigma F = m\alpha_2 \Rightarrow -F_{L,2} - w = m\alpha_2 \Rightarrow$$

$$\alpha_2 = \frac{-F_{L,2} - mg}{m} \Rightarrow \alpha_2 = -15 \frac{m}{s^2}$$

δ) Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον αγωγό ΚΛ τη χρονική στιγμή t_3 , προκύπτει:

$$\Sigma F = m\alpha_3 \Rightarrow -F_{L,3} - w = m\alpha_3 \Rightarrow$$

$$-\frac{B^2v_3l^2}{R + R_{\Gamma\Delta}} - mg = m\alpha_3 \Rightarrow$$

$$v_3 = \frac{m(-\alpha_3 - g)(R + R_{\Gamma\Delta})}{B^2l^2} \Rightarrow v_3 = 1 \frac{m}{s}$$

Έχουμε:

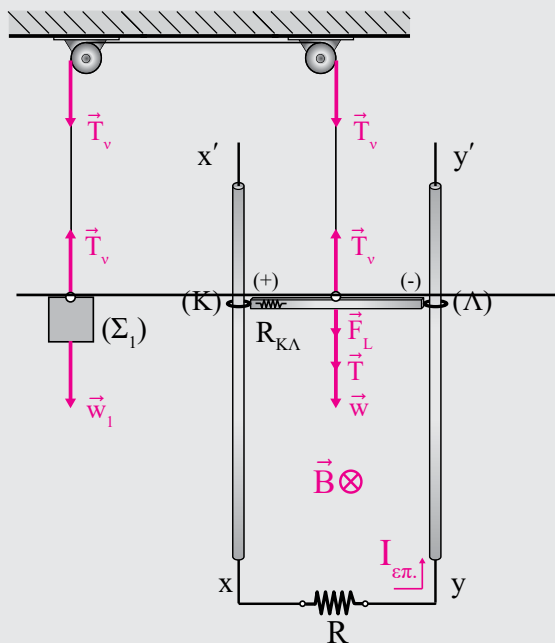
$$I_{\varepsilon\pi,3} = \frac{E_{\varepsilon\pi,3}}{R + R_{\Gamma\Delta}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi,3} = \frac{Bv_3l}{R + R_{\Gamma\Delta}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi,3} = 0,25A$$

Τελικά προκύπτει:

$$V_{\kappa\lambda} = E_{\varepsilon\pi,\kappa\lambda} - I_{\varepsilon\pi,3}R_{\Gamma\Delta} \Rightarrow V_{\kappa\lambda} = Bv_3L - I_{\varepsilon\pi,3}R_{\Gamma\Delta} \Rightarrow$$

$$V_{\kappa\lambda} = 1,5V$$

5.120 α)



Για το σώμα Σ_1 ισχύει:

$$\Sigma F_y = m_1\alpha \Rightarrow w_1 - T_v = m_1\alpha \Rightarrow$$

$$m_1g - T_v = m_1\alpha(1)$$

Μια τυχαία χρονική στιγμή $t > t_0$ το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R + R_{\kappa\lambda}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{BvL}{R + R_{\kappa\lambda}}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στη ράβδο ΚΛ θα είναι:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi}L \Rightarrow F_L = \frac{B^2vL^2}{R + R_{\kappa\lambda}}$$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη ράβδο ΚΛ προκύπτει:

$$\Sigma F_y = m\alpha \Rightarrow T_v - F_L - T - w = m\alpha \Rightarrow$$

$$T_v - \frac{B^2vL^2}{R + R_{\kappa\lambda}} - T - mg = m\alpha(2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε:

$$\alpha = \frac{(m_1 - m)g - \frac{B^2 v L^2}{R + R_{\text{KL}}} - T}{m + m_1} \quad (3)$$

Από την τελευταία σχέση (3) προκύπτει ότι όσο αυξάνεται η ταχύτητα της ράβδου ΚΛ, τόσο θα μειώνεται και το μέτρο της επιτάχυνσής της. Επομένως, **η ράβδος θα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση που το μέτρο της συνεχώς μειώνεται μέχρι τη στιγμή που θα μηδενιστεί η επιτάχυνση και πλέον θα κινείται με σταθερή ταχύτητα, την οριακή της ταχύτητα.**

β) Θέτοντας στη σχέση (3) όπου $\alpha = 0$ βρίσκουμε το μέτρο της οριακής ταχύτητας του αγωγού. Προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{B^2 v_{\text{op}} L^2}{R + R_{\text{KL}}} &= (m_1 - m)g - T \Rightarrow \\ v_{\text{op}} &= \frac{(R + R_{\text{KL}})}{B^2 L^2} [(m_1 - m)g - T] \Rightarrow \\ v_{\text{op}} &= 16 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

γ) Ισχύει:

$$F_{L,1} = \frac{B^2 \frac{v_{\text{op}}}{2} L^2}{R + R_{\text{KL}}} \Rightarrow F_{L,1} = 2\text{N}$$

Τελικά προκύπτει:

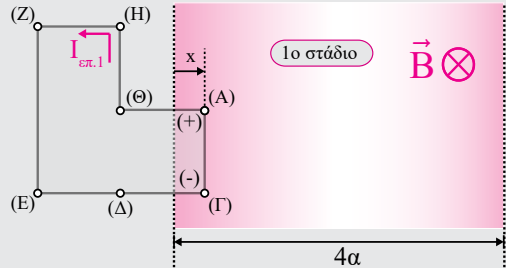
$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= m \left[\frac{(m_1 - m)g - \frac{B^2 v_{\text{op}} L^2}{R + R_{\text{KL}}} - T}{m + m_1} \right] \Rightarrow \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{2}{3} \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

δ) Ο ζητούμενος ρυθμός ανάπτυξης θερμικής ενέργειας, λόγω τριβών, είναι:

$$\frac{dQ}{dt} = \left| T \frac{v_{\text{op}}}{2} \right| \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 48 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

5.121 α)

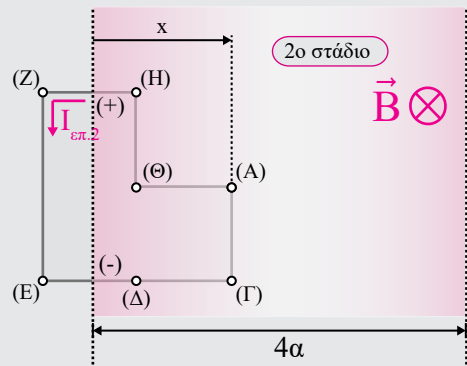
1^ο στάδιο: $0 \leq t < \frac{\alpha}{v}$ ή $0 \leq t < 2\text{s}$



Ισχύει:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= BA_1 \Rightarrow \Phi_1 = Bax \Rightarrow \\ \Phi_1 &= Bavt \Rightarrow \Phi_1 = 0,25t \text{ (S.I.)} \end{aligned}$$

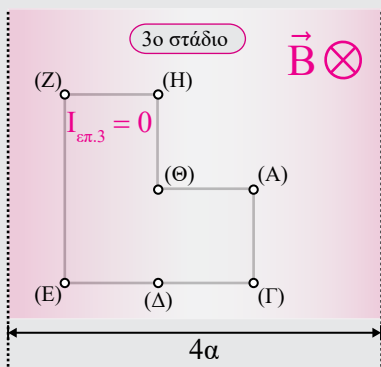
2^ο στάδιο: $\frac{\alpha}{v} \leq t < \frac{2\alpha}{v} \Rightarrow 2\text{s} \leq t < 4\text{s}$



Ισχύει:

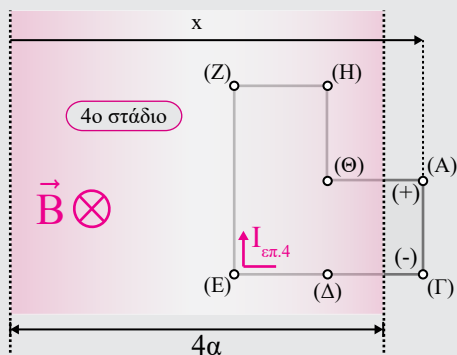
$$\begin{aligned} \Phi_2 &= BA_2 \Rightarrow \\ \Phi_2 &= B\alpha^2 + 2\alpha Bv \left(t - \frac{\alpha}{v} \right) \Rightarrow \\ \Phi_2 &= 0,5t - 0,5 \text{ (S.I.)} \end{aligned}$$

3^ο στάδιο: $\frac{2\alpha}{v} \leq t < \frac{4\alpha}{v} \Rightarrow 4\text{s} \leq t < 8\text{s}$



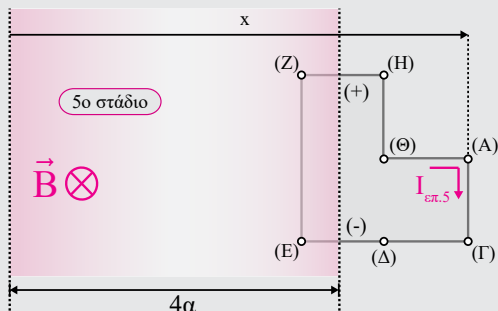
$$\Phi_3 = BA_3 \Rightarrow \Phi_3 = 3B\alpha^2 \Rightarrow \Phi_3 = 1,5\text{Wb (S.I.)}$$

$$4^\circ \text{ στάδιο: } \frac{4\alpha}{v} \leq t < \frac{5\alpha}{v} \Rightarrow 8\text{s} \leq t < 10\text{s}$$



$$\Phi_4 = BA_4 \Rightarrow \Phi_4 = 3B\alpha^2 - \alpha Bv \left(t - \frac{4\alpha}{v} \right) \Rightarrow \Phi_4 = 3,5 - 0,25t \text{ (S.I.)}$$

$$5^\circ \text{ στάδιο: } \frac{5\alpha}{v} \leq t < \frac{6\alpha}{v} \Rightarrow 10\text{s} \leq t < 12\text{s}$$

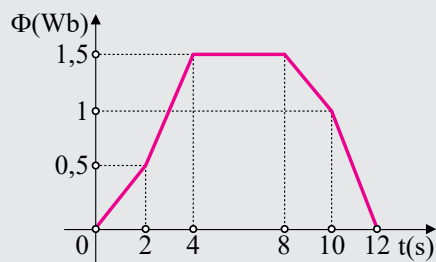


$$\Phi_5 = BA_5 \Rightarrow$$

$$\Phi_5 = 2B\alpha^2 - 2\alpha Bv \left(t - \frac{5\alpha}{v} \right) \Rightarrow$$

$$\Phi_5 = 6 - 0,5t \text{ (S.I.)}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



β) 1° στάδιο: $0 \leq t < \frac{\alpha}{v} \Rightarrow 0 \leq t < 2\text{s}$

Ισχύει:

$$E_{\epsilon\pi,1} = -\frac{d\Phi_1}{dt} \Rightarrow E_{\epsilon\pi,1} = -0,25\text{V}$$

2° στάδιο: $\frac{\alpha}{v} \leq t < \frac{2\alpha}{v} \Rightarrow 2\text{s} \leq t < 4\text{s}$

$$E_{\epsilon\pi,2} = -\frac{d\Phi_2}{dt} \Rightarrow E_{\epsilon\pi,2} = -0,5\text{V}$$

3° στάδιο: $\frac{2\alpha}{v} \leq t < \frac{4\alpha}{v} \Rightarrow 4\text{s} \leq t < 8\text{s}$

$$E_{\epsilon\pi,3} = -\frac{d\Phi_3}{dt} \Rightarrow E_{\epsilon\pi,3} = 0$$

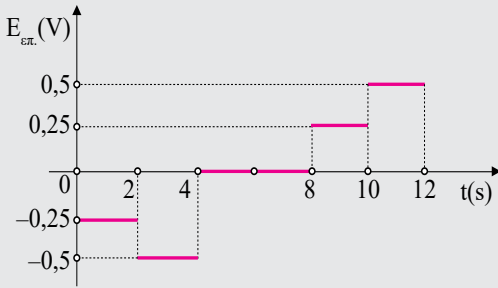
4° στάδιο: $\frac{4\alpha}{v} \leq t < \frac{5\alpha}{v} \Rightarrow 8\text{s} \leq t < 10\text{s}$

$$E_{\epsilon\pi,4} = -\frac{d\Phi_4}{dt} \Rightarrow E_{\epsilon\pi,4} = 0,25\text{V}$$

5° στάδιο: $\frac{5\alpha}{v} \leq t < \frac{6\alpha}{v} \Rightarrow 10\text{s} \leq t < 12\text{s}$

$$E_{\epsilon\pi,5} = -\frac{d\Phi_5}{dt} \Rightarrow E_{\epsilon\pi,5} = 0,5\text{V}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



γ) Προκύπτει:

$$R = R^* 8\alpha \Rightarrow R = 2\Omega$$

1° στάδιο: $0 \leq t < \frac{\alpha}{v} \Rightarrow 0 \leq t < 2$ s

Ισχύει:

$$I_{\text{επ.1}} = \frac{E_{\text{επ.1}}}{R} \Rightarrow I_{\text{επ.1}} = -0,125\text{A}$$

2° στάδιο: $\frac{\alpha}{v} \leq t < \frac{2\alpha}{v} \Rightarrow 2\text{s} \leq t < 4$ s

Ισχύει:

$$I_{\text{επ.2}} = \frac{E_{\text{επ.2}}}{R} \Rightarrow I_{\text{επ.2}} = -0,25\text{A}$$

3° στάδιο: $\frac{2\alpha}{v} \leq t < \frac{4\alpha}{v} \Rightarrow 4\text{s} \leq t < 8$ s

Ισχύει:

$$I_{\text{επ.3}} = \frac{E_{\text{επ.3}}}{R} \Rightarrow I_{\text{επ.3}} = 0$$

4° στάδιο: $\frac{4\alpha}{v} \leq t < \frac{5\alpha}{v} \Rightarrow 8\text{s} \leq t < 10$ s

Ισχύει:

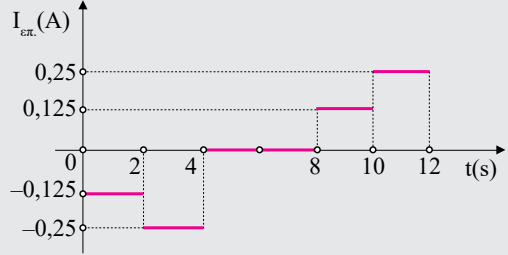
$$I_{\text{επ.4}} = \frac{E_{\text{επ.4}}}{R} \Rightarrow I_{\text{επ.4}} = 0,125\text{A}$$

5° στάδιο: $\frac{5\alpha}{v} \leq t < \frac{6\alpha}{v} \Rightarrow 10\text{s} \leq t < 12$ s

Ισχύει:

$$I_{\text{επ.5}} = \frac{E_{\text{επ.5}}}{R} \Rightarrow I_{\text{επ.5}} = 0,25\text{A}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



δ) 1° στάδιο: $0 \leq t < \frac{\alpha}{v} \Rightarrow 0 \leq t < 2$ s

Ισχύει:

$$q_{\text{επ.1}} = I_{\text{επ.1}} \cdot \Delta t \Rightarrow q_{\text{επ.1}} = -0,25\text{C}$$

2° στάδιο: $\frac{\alpha}{v} \leq t < \frac{2\alpha}{v} \Rightarrow 2\text{s} \leq t < 4$ s

$$q_{\text{επ.2}} = I_{\text{επ.2}} \cdot \Delta t \Rightarrow q_{\text{επ.2}} = -0,5\text{C}$$

3° στάδιο: $\frac{2\alpha}{v} \leq t < \frac{4\alpha}{v} \Rightarrow 4\text{s} \leq t < 8$ s

$$q_{\text{επ.3}} = I_{\text{επ.3}} \cdot \Delta t \Rightarrow q_{\text{επ.3}} = 0$$

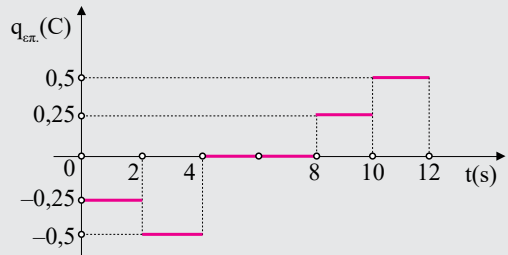
4° στάδιο: $\frac{4\alpha}{v} \leq t < \frac{5\alpha}{v} \Rightarrow 8\text{s} \leq t < 10$ s

$$q_{\text{επ.4}} = I_{\text{επ.4}} \cdot \Delta t \Rightarrow q_{\text{επ.4}} = 0,25\text{C}$$

5° στάδιο: $\frac{5\alpha}{v} \leq t < \frac{6\alpha}{v} \Rightarrow 10\text{s} \leq t < 12$ s

$$q_{\text{επ.5}} = I_{\text{επ.5}} \cdot \Delta t \Rightarrow q_{\text{επ.5}} = 0,5\text{C}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



5.122 α) Για την περίοδο του εναλλασσόμενου ρεύματος, έχουμε:

$$\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow T = 4 \cdot \Delta t \Rightarrow T = 100 \text{ ms}$$

β) Για τη μέση ισχύ έχουμε:

$$\bar{P} = V_{\text{επ.}} I_{\text{επ.}} \Rightarrow \bar{P} = \frac{VI}{2} \quad (1)$$

Για τη στιγμιαία ισχύ προκύπτει:

$$p = vi \Rightarrow p = VI \cdot \eta \mu^2 \omega t \Rightarrow p = 2\bar{P} \cdot \eta \mu^2 \omega t \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$p_{\text{max}} = 2\bar{P} \Rightarrow p_{\text{max}} = 400 \text{ W}$$

γ) Η συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 10 \text{ Hz}$$

Η συχνότητα που έχει η στιγμιαία ισχύς είναι:

$$f' = 2f \Rightarrow f' = 20 \text{ Hz}$$

δ) Η χρονική στιγμή που η στιγμιαία ισχύς γίνεται μέγιστη για 3^η φορά είναι:

$$t_1 = \frac{5T}{4} \Rightarrow t_1 = 125 \text{ ms}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε και τη χρονική στιγμή t_2 που η στιγμιαία ισχύς γίνεται ίση με 200 W για 3^η φορά. Προκύπτει:

$$p = 2\bar{P} \cdot \eta \mu^2 \omega t \Rightarrow$$

$$200 = 400 \cdot \eta \mu^2 \omega t_2 \Rightarrow \eta \mu \omega t_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\omega t_2 = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_2 = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow t_2 = \frac{5T}{8} \Rightarrow$$

$$t_2 = 62,5 \text{ ms}$$

5.123 α) Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ και μετά, ο αγωγός αρχίζει να επιταχύνεται προς τα δεξιά λόγω της δύναμης $\vec{F}$. Έτσι, στα άκρα του αγωγού ΚΛ αναπτύσσεται τάση από επαγωγή με μέτρο:

$$E_{\text{επ.}} = Bvl \quad (1)$$

και πολικότητας που φαίνεται στο σχήμα.

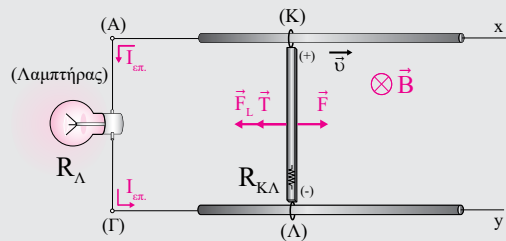
Το κλειστό κύκλωμα ΚΑΓΛΚ διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα έντασης:

$$I_{\text{επ.}} = \frac{E_{\text{επ.}}}{R_{\text{ολ.}}} \Rightarrow I_{\text{επ.}} = \frac{Bvl}{R_{\Lambda} + R_{\text{ΚΛ}}} \quad (2)$$

και φοράς που φαίνεται στο σχήμα.

Ο αγωγός ΚΛ διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$, οπότε ασκείται σε αυτό δύναμη Laplace μέτρου:

$$F_L = BI_{\text{επ.}} l \Rightarrow F_L = \frac{B^2 l^2 v}{R_{\Lambda} + R_{\text{ΚΛ}}} \quad (3)$$



Τη χρονική στιγμή t_1 που ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του αγωγού γίνεται μηδέν, ο αγωγός αποκτά οριακή (σταθερή) ταχύτητα αφού εκείνη τη στιγμή ισχύει $\Sigma F = 0$.

Για την ταχύτητα του αγωγού εκείνη τη χρονική t_1 έχουμε:

$$K = \frac{1}{2} m v_{\text{op.}}^2 \Rightarrow v_{\text{op.}} = \sqrt{\frac{2K}{m}} \Rightarrow v_{\text{op.}} = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η τάση από επαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα του αγωγού ΚΛ τη χρονική t_1 είναι:

$$E_{\text{επ.}} = Bv_{\text{op.}} l \Rightarrow E_{\text{επ.}} = 12 \text{ V}$$

β) Τη χρονική στιγμή t_1 η δύναμη Laplace που δέχεται ο αγωγός έχει μέτρο:

$$(3) \Rightarrow F_L = \frac{B^2 l^2 v_{\text{op.}}}{R_{\Lambda} + R_{\text{ΚΛ}}} \Rightarrow F_L = 3 \text{ N}$$

Επειδή το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ είναι $F = 5 \text{ N} > F_L$ θα πρέπει να του ασκείται δύναμη ομόρροπη της δύναμης Laplace αφού εκείνη τη στιγμή πρέπει $\Sigma F = 0$. Η δύναμη αυτή είναι η τριβή.

Για το μέτρο της ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F - T - F_L = 0 \Rightarrow T = F - F_L \Rightarrow T = 2N$$

γ) Αφού ο λαμπτήρας λειτουργεί κανονικά από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά, το ρεύμα που τον διαρρέει θα είναι το ρεύμα κανονικής λειτουργίας.

$$(2) \Rightarrow I_K = I_{\text{επ.}} = \frac{Bv_{\text{op.}} l}{R_A + R_{KL}} \Rightarrow I_K = 3A$$

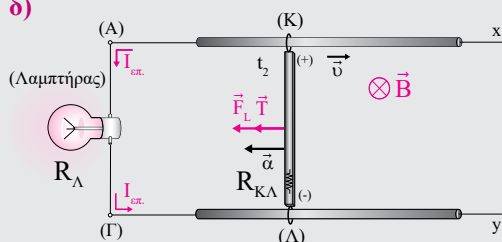
Για την τάση κανονικής λειτουργίας του λαμπτήρα έχουμε:

$$V_K = I_K R_A \Rightarrow V_K = 9V$$

Για την ισχύ κανονικής λειτουργίας του λαμπτήρα έχουμε:

$$P_K = V_K I_K \Rightarrow P_K = 27W$$

δ)



Τη χρονική στιγμή t_3 η ταχύτητα του αγωγού έχει μέτρο ίσο με το 50% του μέτρου που είχε τη χρονική στιγμή t_2 άρα:

$$v = 50\% \cdot v_{\text{op.}} \Rightarrow v = 6 \frac{m}{s}$$

Επειδή ο αγωγός συνεχίζει να κινείται αλλά επιβραδυνόμενος, στα άκρα του υπάρχει πάλι τάση από επαγωγή, το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα και του ασκείται και δύναμη Laplace. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του αγωγού τη χρονική στιγμή t_3 είναι:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F \cdot v = (-F_L - T) \cdot v = \left(-\frac{B^2 l^2 v}{R_A + R_{KL}} - T \right) \cdot v \Rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = -21 J/s$$

ε) Ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα, λόγω φαινομένου Joule, στις αντιστάσεις τη χρονική στιγμή t_3 είναι:

$$\frac{\Delta Q_{R_{\text{ολ.}}}}{\Delta t} = P_{R_{\text{ολ.}}} = I_{\text{επ.}}^2 \cdot R_{\text{ολ.}} = I_{\text{επ.}}^2 \cdot (R_A + R_{KL})$$

Όμως:

$$I_{\text{επ.}} = \frac{Bvl}{R_A + R_{KL}} = 1,5A$$

άρα:

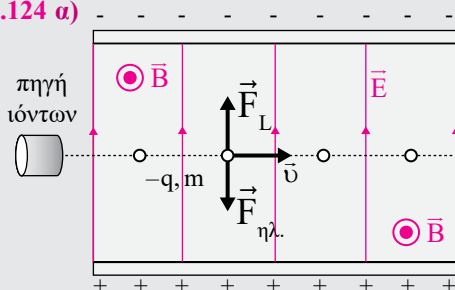
$$\frac{\Delta Q_{R_{\text{ολ.}}}}{\Delta t} = I_{\text{επ.}}^2 \cdot (R_A + R_{KL}) \Rightarrow \frac{\Delta Q_{R_{\text{ολ.}}}}{\Delta t} = 9 J/s$$

Ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα λόγω της τριβής του αγωγού με τις δύο οριζόντιες παράλληλες μεταλλικές αγωγίμες ράβδους είναι:

$$\frac{\Delta Q_T}{\Delta t} = T \cdot v \Rightarrow \frac{\Delta Q_T}{\Delta t} = 12 J/s$$

$$\text{Προφανώς ισχύει } \left| \frac{\Delta K}{\Delta t} \right| = \frac{\Delta Q_{R_{\text{ολ.}}}}{\Delta t} + \frac{\Delta Q_T}{\Delta t}$$

5.124 α)



Το αρνητικά φορτισμένο σωματίδιο δέχεται δύο δυνάμεις, μια από κάθε πεδίο, καθώς διέρχεται από το φίλτρο ταχυτήτων. Αφού δεν αποκλίνει από την ευθύγραμμη τροχιά του, οι δύο δυνάμεις πρέπει να έχουν αντίθετη φορά και ίσα μέτρα. Από το ηλεκτρικό πεδίο δέχεται δύναμη $\vec{F}_{\eta\lambda.}$ αντίρροπη στις δυνάμεις του γραμμές (αφού είναι αρνητικό) και μέτρου:

$$E = \frac{F_{\eta\lambda.}}{|q|} \Rightarrow F_{\eta\lambda.} = E \cdot |q|$$

Από το μαγνητικό πεδίο δέχεται δύναμη $\vec{F}_L$ αντίρροπη της δύναμης $\vec{F}_{\eta\lambda.}$ και μέτρου:

$$F_L = Bv|q| \sin 90^\circ \Rightarrow F_L = Bv|q|$$

Με βάση τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού για τη δύναμη Lorentz, η φορά

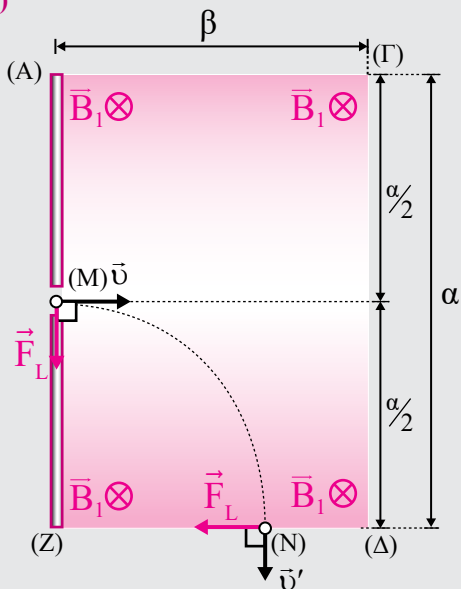
της έντασης του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ του φίλτρου ταχυτήτων είναι **κάθετη στο επίπεδο της σελίδας και έχει φορά προς τα έξω** όπως φαίνεται στο σχήμα.

Για το μέτρο αυτής της έντασης του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$, εξισώνοντας τη μαγνητική με την ηλεκτρική δύναμη, έχουμε:

$$F_{\eta\lambda} = F_L \Rightarrow E|q| = Bv|q| \Rightarrow B = \frac{E}{v} \Rightarrow$$

$$B = 0,2T$$

β)



Όταν το αρνητικά φορτισμένο σωματίδιο εξέρθει από το φίλτρο ταχυτήτων, εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}_1$ και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση διαγράφοντας τεταρτοκύκλιο ακτίνας $R = \frac{\alpha}{2}$ αφού οι φορείς των δυνάμεων Lorentz στα σημεία εισόδου και εξόδου (M), (N) είναι κάθετοι μεταξύ τους. Για την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς μέσα στο μαγνητικό πεδίο έχουμε:

$$R = \frac{mv}{B_1|q|} \Rightarrow R = 0,05m = 5cm$$

Έτσι το μήκος της πλευράς a του ορθογωνίου (ΑΓΔΖ) είναι:

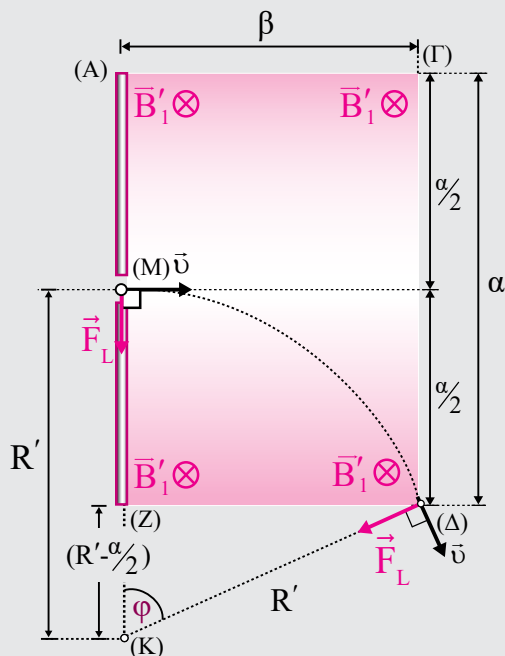
$$\alpha = 2R \Rightarrow \alpha = 10cm$$

γ) Για τον υπολογισμό του κέντρου (Κ) την νέας κυκλικής τροχιάς του αρνητικά φορτισμένου σωματιδίου μέσα στο μαγνητικό πεδίο που επικρατεί στην περιοχή (ΑΓΔΖ), σχεδιάζουμε τις δυνάμεις Lorentz στα σημεία εισόδου και εξόδου (M) και (Δ) αντίστοιχα. Το σημείο τομής τους είναι το κέντρο (Κ). Για τη νέα ακτίνα της κυκλικής τροχιάς εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο (ΖΔΚ). Έχουμε:

$$(K\Delta)^2 = (KZ)^2 + (Z\Delta)^2 \Rightarrow$$

$$R'^2 = \left(R' - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta^2 \Rightarrow$$

$$R'^2 = \left(R' - \frac{10}{2}\right)^2 + (5\sqrt{3})^2 \Rightarrow R' = 10cm$$



Για το μέτρο της νέας έντασης B'_1 του μαγνητικού πεδίου έχουμε:

$$R' = \frac{mv}{B'_1|q|} \Rightarrow B'_1 = \frac{mv}{R'|q|} \Rightarrow B'_1 = 0,2T$$

Το ποσοστό μεταβολής του μέτρου της έντασης του μαγνητικού πεδίου B_1 είναι:

$$\Pi\% = \frac{B'_1 - B_1}{B_1} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi\% = -50\%$$

δ) Το φορτισμένο σωματίδιο, κατά την κίνησή του στο φίλτρο ταχυτήτων και μέχρι να εισέρθει από το σημείο (Μ) στην περιοχή που επικρατεί το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_1$, εκτελεί ευθύγραμμή ομαλή κίνηση με ταχύτητα μέτρου $v = 4 \cdot 10^4 \text{ m/s}$. Για το χρονικό διάστημα Δt_1 ισχύει:

$$L = v \cdot \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{L}{v} \Rightarrow \Delta t_1 = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Το φορτισμένο σωματίδιο, κατά την κίνησή του στην περιοχή που επικρατεί το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}'_1$, εκτελεί τμήμα κυκλικής κίνησης τόξου ($\widehat{ΜΔ}$) που βαίνει σε επίκεντρη γωνία φ όπως φαίνεται στο σχήμα. Για τη γωνία φ στο ορθογώνιο τρίγωνο ($ΖΔΚ$), έχουμε:

$$\eta\mu\varphi = \frac{\beta}{R'} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$$

Για το χρονικό διάστημα Δt_2 μέσα στην περιοχή που επικρατεί το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}'_1$, ισχύει:

$$\Delta t_2 = T \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{T}{6}$$

όπου T η περίοδος της κυκλικής του τροχιάς. Όμως:

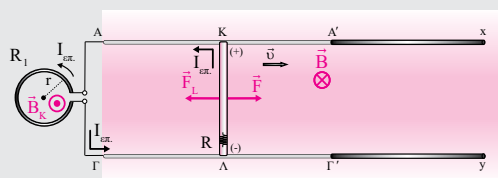
$$T = \frac{2\pi m}{B'_1 |q|} \Rightarrow T = 5\pi \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$\text{Άρα: } \Delta t_2 = \frac{T}{6} \Rightarrow \Delta t_2 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Τελικά για το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που μπήκε το φορτισμένο σωματίδιο στο φίλτρο ταχυτήτων και μέχρι να εξέρθει από το σημείο (Δ) του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}'_1$, ισχύει:

$$\Delta t_{\text{ολ.}} = \Delta t_1 + \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_{\text{ολ.}} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

5.125 α) Λόγω της κίνησης του αγωγού ΚΛ και αφού αυτός βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές του γραμμές, στα άκρα του αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή.



$$E_{\text{επ.}} = BvL \Rightarrow E_{\text{επ.}} = 10 \text{ V}$$

β) Η τάση αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα ο αγωγός ΚΛ αλλά και ο κυκλικός αγωγός να διαρρέονται από ρεύμα (επαγωγικό):

$$I_{\text{επ.}} = \frac{E_{\text{επ.}}}{R_{\text{ολ.}}} = \frac{E_{\text{επ.}}}{R + R_1} \Rightarrow I_{\text{επ.}} = 2 \text{ A}$$

Το μέτρο της έντασης $\vec{B}_K$ του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού αγωγού είναι:

$$B_K = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I_{\text{επ.}}}{r} \Rightarrow B_K = 2\pi \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

γ) Επειδή ο αγωγός ΚΛ διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε Ο.Μ.Π. θα του ασκηθεί δύναμη Laplace:

$$F_L = BI_{\text{επ.}}L \Rightarrow F_L = 2 \text{ N}$$

Η φορά του ρεύματος σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz θα πρέπει να αντιτίθεται στο αίτιο που το προκάλεσε. Το ρεύμα το προκάλεσε η κίνηση του αγωγού προς τα δεξιά, άρα, η δύναμη Laplace (που οφείλεται με τη σειρά της στο ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό) πρέπει να είναι προς τα αριστερά οπότε με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού βρίσκουμε τη φορά του ρεύματος, άρα και την πολικότητα στα άκρα του αγωγού ΚΛ όπως φαίνεται στο σχήμα.

Για να κινείται ο αγωγός ΚΛ με σταθερή ταχύτητα πρέπει σύμφωνα με τον 1^ο νόμο του Νεύτωνα:

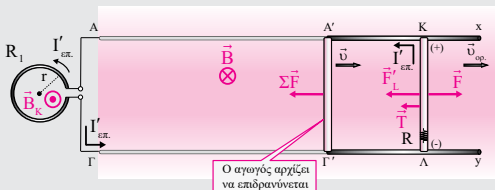
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = F_L \Rightarrow F = 2 \text{ N}$$

δ) Τη χρονική στιγμή που ο αγωγός έρχεται σε επαφή με τα κομμάτια Α'x και Γ'y των δύο οριζόντιων οδηγών αρχίζει να επιβραδύνεται αφού $\Sigma F = F - T - F_L < 0$.

Άρα:

$$v \downarrow \Rightarrow E_{\text{επ.}} \downarrow \Rightarrow I_{\text{επ.}} \downarrow \Rightarrow F_L \downarrow \Rightarrow \Sigma F \downarrow \Rightarrow a \downarrow$$

Η κίνηση που θα εκτελέσει ο αγωγός είναι ευθύγραμμη επιβραδυνόμενη με συνεχώς μειούμενη επιτάχυνση. Κάποια στιγμή η επιτάχυνση θα γίνει μηδέν (όταν $\Sigma F = 0$) οπότε από εκεί και μετά ο αγωγός θα εκτελέσει Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με σταθερή (οριακή) ταχύτητα η οποία θα είναι και η ελάχιστη ταχύτητα που θα έχει ο αγωγός ΚΛ σε όλη τη διάρκεια της κίνησής του. Τότε, το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού αγωγού θα έχει πάρει την ελάχιστη τιμή του.



Στην περίπτωση που το μέτρο της έντασης $\vec{B}'_K$ του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού αγωγού είναι $B'_K = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ έχουμε:

$$B'_K = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I'_{\text{επ.}}}{r} \Rightarrow I'_{\text{επ.}} = \frac{B'_K \cdot r}{2\pi \frac{\mu_0}{4\pi}} \Rightarrow I'_{\text{επ.}} = 1,5 \text{ A}$$

$$F'_L = BI'_{\text{επ.}} L \Rightarrow F'_L = 1,5 \text{ N}$$

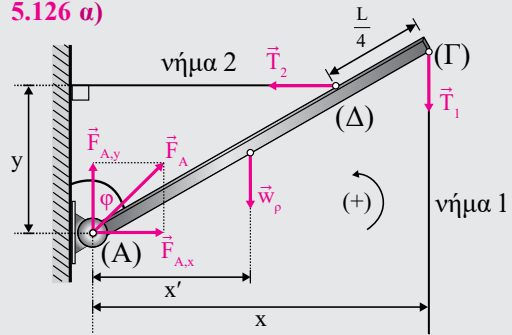
1ος νόμος του Νεύτωνα:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = F'_L + T \Rightarrow T = F - F'_L \Rightarrow T = 0,5 \text{ N}$$

Όμως ισχύει:

$$I'_{\text{επ.}} = \frac{E'_{\text{επ.}}}{R_{\text{ολ.}}} = \frac{Bv_{\text{οπ.}} L}{R + R_1} \Rightarrow v_{\text{οπ.}} = \frac{I'_{\text{επ.}} (R + R_1)}{BL} \Rightarrow v_{\text{οπ.}} = 7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5.126 α)



Αφού η ράβδος ισορροπεί πρέπει η συνισταμένη των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο της να είναι μηδέν καθώς και η συνισταμένη των δυνάμεων σε κάθε άξονα. Έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow -T_1 x - w_p x' + T_2 y = 0 \Rightarrow$$

$$-T_1 L \eta \mu \phi - Mg \frac{L}{2} \eta \mu \phi + T_2 \frac{3L}{4} \sigma \nu \nu \phi = 0 \Rightarrow$$

$$-T_1 \eta \mu \phi - Mg \frac{1}{2} \eta \mu \phi + T_2 \frac{3}{4} \sigma \nu \nu \phi = 0 \Rightarrow$$

$$T_1 = 3 \text{ N}$$

Άξονας x:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{A,x} = T_2 \Rightarrow F_{A,x} = 8 \text{ N}$$

Άξονας y:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{A,y} = Mg + T_1 \Rightarrow F_{A,y} = 6 \text{ N}$$

$$F_A = \sqrt{F_{A,x}^2 + F_{A,y}^2} \Rightarrow F_A = 10 \text{ N}$$

β) Υπολογίζουμε την ολική αντίσταση του κυκλώματος. Οι αντιστάσεις R_1 και R_2 είναι συνδεδεμένες παράλληλα και ο συνδυασμός τους σε σειρά με την αντίσταση r. Έχουμε:

$$R_{\text{ολ.}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + r \Rightarrow R_{\text{ολ.}} = 0,25 \Omega$$

Το ολικό ρεύμα που δίνει η πηγή στο κύκλωμα είναι:

$$I = \frac{E}{R_{\text{ολ.}}} \Rightarrow I = 16 \text{ A}$$

Για τον υπολογισμό του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό έχουμε:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow I_1 R_1 = I_2 R_2 \Rightarrow I_1 = 3 I_2$$

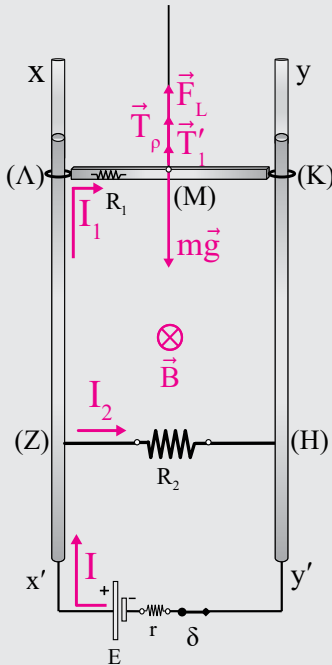
$$\text{Όμως } I = I_1 + I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{I}{4} = 4 \text{ A}$$

άρα: $I_1 = 12\text{A}$

Αφού ο αγωγός ΚΛ διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο δέχεται δύναμη Laplace με μέτρο:

$$F_L = BI_1l \Rightarrow F_L = 12\text{N}$$

και φοράς προς τα πάνω όπως προσδιορίζεται με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού.



Παρατηρούμε ότι:

$$mg > F_L + T_1'$$

οπότε πρέπει ο αγωγός να δέχεται δύναμη τριβής η οποία είναι ίση με την οριακή επειδή ο αγωγός ΚΛ οριακά δεν ολισθαίνει στην κατάσταση ισορροπίας του.

Από την ισορροπία των δυνάμεων για τον αγωγό ΚΛ έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg = F_L + T_1' + T_p \Rightarrow T_p = 5\text{N}$$

γ) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ που ανοίγουμε τον διακόπτη, η δύναμη Laplace μηδενίζεται αφού ο αγωγός ΚΛ δεν διαρρέεται από ρεύμα.

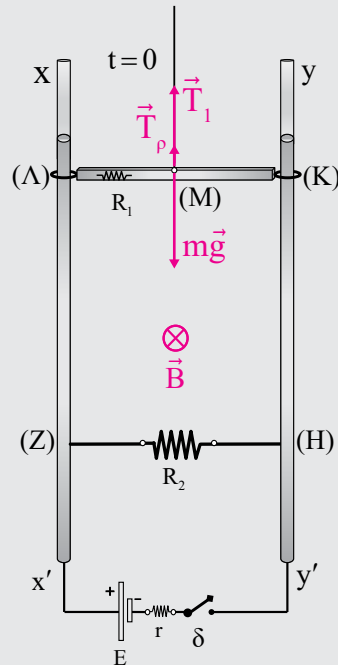
Ο αγωγός λοιπόν δέχεται το βάρος του, την οριακή τριβή και τη νέα δύναμη από το νήμα 1. Αν ισορροπούσε θα έπρεπε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg = T_1'' + T_p \Rightarrow$$

$$T_1'' = 15\text{N} > T_{\theta p.(1)} = 10\text{N}$$

οπότε το νήμα 1 θα σπάσει.

Στη συνέχεια ο αγωγός αρχίζει να κινείται προς τα κάτω επιταχυνόμενος αφού $mg > T_p$.



Λόγω της κίνησης του αγωγού ΚΛ αφού αυτός βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές του γραμμές, στα άκρα του αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή:

$$E_{\text{επ.}} = Bv/(1)$$

Η τάση αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα το κύκλωμα να διαρρέεται από ρεύμα (επαγωγικό):

$$I_{\text{επ.}} = \frac{E_{\text{επ.}}}{R_{\text{ολ.}}} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} I_{\text{επ.}} = \frac{Bv}{R_1 + R_2} (2)$$

Επειδή ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο θα του ασκηθεί δύναμη Laplace μέτρου:

$$F_L = BI_{\text{επ.}} l \Rightarrow F_L = \frac{B^2 l^2}{R_1 + R_2} v \quad (3)$$

Η φορά του ρεύματος σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz θα πρέπει να αντιτίθεται στο αίτιο που το προκάλεσε. Το ρεύμα το προκάλεσε η κίνηση του αγωγού προς τα κάτω, άρα η δύναμη Laplace (που οφείλεται με τη σειρά της στο ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό) πρέπει να είναι προς τα πάνω οπότε με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι η φορά του ρεύματος είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

Ο αγωγός επιταχύνεται άρα:

$$v \uparrow \Rightarrow E_{\text{επ.}} \uparrow \Rightarrow I_{\text{επ.}} \uparrow \Rightarrow F_L \uparrow \Rightarrow \Sigma F \downarrow \Rightarrow a \downarrow$$

Η κίνηση που θα εκτελέσει ο αγωγός είναι ευθύγραμμη μη ομαλά επιταχυνόμενη με συνεχώς μειούμενη επιτάχυνση. Κάποια στιγμή η επιτάχυνση θα γίνει μηδέν όταν και η συνισταμένη δύναμη γίνει μηδέν, οπότε από εκεί και μετά ο αγωγός θα εκτελέσει Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με σταθερή (οριακή) ταχύτητα. Υπολογισμός οριακής ταχύτητας:

$$\begin{aligned} \Sigma F = 0 &\Rightarrow F_L = mg - T_p \Rightarrow \\ \frac{B^2 l^2}{R_1 + R_2} v_{\text{οπ.}} &= mg - T_p \Rightarrow \\ v_{\text{οπ.}} &= \frac{(mg - T_p) \cdot (R_1 + R_2)}{B^2 l^2} \Rightarrow \\ v_{\text{οπ.}} &= 12 \text{ m/s} \end{aligned}$$

δ) Τη χρονική στιγμή t_1 που το μέτρο της ταχύτητας του αγωγού ΚΛ είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ της οριακής του ταχύτητας έχουμε:

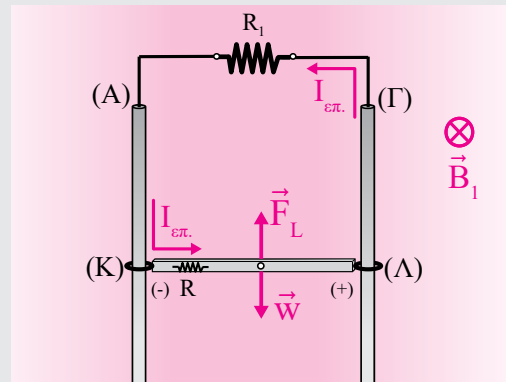
$$v_1 = \frac{v_{\text{οπ.}}}{3} = 4 \text{ m/s}$$

Εκείνη τη χρονική στιγμή το ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ είναι $I_{\text{επ.}(1)} = \frac{Bv_1 l}{R_1 + R_2} = 5 \text{ A}$

Ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα σε όλη τη διάταξη τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Q_{\text{ολ.}}}{\Delta t} &= \frac{\Delta Q_{R_{\text{ολ.}}}}{\Delta t} + \frac{\Delta Q_{\text{τριβής}}}{\Delta t} = I_{\text{επ.}(1)}^2 R_{\text{ολ.}} + T_p v_1 \Rightarrow \\ \frac{\Delta Q_{\text{ολ.}}}{\Delta t} &= 40 \frac{\text{J}}{\text{s}} \end{aligned}$$

5.127 α) Ο αγωγός ΚΛ αρχίζει να κινείται προς τα κάτω επιταχυνόμενος λόγω του βάρους του.



Λόγω της κίνησης του αγωγού ΚΛ, αφού αυτός βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές του γραμμές, στα άκρα του αναπτύσσεται τάση από επαγωγή.

$$E_{\text{επ.}} = B_1 v l \quad (1)$$

Η τάση αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα το κύκλωμα ΛΓΑΚΛ (αφού ο διακόπτης είναι ανοιχτός η αντίσταση R_2 δε παίζει ρόλο) να διαρρέεται από ρεύμα (επαγωγικό):

$$I_{\text{επ.}} = \frac{E_{\text{επ.}}}{R_{\text{ολ.}}} \Rightarrow I_{\text{επ.}} = \frac{B_1 v l}{R_1 + R} \quad (2)$$

Επειδή ο αγωγός ΚΛ διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο θα του ασκηθεί δύναμη Laplace μέτρου:

$$F_L = B_1 I_{\text{επ.}} l \Rightarrow F_L = \frac{B_1^2 l^2}{R_1 + R} v \quad (3)$$

Η φορά του ρεύματος σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz θα πρέπει να αντιτίθεται στο αίτιο που το προκάλεσε. Το ρεύμα το προκάλεσε η κίνηση του αγωγού προς τα κάτω, άρα, η δύναμη Laplace (που οφείλεται με τη σειρά της στο ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό) πρέπει να είναι προς τα πάνω οπότε με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι η φορά του ρεύματος είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

Ο αγωγός επιταχύνεται άρα:

$$v \uparrow \Rightarrow E_{\text{επ.}} \uparrow \Rightarrow I_{\text{επ.}} \uparrow \Rightarrow F_L \uparrow \Rightarrow \Sigma F \downarrow \Rightarrow a \downarrow$$

Η κίνηση που θα εκτελέσει ο αγωγός είναι ευθύγραμμη μη ομαλά επιταχυνόμενη με συνεχώς μειούμενη επιτάχυνση. Κάποια στιγμή η επιτάχυνση θα γίνει μηδέν όταν και η συνισταμένη δύναμη γίνει μηδέν, οπότε από εκεί και μετά ο αγωγός θα εκτελέσει Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με σταθερή (οριακή) ταχύτητα. Υπολογισμός οριακής ταχύτητας:

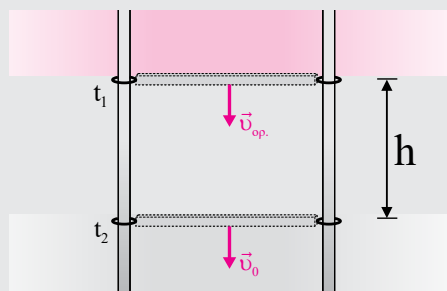
$$\begin{aligned} \Sigma F = 0 &\Rightarrow F_L = mg \Rightarrow \frac{B_1^2 l^2}{R_1 + R} v_{\text{op.}} = mg \Rightarrow \\ v_{\text{op.}} &= \frac{mg \cdot (R_1 + R)}{B_1^2 l^2} \Rightarrow \\ v_{\text{op.}} &= 10 \text{ m/s} \end{aligned}$$

β) Τη χρονική στιγμή t_1 που ο αγωγός ΚΛ εξέρχεται από την περιοχή όπου η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι B_1 έχει ταχύτητα ίση με την οριακή ταχύτητα που είχε αποκτήσει. Έπειτα, και μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 , ο αγωγός κινείται μόνο υπό την επίδραση του βάρους καθώς δε δέχεται δύναμη Laplace αφού δε διαρρέεται από ρεύμα. Τη χρονική στιγμή t_2 έχει αποκτήσει ταχύτητα, έστω, μέτρου v_0 .

$$\text{Θ.Μ.Κ.Ε.}_{t_1 \rightarrow t_2} : \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_2 - K_1 = W_w \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_{\text{op.}}^2 = mgh \Rightarrow$$

$$v_0 = \sqrt{v_{\text{op.}}^2 + 2gh} \Rightarrow v_0 = 12 \text{ m/s}$$



Αφού από τη χρονική στιγμή t_2 και μετά ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται ενέργεια μέσω του βάρους στον αγωγό ΚΛ είναι ίσος με τον ρυθμό με τον οποίο παράγεται θερμότητα λόγω φαινομένου Joule σε όλο το κύκλωμα, το μέτρο της ταχύτητάς του θα παραμένει σταθερό. Πράγματι από διατήρηση ενέργειας έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W_w}{\Delta t} &= \frac{\Delta Q_{R_{\text{ολ.}}}}{\Delta t} + \frac{\Delta K}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta W_w}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_{R_{\text{ολ.}}}}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \\ K &= \text{σταθερή} \Rightarrow v = \text{σταθερή} \end{aligned}$$

Έτσι κάποια χρονική στιγμή $t_3 > t_2$ που βρίσκεται μέσα στο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B_2 , το μέτρο της ταχύτητας του θα είναι ίσο με την ταχύτητα που απέκτησε τη χρονική στιγμή t_2 . Άρα: $v = v_0 \Rightarrow v = 12 \text{ m/s}$.

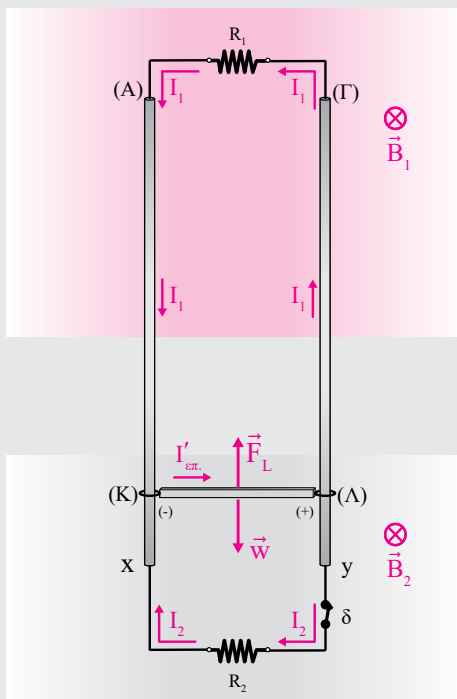
γ) Από τη χρονική στιγμή t_2 και μετά που ο αγωγός ΚΛ κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v = 12 \text{ m/s}$, θα πρέπει να ισχύει $\Sigma F = 0$. Εκτός από το βάρος του ο αγωγός δέχεται και δύναμη Laplace αντίθετη του βάρους η οποία οφείλεται στο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B_2 (η διαδοχή των φαινομένων είναι η ίδια με αυτή του α ερωτήματος).

Για την ολική αντίσταση του κυκλώματος αφού ο διακόπτης δ είναι κλειστός ισχύει:

$$R_{1,2} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 0, 2 \Omega$$

και

$$R_{\text{ολ.}} = R_{1,2} + R = 0, 3 \Omega$$



Η δύναμη Laplace έχει μέτρο (αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο όπως και στο α ερώτημα).

$$F_L = \frac{B_2^2 l^2}{R_{ολ.}} v$$

Όμως:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_L = mg \Rightarrow \frac{B_2^2 l^2}{R_{ολ.}} v = mg \Rightarrow$$

$$B_2 = \sqrt{\frac{mg \cdot R_{ολ.}}{v \cdot l^2}} \Rightarrow$$

$$B_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} T$$

δ) Για την τάση στα άκρα του αγωγού ΚΛ έχουμε:

$$V_{ΚΛ} = E'_{επ.} - I'_{επ.} R$$

Όμως: $E'_{επ.} = B_2 v l = 6\sqrt{2} V$

και: $I'_{επ.} = \frac{E'_{επ.}}{R_{ολ.}} = 20\sqrt{2} A$

Τελικά για την τάση του αγωγού παίρνουμε:

$$V_{ΚΛ} = 4\sqrt{2} V$$

Όμως: $V_2 = V_{ΚΛ} = 4\sqrt{2} V$

οπότε: $I_2 = \frac{V_2}{R_2} = 10\sqrt{2} A$

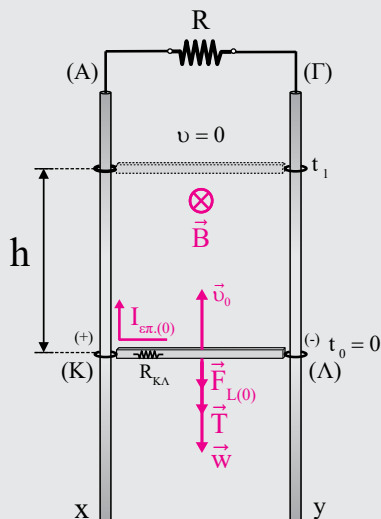
Τελικά ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα, λόγω φαινομένου Joule, στην αντίσταση R_2 τη χρονική στιγμή t_3 είναι:

$$\frac{\Delta Q_{R_2}}{\Delta t} = P_{R_2} = I_2^2 R_2 \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta Q_{R_2}}{\Delta t} = 80 \frac{J}{s}$$

5.128 α) Ο αγωγός ΚΛ αρχίζει να κινείται προς τα πάνω επιβραδυνόμενος λόγω του βάρους του, της τριβής ολίσθησης και της δύναμης Laplace. Ο αγωγός δέχεται δύναμη Laplace καθώς λόγω της κίνησής του αφού βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές του γραμμές, στα άκρα του αναπτύσσεται τάση από επαγωγή:

$$E_{επ.} = B v l (1)$$



Η τάση αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα το κύκλωμα ΛΓΑΚΛ να διαρρέεται από ρεύμα (επαγωγικό):

$$I_{\varepsilon\pi.} = \frac{E_{\varepsilon\pi.}}{R_{\text{ολ.}}} \xrightarrow{(1)} I_{\varepsilon\pi.} = \frac{B\omega l}{R_{\text{ΚΛ}} + R} \quad (2)$$

Επειδή ο αγωγός ΚΛ διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο θα του ασκηθεί δύναμη Laplace μέτρου:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi.} l \Rightarrow F_L = \frac{B^2 l^2}{R_{\text{ΚΛ}} + R} v \quad (3)$$

Η φορά του ρεύματος σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz θα πρέπει να αντιτίθεται στο αίτιο που το προκάλεσε. Το ρεύμα το προκάλεσε η κίνηση του αγωγού προς τα πάνω, άρα, η δύναμη Laplace (που οφείλεται με τη σειρά της στο ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό) πρέπει να ναι προς τα κάτω οπότε με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι η φορά του ρεύματος είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

Για την επιβραδυνόμενη κίνηση του αγωγού εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε.:

$$\Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow K_{\text{τελ.}} - K_{\text{αρχ.}} = W_w + W_T + W_{F_L} \Rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -mgh + W_T + W_{F_L} \Rightarrow$$

$$W_T + W_{F_L} = -4J$$

Όμως $Q_T = |W_T|$ και $Q_{R_{\text{ολ.}}} = |W_{F_L}|$ οπότε η τελευταία σχέση γίνεται:

$$Q_T + Q_{R_{\text{ολ.}}} = 4 \Rightarrow Q_T + \frac{7}{3} Q_T = 4 \Rightarrow$$

$$Q_T = 1,2J \Rightarrow T \cdot h = 1,2 \Rightarrow$$

$$T = 1N$$

β) Για τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας έχουμε:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \alpha = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{-mg - T - F_{L(0)}}{m} \quad (4)$$

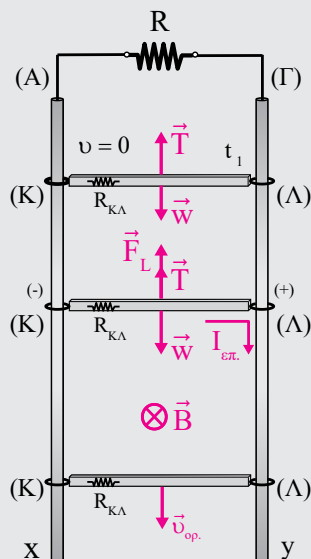
Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$F_{L(0)} = \frac{B^2 l^2}{R_{\text{ΚΛ}} + R} v_0 = 2N$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (4) προκύπτει:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -25 \frac{m}{s^2}.$$

γ) Ο αγωγός ΚΛ αρχίζει να κινείται προς τα κάτω επιταχυνόμενος λόγω του βάρους του, καθώς είναι μεγαλύτερο από την τριβή η οποία έχει αλλάξει φορά (η δύναμη Laplace μηδενίζεται στιγμιαία όταν σταματήσει ο αγωγός να κινείται).



Λόγω της κίνησης του αγωγού ΚΛ αφού αυτός βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές του γραμμές, στα άκρα του αναπτύσσεται τάση από επαγωγή το οποίο θα δώσει ρεύμα και ταυτόχρονα στον αγωγό θα ασκηθεί δύναμη Laplace. Οι τύποι που ισχύουν για την τάση το ρεύμα και τη δύναμη Laplace είναι οι (1), (2) και (3).

Ο αγωγός επιταχύνεται άρα:

$$v \uparrow \Rightarrow E_{\varepsilon\pi.} \uparrow \Rightarrow I_{\varepsilon\pi.} \uparrow \Rightarrow F_L \uparrow \Rightarrow \Sigma F \downarrow \Rightarrow \alpha \downarrow$$

Η κίνηση που θα εκτελέσει ο αγωγός είναι ευθύγραμμη μη ομαλά επιταχυνόμενη με συνεχώς μειούμενη επιτάχυνση. Κάποια στιγμή η επιτάχυνση θα γίνει μηδέν όταν και η συνισταμένη δύναμη γίνει μηδέν, οπότε από εκεί και μετά ο αγωγός θα εκτελέσει Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με σταθερή (οριακή) ταχύτητα.

Υπολογισμός οριακής ταχύτητας:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_L + T = mg \Rightarrow \frac{B^2 l^2}{R_{KL} + R} v_{op.} = mg - T \Rightarrow$$

$$v_{op.} = \frac{(mg - T) \cdot (R_{KL} + R)}{B^2 l^2} \Rightarrow$$

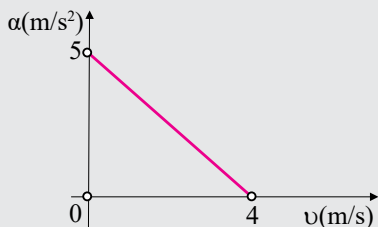
$$v_{op.} = 4 \text{ m/s}$$

δ) Από τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow mg - T - F_L = ma \Rightarrow$$

$$mg - T - \frac{B^2 l^2}{R_{KL} + R} v = ma \Rightarrow$$

$$a = 5 - 1,25v \text{ (S.I.)}$$



ε) Ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα στις αντιστάσεις είναι:

$$\frac{\Delta Q_{R_{ολ.}}}{\Delta t} = P_{R_{ολ.}} = I_{επ.}^2 (R_{KL} + R)$$

$$\text{Όμως (2)} \Rightarrow I_{επ.} = \frac{B v_0 l}{R_{KL} + R} = 2 \text{ A} \text{ άρα:}$$

$$\frac{\Delta Q_{R_{ολ.}}}{\Delta t} = 4 \text{ J/s}.$$

Ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα λόγω της τριβής ολίσθησης είναι:

$$\frac{\Delta Q_T}{\Delta t} = T \cdot v_0 = 4 \text{ J/s}$$

$$\text{Τελικά } \frac{\Delta Q_{R_{ολ.}}}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_T}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta Q_{R_{ολ.}}}{\Delta t} = 4 \text{ J/s}$$

Κεφάλαιο 6: Στοιχεία Κβαντομηχανικής

ΘΕΜΑ Α

- 6.1 δ) 6.2 β) 6.3 δ) 6.4 α)
 6.5 γ) 6.6 α) 6.7 β) 6.8 γ)
 6.9 δ) 6.10 β) 6.11 δ) 6.12 β)
 6.13 γ) 6.14 β) 6.15 β) 6.16 γ)
 6.17 α) 6.18 δ) 6.19 α) 6.20 γ)
 6.21 β)

ΘΕΜΑ Β

6.22 Σωστή απάντηση είναι η β).

Ισχύει:

$$T' = T - 0,2T \Rightarrow T' = 0,8T$$

Προκύπτει:

$$\lambda T = \lambda T' \Rightarrow \lambda T = \lambda' \cdot 0,8T \Rightarrow \lambda' = 1,25\lambda$$

Το ζητούμενο επί τοις εκατό ποσοστό είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{1,25\lambda - \lambda}{\lambda} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 25\%$$

6.23 Σωστή απάντηση είναι η β).

Για το σώμα (1) ισχύει:

$$I_1 = \frac{P_1}{A_1} \Rightarrow P_1 = I_1 A_1 \Rightarrow P_1 = I_1 \cdot 4\pi R_1^2 \quad (1)$$

Για το σώμα (2) ισχύει:

$$I_2 = \frac{P_2}{A_2} \Rightarrow P_2 = I_2 A_2 \Rightarrow P_2 = I_2 \cdot 4\pi R_2^2 \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1 \cdot 4\pi R_1^2}{I_2 \cdot 4\pi R_2^2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1^2}{4R_2^2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{4}$$

6.24 Σωστή απάντηση είναι η β).

Ισχύει:

$$\lambda_1 T_1 = \lambda_2 T_2 \Rightarrow 2\lambda_2 T_1 = \lambda_2 T_2 \Rightarrow \dots T_1$$

6.25 Σωστή απάντηση είναι η β).

Ισχύει:

$$\Pi(\%) = \frac{E_{\text{τελ}} - E_{\text{αρχ}}}{E_{\text{αρχ}}} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{hf - 2hf}{2hf} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = -50\%$$

6.26 Σωστή απάντηση είναι η β).

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής, κατά την κρούση ενός φωτονίου, είναι:

$$\Delta p = 2p$$

Η δύναμη που ασκεί το 1 φωτόνιο στην επιφάνεια είναι:

$$F_1 = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow F_1 = \frac{2p}{\Delta t}$$

Η συνολική δύναμη που ασκούν τα N φωτόνια είναι:

$$F_{\text{ολ}} = N \cdot \Delta t \cdot F_1 \Rightarrow F_{\text{ολ}} = N \cdot \Delta t \cdot \frac{2p}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$F_{\text{ολ}} = N \cdot 2p \Rightarrow F_{\text{ολ}} = 2N \frac{h}{\lambda} \Rightarrow F_{\text{ολ}} = \frac{2Nh f}{c}$$

6.27 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$P_2 = 2P_1 \Rightarrow \frac{E_2}{t} = 2 \frac{E_1}{t} \Rightarrow \frac{N_2 hc}{t\lambda_2} = 2 \frac{N_1 hc}{t\lambda_1} \Rightarrow$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_1}{\frac{8}{3}\lambda_1} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{3}{8}$$

6.28 Σωστή απάντηση είναι η α).

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε:

$$K_1 - K = q_e (V_{\text{καθ}} - V_{\text{αν}}) \Rightarrow$$

$$4eV_0 - eV_0 = -e(-\Delta V) \Rightarrow \Delta V = 3V_0$$

6.29 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$hf - \phi \geq 0 \Rightarrow hf \geq \phi \Rightarrow E \geq \phi \Rightarrow$$

$$pc \geq \phi \Rightarrow \phi \leq pc$$

6.30 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Ισχύει:

$$K_1 = \frac{hc}{\lambda_1} - \varphi \Rightarrow \frac{p^2}{2m} = \frac{hc}{\lambda_1} - \varphi(1)$$

Επίσης, έχουμε:

$$K_2 = \frac{hc}{\lambda_2} - \varphi \Rightarrow \frac{4p^2}{2m} = \frac{hc}{\lambda_2} - \varphi \Rightarrow$$

$$4\left(\frac{hc}{\lambda_1} - \varphi\right) = \frac{hc}{\lambda_2} - \varphi \Rightarrow 4\frac{hc}{\lambda_1} = \frac{hc}{\lambda_2} + 3\varphi \Rightarrow$$

$$4\frac{hc}{\lambda_1} = \frac{hc}{\lambda_2} + 3\left(\frac{2hc}{3\lambda_1}\right) \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2$$

6.31 Σωστή απάντηση είναι η β).

Ισχύει:

$$K = hf - \varphi \Rightarrow eV_0 = \frac{hc}{\lambda} - \varphi \Rightarrow$$

$$eV_0 = pc - \varphi \Rightarrow V_0 = \frac{pc - \varphi}{e}$$

6.32 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Από την εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας έχουμε:

$$E = K + E' \Rightarrow E' = E - \frac{E}{5} \Rightarrow E' = \frac{4E}{5} \Rightarrow$$

$$\frac{hc}{\lambda'} = \frac{4}{5} \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda' = \frac{5\lambda}{4}$$

Προκύπτει:

$$\Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta) \Rightarrow \lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta) \Rightarrow$$

$$\frac{5\lambda}{4} - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta) \Rightarrow \frac{\lambda}{4} = \lambda_c (1 - \cos\theta) \Rightarrow$$

$$\frac{2h}{4m_e c} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta) \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\theta = 60^\circ$$

6.33 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Ισχύει:

$$\frac{p'}{p} = \frac{\frac{h}{\lambda'}}{\frac{h}{\lambda}} \Rightarrow \frac{p'}{p} = \frac{\lambda}{\lambda'} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}p}{p} = \frac{\lambda}{\lambda'} \Rightarrow \lambda' = \frac{3\lambda}{2}$$

Έχουμε:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{3\lambda}{2} - \lambda \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{2}$$

6.34 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta) \Rightarrow \lambda' - \frac{2h}{m_e c} = \frac{2h}{m_e c} \Rightarrow$$

$$\lambda' = \frac{4h}{m_e c}$$

Προκύπτει:

$$K = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} \Rightarrow K = \frac{hc}{2h} - \frac{hc}{4h} \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{4} m_e c^2$$

6.35 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$K = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2Km}$$

Επίσης έχουμε:

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2Km}}$$

Τελικά, προκύπτει:

$$\Pi(\%) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1\right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \left(\frac{\sqrt{2K_1 m}}{\sqrt{2K_2 m}} - 1\right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \left(\frac{\sqrt{\frac{K_1}{4}}}{\sqrt{\frac{K_1}{4}}} - 1\right) \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 100\%$$

6.36 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{mv}$$

Προκύπτει:

$$\Pi(\%) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1\right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \left(\frac{\frac{h}{mv_2}}{\frac{h}{mv_1}} - 1 \right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \left(\frac{v_1}{v_2} - 1 \right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \left(\frac{v_1}{\frac{v_1}{3}} - 1 \right) \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 200\%$$

6.37 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{mv_1}{Bq}}{\frac{mv_2}{Bq}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2}$$

Τελικά, προκύπτει:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\frac{h}{mv_1}}{\frac{h}{mv_2}} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2$$

6.38 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$\lambda' = 2\lambda \Rightarrow \frac{c}{f} = 2 \frac{h}{p} \Rightarrow \frac{c}{f} = 2 \frac{h}{m_p v} \Rightarrow f = \frac{m_p v c}{2h}$$

6.39 Σωστή απάντηση είναι η α).

Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. για το ηλεκτρόνιο (1) έχουμε:

$$\frac{1}{2} m_e v_1^2 = eV_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2eV_1}{m_e}}$$

Για το, κατά de Broglie, μήκος κύματος του ηλεκτρονίου (1), έχουμε:

$$\lambda_1 = \frac{h}{p_1} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{h}{m_e v_1} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{h}{m_e \sqrt{\frac{2eV_1}{m_e}}} \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV_1}} (1)$$

Όμοια για το ηλεκτρόνιο (2) θα έχουμε:

$$\lambda_2 = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV_2}} (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\frac{h}{\sqrt{2m_e eV_1}}}{\frac{h}{\sqrt{2m_e eV_2}}} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{V_2}{V_1}} \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{4V_1}{V_1}} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2$$

6.40 Σωστή απάντηση είναι β).

Αρχικά έχουμε:

$$K = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow K = \frac{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2}{2m} \Rightarrow K = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$$

Τελικά, έχουμε:

$$K' = \frac{p'^2}{2m} \Rightarrow K' = \frac{\left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2}{2m} \Rightarrow K' = \frac{h^2}{2m\lambda'^2} \Rightarrow$$

$$K' = \frac{h^2}{2m \cdot 4\lambda^2} \Rightarrow K' = \frac{K}{4}$$

Το ζητούμενο επί τοις εκατό ποσοστό είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{K - K'}{K} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{K - \frac{K}{4}}{K} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 75\%$$

6.41 Σωστή απάντηση είναι α).

Από τις σχέσεις:

$$E = hf = h \frac{c}{\lambda} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

προκύπτει ότι $E = pc$.

Έχουμε:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{p_1 c}{p_2 c} \Rightarrow \frac{2E_2}{E_2} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = 2 \Rightarrow p_2 = \frac{p_1}{2}$$

6.42 Σωστή απάντηση είναι η β).

Για το σωματίδιο (1) έχουμε:

$$\Delta x_1 \cdot \Delta p_1 = \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{h}{2\pi m_1 \cdot \Delta v_1} \Rightarrow$$

$$\Delta x_1 = \frac{h}{2\pi m \cdot \frac{\kappa}{100} v} \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{100h}{2\pi m \cdot \kappa v}$$

Για το σωματίδιο (2) έχουμε:

$$\Delta x_2 \cdot \Delta p_2 = \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{h}{2\pi m_2 \cdot \Delta v_2} \Rightarrow$$

$$\Delta x_2 = \frac{h}{2\pi \cdot 4m \cdot \frac{2\kappa}{100} v} \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{100h}{16\pi m \cdot \kappa v} \Rightarrow$$

$$\Delta x_2 = \frac{\Delta x_1}{8}$$

6.43 Σωστή απάντηση είναι η β).

Ισχύει ότι:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi} \Rightarrow h \cdot \Delta f \geq \frac{h}{2\pi \cdot \Delta t} \Rightarrow$$

$$\Delta f_{\min} = \frac{1}{2\pi \cdot \Delta t} \Rightarrow \Delta f_{\min} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^{-8}} \text{ Hz} \Rightarrow$$

$$\Delta f_{\min} = \frac{100}{2\pi} \text{ MHz}$$

ΘΕΜΑ Γ

6.44 α) Για τη συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος ισχύει:

$$E = hf \Rightarrow f = \frac{E}{h} \Rightarrow f = 15 \text{ Hz}$$

β) Έχουμε:

$$\text{Για } n = 1, E_1 = 10^{-32} \text{ J}$$

$$\text{Για } n = 2, E_2 = 2 \cdot 10^{-32} \text{ J}$$

$$\text{Για } n = 3, E_3 = 3 \cdot 10^{-32} \text{ J}$$

$$\text{Για } n = 4, E_4 = 4 \cdot 10^{-32} \text{ J}$$

γ) Προκύπτει:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow m = \frac{k}{4\pi^2 f^2} \Rightarrow m = 0,1 \text{ kg}$$

δ) Έχουμε:

$$nhf = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2nhf}{k}} \Rightarrow A = \frac{2}{30} \text{ m}$$

6.45 α) Ισχύουν:

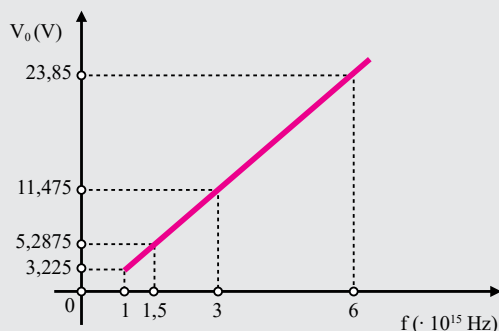
$$1) f_1 = \frac{c}{\lambda_1} \Rightarrow f_1 = 6 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$2) f_2 = \frac{c}{\lambda_2} \Rightarrow f_2 = 3 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$3) f_3 = \frac{c}{\lambda_3} \Rightarrow f_3 = 1,5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$4) f_4 = \frac{c}{\lambda_4} \Rightarrow f_4 = 1 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

β) Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



γ) Ισχύει:

$$K_{\max} = hf - \varphi \Rightarrow eV_0 = hf - \varphi \Rightarrow$$

$$V_0 = \frac{h}{e} f - \frac{\varphi}{e} (1)$$

Η σχέση (1) είναι της μορφής $V_0 = \alpha f + \beta$ (2). Η κλίση της ευθείας μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια του διαγράμματος V_0 - f . Έχουμε:

$$\alpha = \frac{\Delta V_0}{\Delta f} \Rightarrow \alpha = 4,125 \cdot 10^{-15} \frac{\text{V}}{\text{Hz}}$$

Όμως, ισχύει:

$$\frac{h}{e} = \alpha \Rightarrow h = \alpha e \Rightarrow h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

δ) Η σχέση (2) έχει τη μορφή:

$$V_0 = 4,125 \cdot 10^{-15} f - \beta (3)$$

Θέτοντας στη σχέση (3) όπου:

$$f = 6 \cdot 10^{15} \text{ Hz}, V_0 = 23,85 \text{ V}$$

έχουμε:

$$\beta = -0,9 \text{ V}$$

Η σχέση (3) θα έχει πλέον τη μορφή:

$$V_0 = 4,125 \cdot 10^{-15} f - 0,9 (4)$$

Ισχύει:

$$\frac{\varphi}{e} = \beta \Rightarrow \varphi = e\beta \Rightarrow \varphi = 0,9 \text{ eV}$$

Από τη σχέση (4) έχουμε:

$$V_0 \geq 0 \Rightarrow 4,125 \cdot 10^{-15} f - 0,9 \geq 0 \Rightarrow$$

$$f \geq \frac{0,9}{4,125 \cdot 10^{-15}} \Rightarrow f_0 = \frac{72}{33} \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

6.46 α) Ισχύει:

$$K_{\max} = hf - \varphi(1)$$

Επομένως η σταθερά του Planck είναι ίση με την κλίση του διαγράμματος $K_{\max}$ - f .

Προκύπτει:

$$h = \frac{\Delta K_{\max}}{\Delta f} \Rightarrow h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

β) Για το έργο εξαγωγής του μετάλλου έχουμε:

$$K_{\max} = hf - \varphi \Rightarrow \varphi = hf - K_{\max} \Rightarrow$$

$$\varphi = 20,625 \text{ eV}$$

γ) Για τη συχνότητα κατωφλίου ισχύει:

$$f_0 = \frac{\varphi}{h} \Rightarrow f_0 = 5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

δ) Για το ζητούμενο δυναμικό αποκοπής προκύπτει:

$$eV_0 = hf - \varphi \Rightarrow V_0 = \frac{hf - \varphi}{e} \Rightarrow$$

$$V_0 = 41,25 \text{ V}$$

6.47 α) Ισχύει:

$$E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E} \Rightarrow \lambda = 4,8 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

β) Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά τη σκέδαση είναι:

$$K = E - E' \Rightarrow K = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}(1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι για να είναι η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου μέγιστη θα πρέπει το μήκος κύματος λ' του σκεδαζόμενου φωτονίου να παίρνει και αυτό τη μέγιστη τιμή του. Επομένως η γωνία σκέδασης πρέπει να είναι $\varphi = 180^\circ$.

γ) Ισχύει:

$$\Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos\varphi) \Rightarrow \Delta\lambda = 2\lambda_c \Rightarrow$$

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_c \Rightarrow \lambda' = 9,6 \cdot 10^{-12}$$

Προκύπτει:

$$\frac{E}{E'} = \frac{\frac{hc}{\lambda}}{\frac{hc}{\lambda'}} \Rightarrow \frac{E}{E'} = \frac{\lambda'}{\lambda} \Rightarrow \frac{E}{E'} = \frac{2\lambda}{\lambda} \Rightarrow$$

$$E' = \frac{E}{2} \Rightarrow E' = \frac{3100}{24} \text{ KeV}$$

δ) Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε:

$$K = E - E' \Rightarrow K = E - \frac{E}{2} \Rightarrow K = \frac{E}{2}$$

Το ζητούμενο επί τοις εκατό ποσοστό είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{E}{E} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 50\%$$

6.48 α) Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε:

$$K - 0 = eV \Rightarrow V = \frac{K}{e} \Rightarrow V = 180 \text{ V}$$

β) Ισχύει:

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = K \Rightarrow \text{ή } v = \sqrt{\frac{2K}{m_e}} \Rightarrow v = 8 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Προκύπτει:

$$p = m_e v \Rightarrow p = 72 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Ισχύει:

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \lambda = \frac{11}{12} \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

δ) Έχουμε:

$$E = hf \Rightarrow E = h \frac{c}{\lambda} \Rightarrow E = 21,6 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

ΘΕΜΑ Δ

6.49 α) Για την ένταση της ακτινοβολίας ισχύει:

$$I = \frac{P}{A} \Rightarrow I = \frac{P}{4\pi d_1^2} \Rightarrow I = \frac{1}{10\pi} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

β) Σε απόσταση d_2 από την πηγή, η ένταση της ακτινοβολίας είναι:

$$I' = \frac{P}{4\pi d_2^2} \Rightarrow I' = \frac{1}{40\pi} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Ισχύει:

$$\Delta E_{\alpha\pi} = \frac{50}{100} \Delta E_{\pi\lambda} \Rightarrow \Delta E_{\pi\lambda} = 2\Delta E_{\alpha\pi} \Rightarrow$$

$$\Delta E_{\pi\lambda} = \frac{1}{100\pi} \text{ J}$$

Προκύπτει:

$$I' = \frac{P_{\pi\lambda}}{A_{\pi\lambda}} \Rightarrow I' = \frac{\frac{\Delta E_{\pi\lambda}}{\Delta t}}{A_{\pi\lambda}} \Rightarrow A_{\pi\lambda} = \frac{\Delta E_{\pi\lambda}}{I' \cdot \Delta t} \Rightarrow$$

$$\alpha^2 = \frac{\Delta E_{\pi\lambda}}{I' \cdot \Delta t} \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{\Delta E_{\pi\lambda}}{I' \cdot \Delta t}} \Rightarrow \alpha = 0,2 \text{ m}$$

γ) Ισχύει:

$$I' = \frac{P'_{\pi\lambda}}{A_{\pi\lambda}} \Rightarrow I' = \frac{\frac{\Delta E'_{\pi\lambda}}{\Delta t'}}{A_{\pi\lambda}} \Rightarrow \Delta E'_{\pi\lambda} = I' \cdot \Delta t' \cdot A_{\pi\lambda} \Rightarrow$$

$$\Delta E'_{\pi\lambda} = \frac{1}{10\pi} \text{ J}$$

δ) Έχουμε:

$$I'' = \frac{P}{4\pi(2d_2)^2} \Rightarrow I'' = \frac{I'}{4} \Rightarrow I'' = \frac{1}{160\pi} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Προκύπτει:

$$I'' = \frac{P''_{\pi\lambda}}{A_{\pi\lambda}} \Rightarrow I' = \frac{\frac{\Delta E''_{\pi\lambda}}{\Delta t'}}{A_{\pi\lambda}} \Rightarrow$$

$$\Delta E''_{\pi\lambda} = I'' \cdot \Delta t' \cdot A_{\pi\lambda} \Rightarrow \Delta E''_{\pi\lambda} = \frac{1}{40\pi} \text{ J}$$

6.50 α) Ισχύει:

$$\frac{K_e}{E} = \frac{1}{2} \Rightarrow K_e = \frac{E}{2}$$

Από την εφαρμογή της Α.Δ.Ε. προκύπτει:

$$E = E' + K_e \Rightarrow E' = \frac{E}{2} \Rightarrow \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{2\lambda} \Rightarrow$$

$$\lambda' = 2\lambda \Rightarrow \lambda' = 2\lambda_c \Rightarrow \lambda' = 4,8 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

β) Για τη γωνία σκέδασης προκύπτει:

$$\Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta) \Rightarrow$$

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta) \Rightarrow$$

$$2\lambda_c - \lambda_c = \lambda_c (1 - \cos\theta) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

γ) Ισχύει:

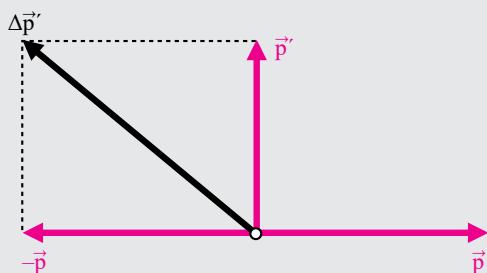
$$\frac{p'}{p} = \frac{\frac{h}{\lambda'}}{\frac{h}{\lambda}} \Rightarrow \frac{p'}{p} = \frac{\lambda}{\lambda'} \Rightarrow \frac{p'}{p} = \frac{1}{2} \Rightarrow p' = \frac{p}{2}$$

Για το ζητούμενο επί τοις εκατό ποσοστό προκύπτει:

$$\Pi(\%) = \frac{p' - p}{p} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{\frac{p}{2} - p}{p} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = -50\%$$

δ)



Έχουμε:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}' - \vec{p} \Rightarrow \Delta \vec{p} = \vec{p}' + (-\vec{p})$$

Για το μέτρο της μεταβολής της ορμής προκύπτει:

$$\Delta p = \sqrt{p'^2 + p^2} \Rightarrow \Delta p = \sqrt{\frac{p^2}{4} + p^2} \Rightarrow$$

$$\Delta p = \frac{\sqrt{5}}{2} p \Rightarrow \Delta p = \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{h}{\lambda_c} \Rightarrow$$

$$\Delta p = 1375 \cdot \sqrt{5} \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

6.51 α) Η γωνία σκέδασης είναι $\varphi = \pi \text{ rad}$.

Έχουμε:

$$\Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos\pi) \Rightarrow \Delta\lambda = 2\lambda_c \Rightarrow$$

$$\Delta\lambda = 4,8 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

β) Ισχύει:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda \Rightarrow \lambda' = \Delta\lambda + \lambda \Rightarrow$$

$$\lambda' = 4,8 \cdot 10^{-12} \text{ m} + 4,8 \cdot 10^{-12} \text{ m} \Rightarrow$$

$$\lambda' = 9,6 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Προκύπτει:

$$\frac{p}{p'} = \frac{\frac{h}{\lambda}}{\frac{h}{\lambda'}} \Rightarrow \frac{p}{p'} = \frac{\lambda'}{\lambda} \Rightarrow \frac{p}{p'} = 2$$

γ) Για τη μεταβολή του μέτρου της ορμής έχουμε:

$$\Delta p = p' - p \Rightarrow \Delta p = \frac{h}{2\lambda} - \frac{h}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\Delta p = -\frac{h}{2\lambda} \Rightarrow \Delta p = -\frac{11}{16} \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ) Από την Α.Δ.Ο. για τη σκέδαση έχουμε:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e \Rightarrow p = -p' + p_e \Rightarrow p_e = p + p' \Rightarrow$$

$$p_e = \frac{3p}{2} \Rightarrow p_e = \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{\lambda} \Rightarrow$$

$$p_e = \frac{33}{16} \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

6.52 α) Ισχύει:

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow p = 3,6 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Το μέτρο της ταχύτητας των εξερχόμενων φωτοηλεκτρονίων είναι:

$$v = \frac{p}{m_e} \Rightarrow v = 4 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για το δυναμικό αποκοπής έχουμε:

$$eV_0 = K \Rightarrow V_0 = \frac{K}{e} \Rightarrow V_0 = \frac{\frac{1}{2} m_e v^2}{e} \Rightarrow$$

$$V_0 = 0,45 \text{ V}$$

γ) Για το έργο εξαγωγής προκύπτει:

$$K = hf - \phi \Rightarrow \phi = hf - K \Rightarrow \phi = h \frac{c}{\lambda} - K \Rightarrow$$

$$\phi = 0,15 \text{ eV}$$

δ) Για τη συχνότητα κατωφλίου έχουμε:

$$f_0 = \frac{\phi}{h} \Rightarrow f_0 = \frac{4}{11} \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

6.53 α) Η μεταβολή του μήκους κύματος κατά τη σκέδαση είναι:

$$\Delta \lambda = \lambda_c (1 - \cos \pi) \Rightarrow \Delta \lambda = 2\lambda_c \Rightarrow$$

$$\Delta \lambda = 4,8 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

β) Για το μήκος κύματος του φωτονίου μετά τη σκέδαση έχουμε:

$$\lambda' - \lambda = \Delta \lambda \Rightarrow \lambda' = \Delta \lambda + \lambda \Rightarrow$$

$$\lambda' = 5 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

γ) Από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής προκύπτει:

$$p = -p' + p_e \Rightarrow p_e = p + p' \Rightarrow p_e = \frac{h}{\lambda} + \frac{h}{\lambda'} \Rightarrow$$

$$p_e = 34,32 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ) Ισχύει:

$$\lambda_c = \frac{h}{p_e} \Rightarrow \lambda_c = \frac{11}{572} \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

6.54 α) Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε:

$$K - 0 = eV \Rightarrow \frac{1}{2} m_e v^2 = eV \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}} \Rightarrow$$

$$v = 6 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Για το μήκος κύματος de Broglie του ηλεκτρονίου ισχύει:

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{m_e v} \Rightarrow \lambda = \frac{11}{90} \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

γ) Έχουμε:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{0,1}{100} \Rightarrow \Delta v = v \cdot 0,001 \Rightarrow \Delta v = 6 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Προκύπτει:

$$\Delta p = m_e \cdot \Delta v \Rightarrow \Delta p = 54 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ) Ισχύει:

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \Delta x \geq \frac{h}{2\pi \cdot \Delta p} \Rightarrow$$

$$\Delta x_{\min} = \frac{50}{27} \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

The background features a large, solid pink rectangle in the upper half. Below it, the background is a light gray. Scattered throughout are various geometric shapes: rounded rectangles, squares, and lines in shades of pink, white, and gray. Some shapes are solid, while others are outlines. The overall aesthetic is modern and minimalist.

Απαντήσεις Διαγωνισμάτων

1ο Διαγώνισμα (Δ1)

ΘΕΜΑ Α

A1. α), A2. δ), A3. δ), A4. δ)

A5. α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η β).

Μετά την κρούση οι δύο σφαίρες εκτελούν οριζόντιες βολές από το ίδιο ύψος, άρα για τους χρόνους καθόδου ισχύει:

$$t_1 = t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Έχουμε:

$$x_2 = 3x_1 \Rightarrow v_2' t_2 = 3v_1' t_1 \Rightarrow v_2' = 3v_1' \Rightarrow$$

$$\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 3 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{1}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η β).

$$\text{Α.Α.Ο.: } \vec{P}_{\text{ολ. (πριν)}} = \vec{P}_{\text{ολ. (μετά)}} \Rightarrow$$

$$mv_0 = (m + M)V \Rightarrow V = \frac{mv_0}{m + M} \quad (1)$$

$$\frac{Q_{\text{κρούσης}}}{Q_{\text{τριβής}}} = \frac{3}{1} \Rightarrow Q_{\text{κρούσης}} = 3Q_{\text{τριβής}} \Rightarrow$$

$$K_{\text{ολ. (πριν)}} - K_{\text{ολ. (μετά)}} = 3K_{\text{ολ. (μετά)}} \Rightarrow$$

$$K_{\text{ολ. (πριν)}} = 4K_{\text{ολ. (μετά)}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} (m + M)V^2 \Rightarrow$$

$$mv_0^2 = 4 \cdot (m + M) \left(\frac{mv_0}{m + M} \right)^2 \Rightarrow M = 3m$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Ισχύει:

$$K_2 = \frac{1}{3} K_1 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} mv_2^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} mv_1^2 \quad \text{ή} \quad v_1 = \sqrt{3} v_2$$

Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα x'x έχουμε:

$$mv_1 \eta \mu \theta = mv_2 \eta \mu \varphi \Rightarrow \sqrt{3} v_2 \frac{1}{2} = v_2 \eta \mu \varphi \Rightarrow$$

$$\varphi = 60^\circ$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για την κίνηση του σώματος Σ₁ όταν το νήμα είναι οριζόντιο και μέχρι να γίνει κατακόρυφο, εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

$$\text{Θ.Μ.Κ.Ε.: } \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(\text{τελ.})} - K_{(\text{αρχ.})} = W_{W_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = m_1 g l \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gl} \Rightarrow v_1 = 4 \text{ m/s}$$

Για την κίνηση του σώματος Σ₁ αμέσως μετά την κρούση και μέχρι να ακινητοποιηθεί στιγμιαία, εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

$$\text{Θ.Μ.Κ.Ε.: } \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(\text{τελ.})} - K_{(\text{αρχ.})} = W_{W_1} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -m_1 g l \Rightarrow$$

$$v_1' = 2 \text{ m/s}$$

Γ2. Θεωρούμε για την κρούση θετική φορά προς τα δεξιά.

$$\text{Α.Α.Ο.: } \vec{P}_{\text{ολ. (πριν)}} = \vec{P}_{\text{ολ. (μετά)}} \Rightarrow$$

$$m_2 v_2 - m_1 v_1 = m_1 v_1' - m_2 v_2' \Rightarrow$$

$$v_2' = 0,5 \text{ m/s}$$

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2(\text{μετά})} - \vec{p}_{2(\text{πριν})} \Rightarrow$$

$$\Delta p_2 = -m_2 v_2' - m_2 v_2 \Rightarrow \Delta p_2 = -6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\text{Γ3. } K_{\text{ολ. (πριν)}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 11,375 \text{ J}$$

$$K_{\text{ολ. (μετά)}} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = 2,375 \text{ J}$$

Αφού $K_{ολ.(πριν)} \neq K_{ολ.(μετά)}$ η κρούση είναι ανελαστική.

Γ4. Για την κίνηση του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση και μέχρι να σταματήσει, εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

$$\Theta.Μ.Κ.Ε.: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(τελ.)} - K_{(αρχ.)} = W_T \Rightarrow -\frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = -Td \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g d \Rightarrow \mu = \frac{v_2'^2}{2gd} \Rightarrow \mu = 0,05$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας Σ_1 από τη χρονική στιγμή που αφέθηκε ελεύθερη μέχρι να φτάσει στο δάπεδο. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 - 0 = m_1 g h \Rightarrow |v_1| = \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

$$|v_1| = 4 \frac{m}{s}$$

Ισχύει:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \Rightarrow |v_1'| = \frac{|v_1|}{2} \Rightarrow$$

$$|v_1'| = 2 \frac{m}{s}$$

Δ2. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την ανοδική κίνηση της σφαίρας Σ_1 μετά την κρούση της με το δάπεδο. Ισχύει:

$$0 - \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 = -m_1 g h_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{v_1'^2}{2g} \Rightarrow$$

$$h_{\max} = 0,2 \text{ m}$$

Δ3. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος. Έχουμε:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{\tau}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{\kappa}^2 = (m_1 + m_2)gh_{\max} \Rightarrow$$

$$|v_{\kappa}| = \sqrt{v_{\tau}^2 - 2gh_{\max}} \Rightarrow |v_{\kappa}| = 3 \frac{m}{s}$$

Από την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών προκύπτει:

$$m_2 |v_2| = (m_1 + m_2)|v_{\kappa}| \Rightarrow$$

$$3m |v_2| = 4m |v_{\kappa}| \Rightarrow |v_2| = 4 \frac{m}{s}$$

Δ4. Το ζητούμενο ποσοστό % υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Pi(\%) = \frac{\frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{\kappa}^2}{\frac{1}{2}m_2 v_2^2} 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{3m \cdot 16 - 4m \cdot 9}{3m \cdot 16} 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = 25\%$$

2ο Διαγώνισμα (Δ2)

ΘΕΜΑ Α

Α1. β), Α2. γ), Α3. δ), Α4. β)
Α5. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η **β**).

1η κρούση: B – Γ:

$$v_B = \frac{m - 4m}{m + 4m} v \Rightarrow v_B = -0,6v$$

(κινείται προς τα αριστερά)

$$v_{\Gamma} = \frac{2m}{m + 4m} v \Rightarrow v_{\Gamma} = 0,4v$$

2η κρούση: B – A:

$$v'_B = \frac{m - 5m}{m + 5m} v_B \Rightarrow v'_B = 0,4v$$

(κινείται προς τα δεξιά)

Επειδή $v'_B = v_{\Gamma}$ δε θα γίνει άλλη κρούση.

B2. Σωστή απάντηση είναι η α).

Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{v}_2$ σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{v}_{2,x}$ και $\vec{v}_{2,y}$. Επειδή το σύστημα των δύο σφαιρών είναι μονωμένο (δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις), η ορμή του θα παραμένει σταθερή και στον άξονα $x'x$ και στον άξονα $y'y$. Οπότε:

Α.Δ.Ο. άξονας $y'y$:

$$\vec{P}_{ολ(πριν)y} = \vec{P}_{ολ(μετά)y} \Rightarrow 0 = m_1 v_1 - m_2 v_{2,y} \Rightarrow$$

$$m_1 v_1 = m_2 v_{2,y} \quad \Rightarrow \quad v_1 = 3v_2 \quad (1)$$

Α.Δ.Ο. άξονας $x'x$:

$$\vec{P}_{ολ(πριν)x} = \vec{P}_{ολ(μετά)x} \Rightarrow m_1 v_0 = m_2 v_{2,x} \Rightarrow$$

$$m_1 v_0 = m_2 v_2 \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad v_0 = 4v_2 \quad (2)$$

$$\frac{Q}{K_{I(αρχ.)}} = \frac{K_{ολ.(πριν)} - K_{ολ.(μετά)}}{K_{ολ.(πριν)}} =$$

$$= 1 - \frac{K_{ολ.(μετά)}}{K_{ολ.(πριν)}} = 1 - \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} \stackrel{m_1=m_2=5m}{=} =$$

$$= 1 - \frac{v_1^2 + 5v_2^2}{v_0^2} \stackrel{(1)}{=} 1 - \frac{14v_2^2}{v_0^2} \stackrel{(2)}{=} 1 - \frac{14v_2^2}{16v_2^2} = \frac{1}{8}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β).

Επειδή η σφαίρα m_2 χτυπά στον τοίχο ελαστικά ανακλάται με ίδιο μέτρο ταχύτητας δηλαδή $|v_2''| = |v_2'|$. Αλγεβρικά ισχύει $v_2'' = -v_2'$

Για να κρατούν σταθερή απόσταση οι σφαίρες θα πρέπει η σφαίρα m_1 να κινηθεί προς τα αριστερά και η m_2 μετά την κρούση της με τον τοίχο να έχει ίδια ταχύτητα με αυτή της σφαίρας m_1 .

Αλγεβρικά θα ισχύει:

$$v_1' = v_2'' \Rightarrow v_1' = -v_2' \Rightarrow |v_1'| = |v_2'| \quad (\text{ίσα μέτρα})$$

Όταν γίνει η κρούση λοιπόν των 2 σφαιρών αποκτούν ταχύτητες ίσων μέτρων. Όταν η

σφαίρα m_2 χτυπά στον τοίχο θα έχει διανύσει απόσταση $d = 5 \text{ m}$ και στον ίδιο χρόνο η σφαίρα m_1 που κινείται αντίθετα έχει διανύσει και αυτή απόσταση $d = 5 \text{ m}$. Έτσι, μετά την ελαστική κρούση της σφαίρας m_2 με τον τοίχο, η απόσταση που θα απέχουν τελικά οι 2 σφαίρες θα είναι $S = 2d = 10 \text{ m}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για την κίνηση της σφαίρας m_1 μέχρι το σημείο της κρούσης, εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

$$\Theta.Μ.Κ.Ε. : \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(τελ.)} - K_{(αρχ.)} = W_{w_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = m_1 g l \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gl} \Rightarrow v_1 = 6 \text{ m/s}$$

Γ2. Αφού η κρούση είναι κεντρική και ελαστική ισχύουν οι τύποι:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v_1' = 2 \text{ m/s}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v_2' = 8 \text{ m/s}$$

Το % ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας που μεταφέρεται στον κύβο, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Pi = \frac{K_2'}{K_1} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi = \frac{800}{9} \%$$

Γ3. Για την κίνηση της σφαίρας m_1 μετά την κρούση και μέχρι να ακινητοποιηθεί στιγμιαία, εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

$$\Theta.Μ.Κ.Ε. : \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(τελ.)} - K_{(αρχ.)} = W_{w_1} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -m_1 g h \Rightarrow h = \frac{v_1'^2}{2g} \Rightarrow h = 0,2 \text{ m}$$

Για τη γωνία εκτροπής έχουμε:

$$\sin\theta = \frac{l-h}{l} = \frac{8}{9}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = w_{1,y} = m_1 g \sin\theta \Rightarrow$$

$$T = \frac{80}{9} \text{ N}$$

Γ4. Για την κίνηση του κύβου αμέσως μετά την κρούση και μέχρι να σταματήσει, εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

$$\Theta.M.K.E.: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(\text{τελ.})} - K_{(\text{αρχ.})} = W_T \Rightarrow -\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -T d \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g d \Rightarrow d = \frac{v_2'^2}{2\mu g} \Rightarrow \mathbf{d = 4 \text{ m}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού κατά την κρούση το βλήμα χάνει το 75% της αρχικής του κινητικής ενέργειας, τότε μετά την κρούση θα του έχει απομείνει το 25% της αρχικής του κινητικής ενέργειας, άρα:

$$K_{\beta\lambda.(\text{μετά})} = 25\% K_{\beta\lambda.(\text{πριν})} \Rightarrow$$

$$K_{\beta\lambda.(\text{μετά})} = \frac{K_{\beta\lambda.(\text{πριν})}}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0'^2 = \frac{\frac{1}{2} m v_0^2}{4} \Rightarrow$$

$$v_0' = \frac{v_0}{2} \Rightarrow \mathbf{v_0' = 100 \text{ m/s}}$$

$$\mathbf{A.A.O.:} \quad \vec{P}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{P}_{\text{ολ}(\text{μετά})} \Rightarrow$$

$$m v_0 = m v_0' + M V \Rightarrow \mathbf{V = 2 \text{ m/s}}$$

$$\mathbf{\Delta 2.} \quad F = \frac{\Delta p_\Sigma}{\Delta t} = \frac{P_{\Sigma(\text{μετά})} - P_{\Sigma(\text{μετά})}}{\Delta t} = \frac{M V - 0}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\mathbf{F = 500 \text{ N}}$$

$$\mathbf{\Delta 3.} \quad Q_{\text{κρούσης}} = K_{\text{ολ.}(\text{πριν})} - K_{\text{ολ.}(\text{μετά})} =$$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 - \left(\frac{1}{2} m v_0'^2 + \frac{1}{2} M V^2 \right) \Rightarrow$$

$$\mathbf{Q_{\text{κρούσης}} = 745 \text{ J}}$$

Δ4. Πριν την κρούση το σώμα Σ ισορροπεί, άρα:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T = W_{(x)} \Rightarrow$$

$$\mu_{\text{op.}} M g \cdot \sin\theta = M g \cdot \eta \mu\theta \Rightarrow$$

$$\mu_{\text{op.}} = \varepsilon \phi\theta = \frac{\eta \mu\theta}{\sin\theta} \Rightarrow \mu_{\text{op.}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\mu_{\text{ολ.}} = 90\% \mu_{\text{op.}} \Rightarrow \mu_{\text{ολ.}} = 0,9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \mu_{\text{ολ.}} = 0,3\sqrt{3}$$

Μετά την κρούση το σώμα Σ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση προς τα κάτω αφού $w_{(x)} > T_{\text{ολ.}}$.

Άξονας x: 2ος Νόμος του Νεύτωνα

$$\Sigma F_x = M a \Rightarrow$$

$$w_{(x)} - T_{\text{ολ.}} = M a \Rightarrow$$

$$M g \cdot \eta \mu\theta - \mu_{\text{ολ.}} M g \cdot \sin\theta = M a \Rightarrow \mathbf{a = 0,5 \text{ m/s}^2}$$

$$d = V t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 \Rightarrow t_1^2 + 8 t_1 - 20 = 0 \Rightarrow \mathbf{t_1 = 2 \text{ s}}$$

3ο Διαγώνισμα (Δ3)

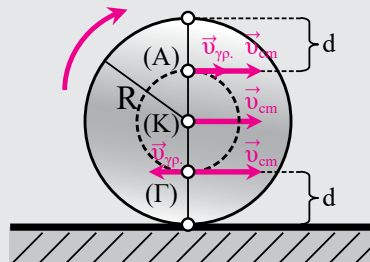
ΘΕΜΑ Α

Α1. α), Α2. γ), Α3. δ), Α4. α)
Α5. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η **β)**.

Δικαιολόγηση



Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, για κάθε σημείο του δίσκου ισχύει $\vec{v} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma p}$.
Για το σημείο (Α) ισχύει:

$$v_{(A)} = v_{cm} + v_{\gamma p} \Rightarrow v_{(A)} = v_{cm} + \omega \cdot (R - d) \quad (1)$$

Για το σημείο (Γ) ισχύει:

$$v_{(\Gamma)} = v_{cm} - v_{\gamma p} \Rightarrow v_{(\Gamma)} = v_{cm} - \omega \cdot (R - d) \quad (2)$$

Για τον λόγο των μέτρων των ταχυτήτων των σημείων (Α) και (Γ) ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{v_A}{v_\Gamma} = 5 &\Rightarrow \frac{v_{cm} + \omega \cdot (R - d)}{v_{cm} - \omega \cdot (R - d)} = 5 \Rightarrow \\ v_{cm} + \omega \cdot (R - d) &= 5v_{cm} - 5\omega \cdot (R - d) \Rightarrow \\ \omega R - \omega d &= 4v_{cm} - 5\omega R + 5\omega d \Rightarrow \\ 6\omega R &= 4v_{cm} + 6\omega d \stackrel{v_{cm} = \omega R}{\Rightarrow} 2\omega R = 6\omega d \Rightarrow \\ d &= \frac{R}{3} \end{aligned}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Καθώς το νήμα ξετυλίγεται, ο δίσκος εκτελεί μεταφορική και στροφική κίνηση. Η ταχύτητα κάθε σημείου του δίσκου είναι:

$$\vec{v} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma p},$$

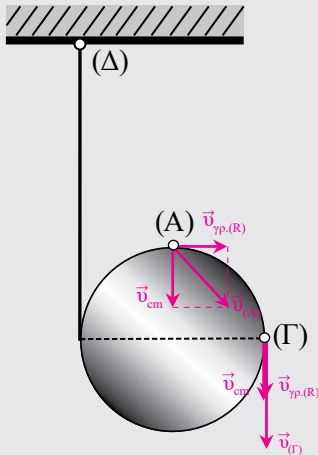
όπου για το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας ισχύει $v_{\gamma p} = \omega R$.
Για το σημείο Α έχουμε:

$$v_A = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{\gamma p}^2} = \sqrt{2v_{cm}^2} = v_{cm} \sqrt{2}$$

Για το σημείο Γ έχουμε: $v_\Gamma = v_{cm} + v_{\gamma p} = 2v_{cm}$

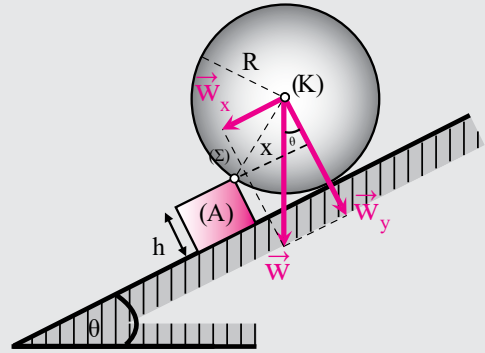
Ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων των σημείων Α και Γ του δίσκου είναι:

$$\frac{v_A}{v_\Gamma} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



B3. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση



Για να υπερπηδήσει η σφαίρα το εμπόδιο θα πρέπει:

$$|\tau_{w_x(\Sigma)}| \geq |\tau_{w_y(\Sigma)}| \Rightarrow w_x \cdot (R - h) \geq w_y \cdot x \Rightarrow$$

$$w \cdot \eta \mu \theta \cdot (R - h) \geq w \cdot \sigma \nu \theta \cdot x \Rightarrow$$

$$\eta \mu \theta \cdot (R - h) \geq \sigma \nu \theta \cdot x \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (R - h) \geq \frac{1}{2} \cdot x \Rightarrow \sqrt{3} \cdot (R - h) \geq x \quad (1)$$

Για τον μοχλοβραχίονα x της συνιστώσας w_y του βάρους ως προς το σημείο Σ, εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε:

$$R^2 = x^2 + (R - h)^2 \Rightarrow x = \sqrt{h \cdot (2R - h)} \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \sqrt{3} \cdot (R - h) \geq \sqrt{h \cdot (2R - h)} \Rightarrow$$

$$3 \cdot (R - h)^2 \geq h \cdot (2R - h) \Rightarrow$$

$$3R^2 + 3h^2 - 6Rh \geq 2Rh - h^2 \Rightarrow$$

$$4h^2 - 8Rh + 3R^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$4h_{\min}^2 - 8Rh_{\min} + 3R^2 = 0$$

$$\Delta = 64R^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3R^2 = 16R^2$$

$$h_{\min} = \frac{8R \pm 4R}{8} \Rightarrow h_{\min(1)} = \frac{3R}{2}, h_{\min(2)} = \frac{R}{2}$$

Επειδή $h < R$ δεκτή λύση είναι η: $h_{\min} = \frac{R}{2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$v_{cm,2} = \alpha_{cm} t_2 \Rightarrow v_{cm,2} = \alpha_{cm} 2t_1 \Rightarrow$$

$$v_{cm,2} = 2v_{cm,1} \Rightarrow v_{cm,2} = 16 \frac{m}{s}$$

Γ2. Ο δίσκος κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει, επομένως προκύπτει:

$$\alpha_{cm} = \alpha_{γων} R \Rightarrow R = \frac{\alpha_{cm}}{\alpha_{γων}} \Rightarrow R = 0,4m$$

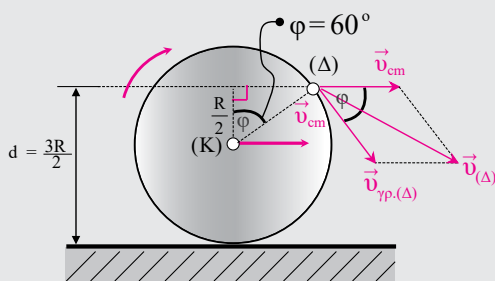
Γ3. Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_1 . Έχουμε:

$$v_{cm,1} = \alpha_{cm} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_{cm,1}}{\alpha_{cm}} \Rightarrow t_1 = 2s$$

Για τον αριθμό των περιστροφών του δίσκου ισχύει:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{\frac{1}{2} \alpha_{γων} t_1^2}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{10}{\pi} \text{ περ.}$$

Γ4.



Ισχύει:

$$v_{gp,(Delta)} = v_{cm} = \omega R$$

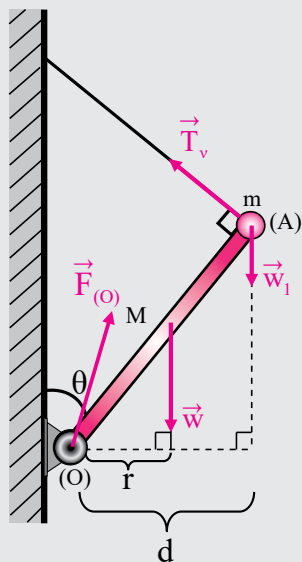
Για το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Δ, προκύπτει:

$$v_{(Delta),1} = \sqrt{v_{gp,(Delta)}^2 + v_{cm,1}^2 + 2v_{gp,(Delta)} v_{cm,1} \cdot \cos 60^\circ} \Rightarrow$$

$$v_{(Delta),1} = \sqrt{3} v_{cm,1} \Rightarrow v_{(Delta),1} = 8\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



Το σύστημα ισορροπεί επομένως:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow T_v l - Mgr - mgd = 0 \Rightarrow$$

$$T_v l - Mg \frac{l}{2} \cdot \eta\mu\theta - mgl \cdot \eta\mu\theta = 0 \Rightarrow$$

$$T_v = \frac{Mg}{2} \cdot \eta\mu\theta + mg \cdot \eta\mu\theta (1) \Rightarrow T_v = 15N$$

Δ2. Από τη σχέση (1) θέτοντας όπου $T_v = T_{\theta p.} = 21N$ έχουμε:

$$(1) \Rightarrow T_{\theta p.} = \frac{Mg}{2} \cdot \eta\mu\theta + m_{\max} g \cdot \eta\mu\theta \Rightarrow$$

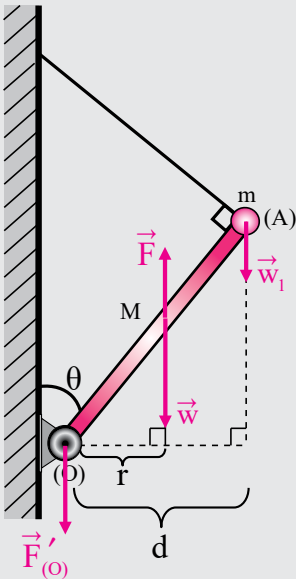
$$m_{\max} = 2kg$$

Δ3. Αφού η δύναμη που δέχεται το σύστημα ράβδος - σημειακή μάζα από την άρθρωση έχει μόνο κατακόρυφη συνιστώσα, θα πρέπει η δύναμη που ασκείται στο σύστημα από το νήμα να είναι μηδέν. Αφού το σύστημα ισορροπεί, έχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma \tau_{(O)} = 0 &\Rightarrow -Mgr - mgd + Fr = 0 \Rightarrow \\ -Mg \frac{1}{2} \cdot \eta \mu \theta - mgl \cdot \eta \mu \theta + F \frac{1}{2} \cdot \eta \mu \theta &= 0 \Rightarrow \\ F = Mg + 2mg &\Rightarrow \mathbf{F = 50N}\end{aligned}$$

Δ4. Για το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σύστημα ράβδος - σημειακή μάζα από την άρθρωση έχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma F_y = 0 &\Rightarrow -F'_{(O)} + F - Mg - mg = 0 \Rightarrow \\ \mathbf{F'_{(O)} = 10N}\end{aligned}$$



4ο Διαγώνισμα (Δ4)

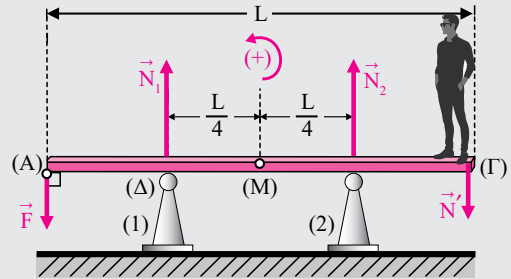
ΘΕΜΑ Α

A1. α), A2. δ), A3. δ), A4. β)
A5. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **β**).

Δικαιολόγηση



Στον άνθρωπο ασκείται η κάθετη δύναμη στήριξης $\vec{N}$ από τη ράβδο.

Από την ισορροπία του ανθρώπου προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w$$

Ο άνθρωπος ασκεί στη ράβδο την κάθετη δύναμη $\vec{N}'$ που είναι η αντίδραση της $\vec{N}$. Ισχύει επομένως:

$$N' = w$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα $y'y'$ προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = N' + F \Rightarrow$$

$$N_1 + N_2 = 3w \quad (1)$$

Προκύπτει:

$$\Sigma \tau_{\Delta} = 0 \Rightarrow F \frac{L}{4} + N_2 \frac{L}{2} - N' \frac{3L}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$2w \frac{L}{4} + N_2 \frac{L}{2} - w \frac{3L}{4} = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{w}{2}$$

Από τη σχέση (1) επίσης έχουμε:

$$N_1 = \frac{5w}{2}$$

B2. Α. Σωστή απάντηση είναι η **α**).

Δικαιολόγηση

$$v_1 = v_{v.1} = v_{(I)} = v_{\pi p.(T)} = \omega_{(T)} r \Rightarrow$$

$$v_1 = \omega_{(T)} r \quad (1)$$

$$v_{(H)} = v_{v.2} = v_{(\Theta)} = v_{\pi p.(\Delta)} + v_{cm.(\Delta)} \Rightarrow$$

$$v_{\pi p.(T)} = v_{\pi p.(\Delta)} + v_{cm.(\Delta)} \Rightarrow$$

(I)

$$\omega_{(T)} r = v_{\pi p.(\Delta)} + v_{cm.(\Delta)} \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{\text{yp.}(\Delta)} + \mathbf{v}_{\text{cm.}(\Delta)} \quad (2)$$

$$v_{(Z)} = v_{v.3} = v_{(E)} = v_{cm.(\Delta)} - v_{yp.(\Delta)} \Rightarrow v_{(Z)=0}$$

$$0 = v_{\text{cm.}(\Delta)} - v_{\gamma p.(\Delta)} \Rightarrow v_{\text{cm.}(\Delta)} = v_{\gamma p.(\Delta)} \quad (3)$$

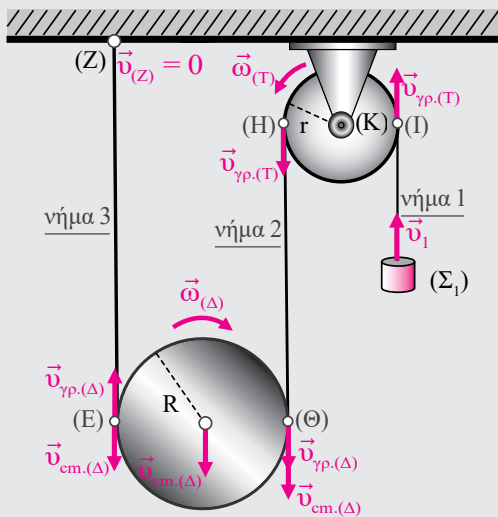
$$(2) \Rightarrow v_1 = 2v_{\text{cm}(\Delta)} \Rightarrow \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = \frac{\Delta(2v_{\text{cm}(\Delta)})}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta t} = 2 \frac{\Delta v_{\text{cm.}(\Delta)}}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_1 = 2\alpha_{\text{cm.}(\Delta)} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\text{cm.}(\Delta)} = \frac{\alpha_1}{2}$$

Β. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση



$$(3) \Rightarrow v_{\text{cm.}(\Delta)} = v_{\gamma p.(\Delta)} \Rightarrow \frac{v_1}{2} = v_{\gamma p.(\Delta)} \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{\omega_{(T)}r}{2} = \omega_{(\Delta)}R \Rightarrow \frac{\omega_{(T)}r}{2} = \omega_{(\Delta)}2r \Rightarrow$$

$$\omega_{(\Delta)} = \frac{\omega_{(T)}}{4} \Rightarrow \frac{\Delta \omega_{(\Delta)}}{\Delta t} = \frac{\Delta \left(\frac{\omega_{(T)}}{4} \right)}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma_{\text{ov.}(\Delta)}} = \frac{\alpha_{\gamma_{\text{ov.}(T)}}}{4} \Rightarrow$$

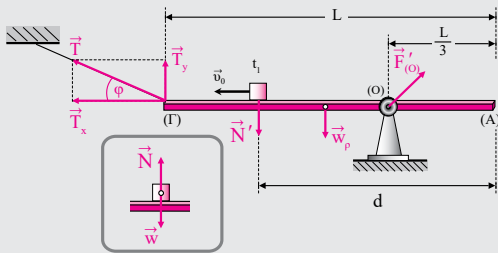
$$\frac{1}{2} \alpha_{\gamma_{\text{ov.}(\Delta)}} \Delta t^2 = \frac{\frac{1}{2} \alpha_{\gamma_{\text{ov.}(T)}} \Delta t^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Delta\theta_{(\Delta)} = \frac{\Delta\theta_{(T)}}{4} \Rightarrow \frac{\Delta\theta_{(\Delta)}}{2\pi} = \frac{\Delta\theta_{(T)}}{4 \cdot 2\pi} \Rightarrow$$

$$N_{(\Delta)} = \frac{N_{(T)}}{4}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση



Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_1 που σπάει το νήμα, το σώμα (Σ) έχει διανύσει απόσταση d πάνω στη ράβδο. Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο και στο σώμα (Σ) (πλαίσιο).

Από την ισορροπία του σώματος (Σ) στον άξονα y , έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w \Rightarrow N = mg$$

Η ράβδος από το σώμα (Σ) δέχεται δύναμη $\vec{N}'$ για την οποία ισχύει $N' = N = mg$ (δράση – αντίδραση). Οριακά, τη στιγμή που κόβεται το νήμα η ράβδος ισορροπεί.

Ισορροπία ράβδου (θετική φορά ροπών η αντισωρολογιακή):

$$\Sigma \tau_{(0)} = 0 \Rightarrow \tau_{T_x} + \tau_{T_y} + \tau_{N'} + \tau_{w_\rho} + \tau_{F_{(0)}} = 0 \Rightarrow$$

$$0 - T_y \cdot \left(L - \frac{L}{3} \right) + N' \cdot \left(d - \frac{L}{3} \right) + Mg \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3} \right) + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 -T \cdot \eta \mu 30^\circ \cdot \frac{2L}{3} + mg \cdot \left(d - \frac{L}{3}\right) + Mg \cdot \frac{L}{6} &= 0 \Rightarrow \\
 -T \frac{1}{2} \cdot \frac{2L}{3} + mg \cdot \left(d - \frac{L}{3}\right) + 6mg \cdot \frac{L}{6} &= 0 \Rightarrow \\
 -T \cdot \frac{L}{3} + mg \cdot \left(d - \frac{L}{3}\right) + mgL &= 0(1)
 \end{aligned}$$

Τη στιγμή που το νήμα σπάει, η τάση του νήματος είναι ίση με το όριο θραύσεως, άρα $T = T_{\theta p.} = 4mg$ οπότε η σχέση (1) γίνεται:

$$\begin{aligned}
 -4mg \cdot \frac{L}{3} + mg \cdot \left(d - \frac{L}{3}\right) + mgL &= 0 \Rightarrow \\
 -\frac{4L}{3} + d - \frac{L}{3} + L &= 0 \Rightarrow d = \frac{2L}{3}
 \end{aligned}$$

Το σώμα (Σ) εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση οπότε για τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$t_1 = \frac{d}{v_0} \Rightarrow t_1 = \frac{2L}{3v_0}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει:

$$\eta \mu \phi = \frac{h}{s_{cm}} \Rightarrow s_{cm} = \frac{h}{\eta \mu \phi} \Rightarrow s_{cm} = 2m$$

Για το μέτρο της επιβράδυνσης του κέντρου μάζας της σφαίρας, προκύπτει:

$$s_{cm} = \frac{v_{cm,0}^2}{2\alpha_{cm}} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{v_{cm,0}^2}{2s_{cm}} \Rightarrow \alpha_{cm} = 1 \frac{m}{s^2}$$

Γ2. Η σφαίρα κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει, επομένως ισχύει:

$$s_{cm} = R \cdot \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{s_{cm}}{R} \Rightarrow \Delta\theta = 4\text{rad}$$

Για το συνολικό αριθμό των περιστροφών έχουμε:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{2}{\pi} \pi \epsilon\rho.$$

Γ3. Ισχύει:

$$\eta \mu \phi = \frac{h'}{s'_{cm}} \Rightarrow s'_{cm} = \frac{h'}{\eta \mu \phi} \Rightarrow s'_{cm} = 1,5m$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 s'_{cm} &= v_{cm,0} t_1 - \frac{1}{2} \alpha_{cm} t_1^2 \Rightarrow \\
 1,5 &= 2t_1 - 0,5t_1^2 \Rightarrow t_1 = 1s
 \end{aligned}$$

Επίσης, ισχύει:

$$v_{cm,1} = v_{cm,0} - \alpha_{cm} t_1 \Rightarrow v_{cm,1} = 1 \frac{m}{s}$$

Για το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας τη χρονική στιγμή t_1 , τελικά, προκύπτει:

$$\omega_1 = \frac{v_{cm,1}}{R} \Rightarrow \omega_1 = 2 \frac{\text{rad}}{s}$$

Γ4. Βρίσκουμε τη χρονική στιγμή που ακινητοποιείται η σφαίρα. Προκύπτει:

$$0 = v_{cm,0} - \alpha_{cm} t_{ολ} \Rightarrow t_{ολ} = \frac{v_{cm,0}}{\alpha_{cm}} \Rightarrow t_{ολ} = 2s$$

Υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας 1,5 s πριν ακινητοποιηθεί. Έχουμε:

$$v_{cm} = v_{cm,0} - \alpha_{cm} (t_{ολ} - 1,5) \Rightarrow v_{cm} = 1,5 \frac{m}{s}$$

Για το σημείο (Ζ) έχουμε:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{cm} + \vec{\alpha}_\epsilon + \vec{\alpha}_\kappa \Rightarrow \vec{\alpha} = 2\vec{\alpha}_{cm} + \vec{\alpha}_\kappa \Rightarrow$$

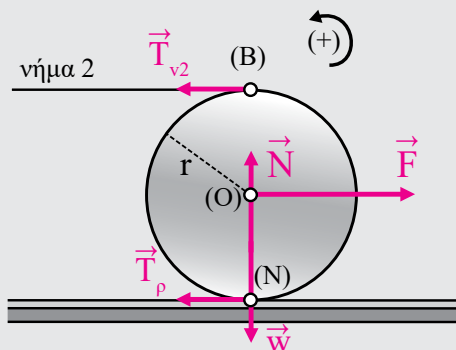
$$\alpha = \sqrt{(2\alpha_{cm})^2 + \left(\frac{v_{cm}^2}{R}\right)^2} \Rightarrow \alpha = \sqrt{24,25} \frac{m}{s^2}$$

ΘΕΜΑ Δ

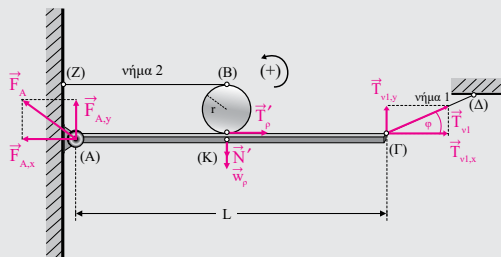
Δ1. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που δέχεται ο τροχός.

Αφού αυτός ισορροπεί, θα πρέπει η συνισταμένη των ροπών, ως προς οποιοδήποτε σημείο του, να είναι μηδέν, άρα και ως προς το σημείο (Ν) επαφής του τροχού με τη ράβδο. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma \tau_{(N)} = 0 &\Rightarrow \tau_N + \tau_w + \tau_{T_{v2}} + \tau_{T_p} + \tau_F = 0 \Rightarrow \\ &+ T_{v2} \cdot 2R - F \cdot R = 0 \Rightarrow \\ T_{v2} &= \frac{F}{2} \Rightarrow T_{v2} = 5N\end{aligned}$$



Δ2. Στο ακόλουθο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος.



Οι δυνάμεις $\vec{N}'$ και $\vec{T}_p$ είναι οι αντιδράσεις των δυνάμεων που δέχεται ο τροχός από τη ράβδο. Γι' αυτές ισχύουν: $N' = N$ και $T_p' = T_p$

Από την ισορροπία του τροχού στον $y'y$ άξονα έχουμε $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w = mg = 40N$

Οπότε $N' = N = 40N$

Ομοίως, από την ισορροπία του τροχού στον $x'x$ άξονα έχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x = 0 &\Rightarrow F = T_{v2} + T_p \Rightarrow \\ T_p &= F - T_{v2} \Rightarrow T_p = 5N \\ \text{Οπότε } T_p' &= T_p = 5N\end{aligned}$$

Αφού η ράβδος ισορροπεί, θα πρέπει η συνισταμένη των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο της να είναι μηδέν, άρα και ως προς το σημείο (A) που είναι αρθρωμένη με τον κατακόρυφο τοίχο.

Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma \tau_{(A)} = 0 &\Rightarrow \\ \tau_{N'} + \tau_{w_p} + \tau_{T_{v1,x}} + \tau_{T_{v1,y}} + \tau_{T_p'} + \tau_{F_A} &= 0 \Rightarrow \\ -N' \cdot \frac{L}{2} - Mg \cdot \frac{L}{2} + T_{v1,y} \cdot L &= 0 \Rightarrow T_{v1,y} = 30N \\ \text{Όμως} \\ T_{v1,y} = T_{v1} \cdot \eta\mu\phi &\Rightarrow T_{v1} = \frac{T_{v1,y}}{\eta\mu\phi} \Rightarrow T_{v1} = 50N \\ T_{v1,x} = T_{v1} \cdot \sigma\upsilon\nu\phi &\Rightarrow T_{v1,x} = 40N\end{aligned}$$

Από την ισορροπία της ράβδου στον $y'y$ άξονα, έχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma F_y = 0 &\Rightarrow F_{A,y} + T_{v1,y} = N' + w_p \Rightarrow \\ F_{A,y} &= 30N\end{aligned}$$

Από την ισορροπία της ράβδου στον $x'x$ άξονα, έχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x = 0 &\Rightarrow F_{A,x} = T_{v1,x} + T_p' \Rightarrow \\ F_{A,x} &= 45N\end{aligned}$$

Για το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση ισχύει:

$$\begin{aligned}F_A &= \sqrt{F_{A,x}^2 + F_{A,y}^2} = \sqrt{45^2 + 30^2} \Rightarrow \\ F_A &= 15\sqrt{13}N \Rightarrow F_A = 54N\end{aligned}$$

Δ3. Τη χρονική στιγμή t_1 που ο τροχός φτάνει στο άκρο (Γ) της ράβδου έχει διαγράψει $\frac{4}{\pi}$ περιστροφές και επειδή κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στη ράβδο ισχύει:

$$\begin{aligned}N &= \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{\Delta\theta \cdot r}{2\pi r} \Rightarrow N = \frac{\Delta x}{2\pi r} \Rightarrow \\ \Delta x &= N \cdot 2\pi r \Rightarrow \Delta x = 0,8m\end{aligned}$$

Η απόσταση που διανύει ο τροχός από το μέσο της ράβδου (K) και μέχρι να φτάσει στο άκρο της (Γ), υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta x = \frac{L}{2} \Rightarrow L = 2 \cdot \Delta x \Rightarrow L = 1,6\text{m}$$

Δ4. Η κίνηση του τροχού είναι ομαλά επιταχυνόμενη. Για τη μεταφορική του κίνηση, από το μέσο της ράβδου (Κ) και μέχρι να φτάσει στο άκρο της (Γ), ισχύει:

$$\Delta x = \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2\Delta x}{\alpha_{\text{cm}}}} \Rightarrow t_1 = 0,8\text{s}$$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$v_{\text{cm}} = \alpha_{\text{cm}} t_1 \Rightarrow v_{\text{cm}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5ο Διαγώνισμα (Δ5)

ΘΕΜΑ Α

A1. δ), A2. δ), A3. γ), A4. δ)
A5. α) Σ, β) Σ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Α. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Έχουμε:

$$\omega = \omega_{\delta} = 2\pi f_{\delta} \Rightarrow$$

$$\omega = 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Προκύπτει:

$$\frac{K_{\text{max}}}{U_{\text{max}}} = \frac{\frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2}{\frac{1}{2} k A^2} \Rightarrow \frac{K_{\text{max}}}{U_{\text{max}}} = \frac{\frac{1}{2} m \omega^2 A^2}{\frac{1}{2} k A^2} \Rightarrow$$

$$\frac{K_{\text{max}}}{U_{\text{max}}} = \frac{m \omega^2}{k} \Rightarrow$$

$$\frac{K_{\text{max}}}{U_{\text{max}}} = 0,64$$

B. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

$$\text{Ισχύει: } f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f_0 = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}$$

Το ζητούμενο ποσοστό επί τοις εκατό είναι:

$$\Pi\% = \frac{f_0 - f_{\delta}}{f_{\delta}} 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 25\%$$

B2. Α. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Ισχύει:

$$K = \frac{3}{4} E_T$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης, έχουμε:

$$K + U = E_T \Rightarrow U = E_T - \frac{3}{4} E_T \Rightarrow U = \frac{1}{4} E_T$$

Τελικά προκύπτει:

$$\frac{U}{K} = \frac{\frac{1}{4} E_T}{\frac{3}{4} E_T} \Rightarrow \frac{U}{K} = \frac{1}{3}$$

B. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Προκύπτει:

$$\frac{U}{K} = \frac{U}{E_T - U} \Rightarrow \frac{U}{K} = \frac{\frac{1}{2} D x^2}{\frac{1}{2} D A^2 - \frac{1}{2} D x^2} \Rightarrow$$

$$\frac{U}{K} = \frac{\frac{3A^2}{4}}{\frac{A^2}{4}} \Rightarrow \frac{U}{K} = 3$$

B3. Α. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Ισχύει:

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{\frac{1}{2} D A_1^2}{\frac{1}{2} D A_0^2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_0} = \frac{\frac{A_0^2}{16}}{A_0^2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_0} = \frac{1}{16}$$

Β. Σωστή απάντηση είναι η β).

Για το έργο της δύναμης αντίστασης έχουμε:

$$W_{F_{\text{αντ}}} = E_1 - E_0 \Rightarrow W_{F_{\text{αντ}}} = \frac{E_0}{16} - E_0 \Rightarrow$$

$$W_{F_{\text{αντ}}} = -\frac{15}{16} \cdot \frac{1}{2} DA_0^2 \Rightarrow$$

$$W_{F_{\text{αντ}}} = -\frac{15}{32} \cdot DA_0^2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} \text{ s}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$|F_{\text{max}}| = DA = m\omega^2 A \Rightarrow$$

$$A = \frac{|F_{\text{max}}|}{m\omega^2} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

Η απόσταση των δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσης του σώματος είναι $d = 2A \Rightarrow$
 $d = 0,4 \text{ m}$

Γ2. $F = -Dx \Rightarrow$ αν $F < 0 \Rightarrow x > 0$ οπότε τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσης $x = +A$.

$$x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0) \xrightarrow{t=0, x=A} A = A\eta\mu\phi_0 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\phi_0 = 1 \xrightarrow{0 \leq \phi_0 < 2\pi} \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$v = v_{\text{max}} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow$$

$$v = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow$$

$$v = 2\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{S.I.})$$

Γ3. Προκύπτει:

$$x = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{t=t_1 = \frac{7\pi}{30}} \Rightarrow$$

$$x_1 = 0,2\eta\mu\left(10 \cdot \frac{7\pi}{30} + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x_1 = 0,1 \text{ m}$$

$$\Delta x = x_{\text{τελ.}} - x_{\text{αρχ.}} \Rightarrow \Delta x = -0,1 \text{ m}$$

$$t_1 = \frac{7\pi}{30} \text{ s} \quad \text{και} \quad T = \frac{\pi}{5} \text{ s} = \frac{6\pi}{30} \text{ s} \quad \text{οπότε}$$

$$t_1 = T + \frac{T}{6} \quad \text{άρα} \quad S = 4A + A - x_1 \Rightarrow S = 0,9 \text{ m}$$

Γ4. $\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v = -D \cdot x \cdot v$

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} =$$

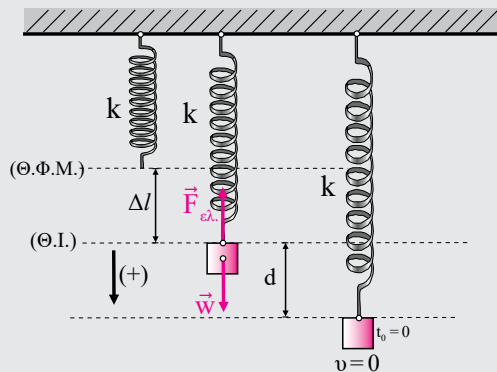
$$= \pm \omega \sqrt{A^2 - \left(-\frac{A}{2}\right)^2} = \pm \frac{\omega A \sqrt{3}}{2} = \pm \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση $x = -\frac{A}{2}$ της ταλάντωσης και επιταχύνεται, κινείται προς τη Θ.Ι. άρα $v > 0$, οπότε $v = \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Τελικά: $\frac{dK}{dt} = -m\omega^2 \cdot x \cdot v \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 10\sqrt{3} \frac{\text{J}}{\text{s}}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



Στη Θ.Ι. ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ}} = w \Rightarrow k \cdot \Delta l = mg \Rightarrow$$

$$\Delta l = \frac{mg}{k} \Rightarrow \Delta l = 0,1 \text{ m}$$

Έχουμε:

$$A = d \Rightarrow A = 0,1 \text{ m}$$

Όταν το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά 5cm, η απομάκρυνσή του είναι:

$$x_1 = -\frac{A}{2} \Rightarrow x_1 = -0,05\text{m}$$

Από την εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης έχουμε:

$$K + U = E_T \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow$$

$$|v_1| = \sqrt{\frac{kA^2 - kx_1^2}{m}} \Rightarrow$$

$$|v_1| = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m}{s}$$

Δ2. Ισχύει:

$$\Delta l_{\alpha\rho\chi} = A + \Delta l \Rightarrow \Delta l_{\alpha\rho\chi} = 0,2\text{m} \text{ και } \Delta l_{\tau\epsilon\lambda} = 0$$

Για το έργο της δύναμης του ελατηρίου, προκύπτει:

$$W_{F_{\epsilon\lambda}} = U_{\epsilon\lambda, \alpha\rho\chi} - U_{\epsilon\lambda, \tau\epsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$W_{F_{\epsilon\lambda}} = \frac{1}{2}k \cdot \Delta l_{\alpha\rho\chi}^2 - \frac{1}{2}k \cdot \Delta l_{\tau\epsilon\lambda}^2 \Rightarrow$$

$$W_{F_{\epsilon\lambda}} = 4\text{J}$$

Δ3. Ισχύει:

$$\frac{dU_{\epsilon\lambda}}{dt} = -F_{\epsilon\lambda} |v_1| \Rightarrow \frac{dU_{\epsilon\lambda}}{dt} = -k \cdot \Delta l' \cdot |v_1| \Rightarrow$$

$$\frac{dU_{\epsilon\lambda}}{dt} = -5\sqrt{3} \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Δ4. i)

Ισχύει:

$$\vec{\Sigma}\vec{F} = -k\vec{x} \Rightarrow \vec{F}_{\epsilon\lambda} + \vec{w} = -k\vec{x} \Rightarrow$$

$$F_{\epsilon\lambda} + w = -kx \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} = -mg - kx \Rightarrow$$

$$F_{\epsilon\lambda} = -20 - 200x (\text{S.I.}) \text{ για}$$

$$-0,1\text{m} \leq x \leq 0,1\text{m}$$

ii) Ισχύει:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, $x = +A$ επομένως:

$$A = A \eta\mu\phi_0 \text{ ή } \eta\mu\phi_0 = 1(1)$$

Επειδή $0 \leq \phi_0 < 2\pi \text{ rad}$ από τη σχέση (1) προ-

$$\text{κύπτει: } \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Επομένως, η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

$$x = 0,1 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{S.I.})$$

Τελικά έχουμε:

$$F_{\epsilon\lambda} = -20 - 200x \Rightarrow$$

$$F_{\epsilon\lambda} = -20 - 200 \cdot 0,1 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$F_{\epsilon\lambda} = -20 - 20 \cdot \sigma\upsilon\nu 10t (\text{S.I.}).$$

6ο Διαγώνισμα (Δ6)

ΘΕΜΑ Α

A1. α), A2. α), A3. δ), A4. δ)
A5. α) Σ, **β)** Λ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **γ**).

Δικαιολόγηση

Από το διάγραμμα της ταχύτητας με τον χρόνο που δίνεται, προκύπτουν τα εξής για τα δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 :

$$v_{\max(1)} = 4v_{\max(2)} (1) \text{ και } T_2 = 2T_1 (2)$$

Αφού οι ολικές ενέργειες είναι ίσες, έχουμε:

$$E_{\text{ολ.}(1)} = E_{\text{ολ.}(2)} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1 v_{\max(1)}^2 = \frac{1}{2}m_2 v_{\max(2)}^2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$m_1 (4v_{\max(2)})^2 = m_2 v_{\max(2)}^2 \Rightarrow$$

$$m_2 = 16m_1 (3)$$

Για τις σταθερές k_1 και k_2 των δύο ελατηρίων που είναι δεμένα τα σώματα Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα, ισχύει:

$$k_1 = m_1 \omega_1^2 \text{ και } k_2 = m_2 \omega_2^2$$

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{k_2} &= \frac{m_1 \omega_1^2}{m_2 \omega_2^2} = \frac{m_1 \left(\frac{2\pi}{T_1} \right)^2}{16m_1 \left(\frac{2\pi}{T_2} \right)^2} = \\ &= \frac{T_2^2}{16T_1^2} = \frac{4T_1^2}{16T_1^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$k_1 = \frac{k_2}{4}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Συγκρίνοντας τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος με τον γενικό τύπο $x = A\eta\mu\omega t$, προκύπτουν ότι το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος είναι $A = 0,2\text{m}$ και η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι $\omega = 12\text{rad/s}$.

Για τη συχνότητα της ταλάντωσης έχουμε:

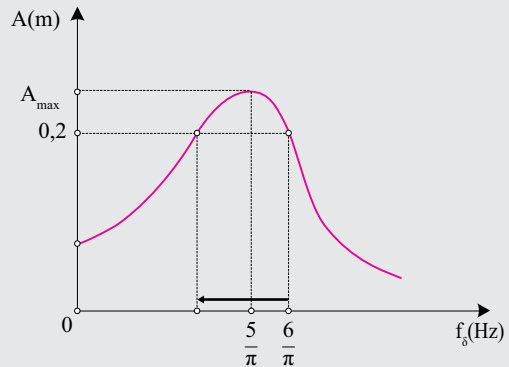
$$f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = \frac{6}{\pi} \text{ Hz}$$

Επειδή το σώμα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση η συχνότητα της ταλάντωσης είναι ίση με τη συχνότητα του διεγέρτη, δηλαδή της εξωτερικής περιοδικής δύναμης, άρα:

$$f_\delta = \frac{6}{\pi} \text{ Hz}.$$

Για την ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης έχουμε:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f_0 = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}$$



Μειώνοντας συνεχώς τη συχνότητα της εξωτερικής περιοδικής δύναμης (ξεκινώντας από την αρχική της τιμή), το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης από εκείνη τη στιγμή αρχικά αυξάνεται και στη συνέχεια μειώνεται, όπως προκύπτει και από το διάγραμμα πλάτους συχνότητας.

B3. Α. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Προκύπτει:

$$\frac{U}{K} = \frac{E_T - U}{K} \Rightarrow \frac{U}{K} = \frac{\frac{1}{2}mv_{\max}^2 - \frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv^2} \Rightarrow$$

$$\frac{U}{K} = \frac{v_{\max}^2 - \frac{v^2}{4}}{\frac{v^2}{4}} \Rightarrow \frac{U}{K} = 3$$

Β. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Προκύπτει:

$$\frac{U}{K} = \frac{E_T \eta \mu^2 \omega t}{E_T \sigma \nu \omega t} \Rightarrow \frac{U}{K} = \frac{E_T \eta \mu^2 \frac{2\pi}{T} \frac{T}{12}}{E_T \sigma \nu^2 \frac{2\pi}{T} \frac{T}{12}} \Rightarrow$$

$$\frac{U}{K} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} \Rightarrow \frac{U}{K} = \frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Λόγω του συντονισμού έχουμε:

$$\omega_0 = \omega \Rightarrow \omega_0 = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$k = m\omega_0^2 \Rightarrow k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Γ2. Στην κατάσταση συντονισμού έχουμε:

$$F_{\text{αντ}} = -F_\delta \Rightarrow F_{\text{αντ}} = -8\sigma\upsilon\nu 5t \text{ (S.I.)}$$

Προκύπτει ότι:

$$F_{\text{αντ,max}} = 8\text{N}$$

Ισχύει όμως:

$$F_{\text{αντ,max}} = b v_{\text{max}} \Rightarrow F_{\text{αντ,max}} = b\omega A \Rightarrow$$

$$b = \frac{F_{\text{αντ,max}}}{\omega A} \Rightarrow b = 2 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Γ3. Έχουμε:

$$F_{\text{αντ}} = -8\sigma\upsilon\nu 5t \Rightarrow -bv = -8\sigma\upsilon\nu 5t \Rightarrow \\ -2v = -8\sigma\upsilon\nu 5t \Rightarrow v = 4\sigma\upsilon\nu 5t \text{ (S.I.)}$$

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ βρίσκουμε την ταχύτητα του σώματος. Ισχύει:

$$v_0 = 4\sigma\upsilon\nu 5t_0 \Rightarrow v_0 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$v_1 = 4\sigma\upsilon\nu 5t_1 \Rightarrow v_1 = 2\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow \Delta K = -8 \text{ J}$$

Γ4. Ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται ενέργεια στο σύστημα είναι:

$$\frac{dW_{F_\delta}}{dt} = F_\delta v_1 \Rightarrow \frac{dW_{F_\delta}}{dt} = -F_{\text{αντ}} v_1 \Rightarrow$$

$$\frac{dW_{F_\delta}}{dt} = b v_1^2 \Rightarrow \frac{dW_{F_\delta}}{dt} = +24 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Ο ρυθμός με τον οποίο αφαιρείται ενέργεια από το σύστημα είναι:

$$\frac{dW_{F_{\text{αντ}}}}{dt} = F_{\text{αντ}} v_1 \Rightarrow \frac{dW_{F_{\text{αντ}}}}{dt} = -b v_1^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dW_{F_{\text{αντ}}}}{dt} = -24 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Μετά το κόψιμο του νήματος, το (Σ_1) εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ενώ το (Σ_2) εκτελεί ελεύθερη πτώση. Για τον χρόνο πτώσης t_1 του (Σ_2) , μέχρι να φτάσει στο έδαφος, έχουμε:

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,2\sqrt{10}\text{s}$$

Στον ίδιο χρόνο το (Σ_1) ακινητοποιείται στιγμιαία για 2η φορά μετά το κόψιμο του νήματος, άρα:

$$t_1 = T \Rightarrow T = 0,2\sqrt{10}\text{s} = 0,2\pi\text{s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

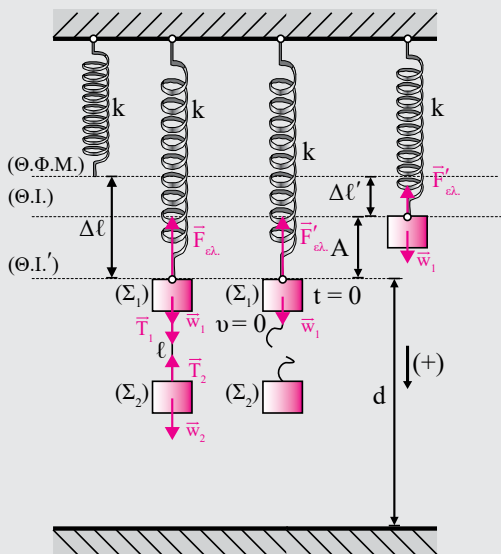
Για τη σταθερά του ελατηρίου έχουμε:

$$k = m_1 \omega^2 \Rightarrow k = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Δ2. Όταν κόψουμε το νήμα, το σώμα (Σ_1) ξεκινάει να κινείται προς τα πάνω ($F_{\text{ελ}} > w_1$) και επειδή εκείνη τη στιγμή η ταχύτητά του είναι $v = 0$, η θέση αυτή γίνεται η κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του. Τη χρονική στιγμή t_1 που το σώμα (Σ_1) ακινητοποιείται στιγμιαία για 2η φορά μετά το κόψιμο του νήματος, αυτό θα βρίσκεται στην αρχική του θέση αφού θα έχει κάνει μια πλήρη ταλάντωση, οπότε για την απόσταση d που απέχουν τότε τα δύο σώματα ισχύει:

$$d = l + h \Rightarrow l = d - h \Rightarrow l = 0,4 \text{ m}$$

Δ3.



Στην αρχική κατάσταση ισορροπίας των 2 σωμάτων ισχύει:

$$(\Theta.Ι.): \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w_{1,2} \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l = (m_1 + m_2)g \Rightarrow \Delta l = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} \Rightarrow$$

$$\Delta l = 0,3\text{m}$$

Στην κατάσταση ισορροπίας της ταλάντωσης του σώματος (Σ_1) ισχύει:

$$(\Theta.Ι.): \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F'_{ελ} = w_1 \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l' = m_1 g \Rightarrow \Delta l' = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow \Delta l' = 0,1\text{m}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος (Σ_1) είναι: $A = \Delta l - \Delta l' = 0,2\text{m}$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$, $x = +A$ επομένως:

$$A = A \eta \mu \phi_0 \Rightarrow \eta \mu \phi_0 = 1(1)$$

Επειδή $0 \leq \phi_0 < 2\pi \text{ rad}$ από τη σχέση (1) προ-

κύπτει: $\phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

Επομένως, η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σώματος (Σ_1) είναι:

$$x = 0,2 \cdot \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) (\text{S.I.})$$

Δ4. Η επιτάχυνση του σώματος (Σ_2) είναι ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας. Άρα θέλουμε: $\alpha = g$

$$\alpha = -\omega^2 x \Rightarrow \alpha = -20 \cdot \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right)^{\alpha=10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow$$

$$10 = -20 \cdot \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{2} = \eta \mu \left(-\frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow$$

$$10t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} (1) \Rightarrow$$

$$10t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} (2)$$

Θέλουμε για πρώτη φορά μετά το κόψιμο του νήματος $\alpha = g$, άρα για $\kappa = 0$ στη σχέση (2) έχουμε:

$$t_2 = \frac{\pi}{15} \text{s}$$

Δ5. Για το σώμα (Σ_1) έχουμε:

$$\left(\frac{\Delta K}{\Delta t} \right)_{\Sigma_1} = \Sigma F \cdot v = -kx \cdot v =$$

$$= -200 \cdot 0,2 \cdot \eta \mu \left(10t_2 + \frac{\pi}{2} \right) \cdot 2\sigma \nu \nu \left(10t_2 + \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= -200 \cdot 0,2 \cdot \eta \mu \left(10 \cdot \frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{2} \right) \cdot 2\sigma \nu \nu \left(10 \cdot \frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\Delta K}{\Delta t} \right)_{\Sigma_1} = -20\sqrt{3} \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Για το σώμα (Σ_2) έχουμε:

$$\left(\frac{\Delta K}{\Delta t} \right)_{\Sigma_2} = \Sigma F \cdot v = m_2 g \cdot g t_2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\Delta K}{\Delta t} \right)_{\Sigma_2} = \frac{80\pi \text{ J}}{3 \text{ s}}$$

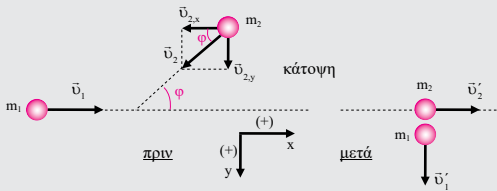
7ο Διαγώνισμα (Δ7)

ΘΕΜΑ Α

A1. γ), A2. γ), A3. δ), A4. β)
A5. α) Λ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η β).
Δικαιολόγηση



A.Δ.Ο. άξονας x:

$$\begin{aligned}\vec{p}_{ολ.(πριν),x} &= \vec{p}_{ολ.(μετά),x} \Rightarrow \\ m_1 u_1 - m_2 u_{2,x} &= m_2 u'_2 \Rightarrow \\ m_1 u_1 - m_2 u_2 \cdot \sin 53^\circ &= m_2 u'_2 \Rightarrow \\ 2m_2 u_1 - m_2 u_2 \cdot 0,6 &= m_2 u'_2 \Rightarrow \\ 2u_1 - 0,6u_2 &= u'_2 \Rightarrow \\ 2u_1 - 1,2u_1 &= u'_2 \Rightarrow \\ u'_2 &= 0,8u_1 \quad (1)\end{aligned}$$

A.Δ.Ο. άξονας y:

$$\begin{aligned}\vec{p}_{ολ.(πριν),y} &= \vec{p}_{ολ.(μετά),y} \Rightarrow \\ -m_2 u_{2,y} &= -m_1 u'_1 \Rightarrow \\ m_2 u_2 \cdot \eta\mu 53^\circ &= m_1 u'_1 \Rightarrow \\ m_2 u_2 \cdot 0,8 &= 2m_2 u'_1 \Rightarrow \\ 0,8u_2 &= 2u'_1 \Rightarrow u'_1 = 0,4u_2 \Rightarrow \\ u'_1 &= 0,8u_1 \quad (2)\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι τα μέτρα των τελικών ταχυτήτων των δύο σωμάτων m_1 και m_2 μετά την κρούση είναι ίσα $u'_1 = u'_2$ (3).

Για τα μέτρα των ορμών τους p'_1 και p'_2 μετά την κρούση, ισχύει:

$$p'_1 = m_1 u'_1 \Rightarrow p'_1 = 2m_2 u'_1 \quad (4)$$

$$p'_2 = m_2 u'_2 \Rightarrow p'_2 = m_2 u'_1 \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (4), (5) προκύπτει $p'_1 = 2p'_2$

B2. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Πλαστική κρούση:

$$A.Δ.Ο.: \vec{p}_{ολ.(πριν)} = \vec{p}_{ολ.(μετά)} \Rightarrow$$

$$m_2 v_0 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

$$V = v_{\max(1)} = \omega_1 A_1 \Rightarrow$$

$$A_1 = \frac{V}{\omega_1} = \frac{(1)}{\omega_1} \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$A_1 = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \quad (2)$$

Ελαστική κρούση: $u'_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_0 \quad (3)$

$$u'_1 = v_{\max(2)} = \omega_2 A_2 \Rightarrow$$

$$A_2 = \frac{u'_1}{\omega_2} = \frac{(3)}{\omega_2} \frac{2m_2 v_0}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$A_2 = \frac{2m_2 v_0}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{m_1}{k}} \quad (4)$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}}{\frac{2m_2 v_0}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{m_1}{k}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}}{\sqrt{\frac{m_1}{k}}} = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{m_1 + m_2}{k}}{\frac{m_1}{k}} = 3 \Rightarrow \frac{m_1 + m_2}{m_1} = 3 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

$$v_1 = v_{\max(1)} = \omega_1 d_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} d = \sqrt{\frac{k}{m}} d \quad (1)$$

$$v_2 = v_{\max(2)} = \omega_2 d_2 \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} 1,5d = 1,5 \sqrt{\frac{k}{m}} d \quad (2)$$

Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 συγκρούονται στη Θ.Ι. τους, αφού έχουν ίσες περιόδους:

$$T_1 = T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

$$\text{Α.Δ.Ο.: } \vec{p}_{\text{ολ. (πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ. (μετά)}} \Rightarrow$$

$$m_2 v_2 - m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow$$

$$V = \frac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$V = \frac{4m v_2 - m v_1}{5m} = \frac{4v_2 - v_1}{5} \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow}$$

$$V = \frac{4 \cdot 1,5 \sqrt{\frac{k}{m}} d - \sqrt{\frac{k}{m}} d}{5} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{k}{m}} d$$

Όμως:

$$V = v_{\max} = \omega A \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} d = \sqrt{\frac{D}{5m}} A \Rightarrow A = d$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2\Delta t = \frac{2\pi\sqrt{3}}{15} \text{ s},$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 5\sqrt{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$k = (m_1 + m_2) \omega^2 \Rightarrow m_2 = 1 \text{ kg}$$

$$K_{\max} = E_{\text{ολ.}} = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2K_{\max}}{k}} \Rightarrow$$

$$A = 0,2 \text{ m}$$

Γ2. Στη Θ.Ι. του σώματος Σ_1 ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} = w_1 \Rightarrow k \cdot \Delta l = m_1 g \Rightarrow$$

$$\Delta l = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow \Delta l = \frac{1}{30} \text{ m}$$

Στη Θ.Ι. του συσσωματώματος ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F'_{\epsilon\lambda} = w_1 + w_2 \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l' = (m_1 + m_2) g \Rightarrow$$

$$\Delta l' = \frac{(m_1 + m_2) g}{k} \Rightarrow \Delta l' = \frac{4}{30} \text{ m}$$

Για το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας της ταλάντωσης.

$$K + U = E_{\text{ολ.}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k (\Delta l' - \Delta l)^2 = E_{\text{ολ.}} \Rightarrow$$

$$|v| = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Γ3. Α.Δ.Ο.: $\vec{p}_{ολ.(πριν)} = \vec{p}_{ολ.(μετά)} \Rightarrow$

$$m_2 v_0 = (m_1 + m_2) v \Rightarrow$$

$$v_0 = \frac{(m_1 + m_2) v}{m_2} = 2 \frac{m}{s}$$

Θ.Μ.Κ.Ε.: $\Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow K_{τελ.} - K_{αρχ.} = W_w \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} m_2 v_0^2 = m_2 g h \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow$$

$$h = 0,2 \text{ m}$$

Γ4. $W_{F_{επ.}} = \Delta K = K_{τελ.} - K_{αρχ.} =$

$$= 0 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \Rightarrow W_{F_{επ.}} = -1,5 \text{ J}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $m_1 v_0 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow$

Α.Δ.Ο.: $\vec{p}_{ολ.(πριν)} = \vec{p}_{ολ.(μετά)} \Rightarrow$

$$V = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \Rightarrow V = 4 \frac{m}{s}$$

Δ2. $\Pi\% = \frac{K_{ολ.(πριν)} - K_{ολ.(μετά)}}{K_{ολ.(πριν)}} \cdot 100\% =$

$$= \left(1 - \frac{K_{ολ.(μετά)}}{K_{ολ.(πριν)}} \right) \cdot 100\% =$$

$$= \left(1 - \frac{\frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} \right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi\% = 75\%$$

Δ3. Επειδή η κρούση είναι ελαστική και ισχύει: $m_{1,2} = m_3$, τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες άρα $v'_{1,2} = 0$ και $v'_3 = 4 \text{ m/s}$.

$$v'_3 = v_{\max} = \omega A \Rightarrow v'_3 = \sqrt{\frac{k}{m_3}} A \Rightarrow A = 0,4 \text{ m}$$

Δ4. $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_3}{k}} = 0,2\pi \text{ s}$

$$t_1 = \frac{T}{2} \Rightarrow t_1 = 0,1\pi \text{ s}$$

Η κρούση γίνεται στη Θ.Ι. και τα σώματα πάλι ανταλλάσσουν ταχύτητες, άρα το σώμα Σ_3 μετά την κρούση σταματάει και το συσσωματώμα $(B - \Sigma_2)$ αποκτά ταχύτητα $v = 4 \frac{m}{s}$.

Η απόσταση του σώματος Σ_3 από το συσσωματώμα $(B - \Sigma_2)$ τη χρονική στιγμή $t_2 = (t_1 + 5) \text{ s}$ είναι $d = v \cdot \Delta t \Rightarrow d = 20 \text{ m}$.

8ο Διαγώνισμα (Δ8)

ΘΕΜΑ Α

A1. γ), A2. α), A3. γ), A4. δ)
A5. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Ισχύει:

$$\frac{\lambda}{2} = d \Rightarrow \lambda = 2d$$

Έχουμε:

$$\lambda = v_\delta T \Rightarrow 2d = v_\delta T \Rightarrow T = \frac{2d}{v_\delta}$$

Τελικά προκύπτει:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{2d}{2v_\delta} \Rightarrow \Delta t = \frac{d}{v_\delta}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α).**Δικαιολόγηση**

Ισχύει:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \Rightarrow \Delta t = \frac{r_2}{v_\delta} - \frac{r_1}{v_\delta} \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{4\lambda}{v_\delta} - \frac{\lambda}{v_\delta} \Rightarrow \Delta t = \frac{3\lambda}{v_\delta} \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{3v_\delta T}{v_\delta} \Rightarrow \Delta t = 3T$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β).**Δικαιολόγηση**

Η θέση του σημείου (Μ) είναι:

$$x_M = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{12} \Rightarrow x_M = \frac{5\lambda}{6}$$

Για το πλάτος του σημείου (Μ) έχουμε:

$$A_M = 2A \left| \sin 2\pi \frac{x_M}{\lambda} \right| \Rightarrow$$

$$A_M = 2A \left| \sin 2\pi \frac{5\lambda}{6} \right| \Rightarrow$$

$$A_M = 2A \left| \sin \frac{5\pi}{3} \right| \Rightarrow A_M = A$$

Τελικά προκύπτει:

$$d = 2A_M \Rightarrow d = 2A$$

ΘΕΜΑ Γ**Γ1. Συγκρίνουμε την εξίσωση του κύματος:**

$$y = 0,1\eta\mu 2\pi(t - 0,5x) \text{ (S.I.)}$$

με τη γενική μορφή $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$.

Για το μήκος κύματος, ισχύει:

$$\frac{x}{\lambda} = 0,5x \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Για την περίοδο, προκύπτει:

$$\frac{t}{T} = t \Rightarrow T = 1\text{s}$$

Η συχνότητα είναι:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 1 \text{ Hz}$$

Γ2. Υπολογίζουμε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$t_\kappa = \frac{x_\kappa}{v_\delta} \Rightarrow t_\kappa = 4\text{s}$$

Προκύπτει:

$$y_\kappa = 0,1\eta\mu 2\pi(t - 0,5x_\kappa) \Rightarrow$$

$$y_\kappa = 0,1\eta\mu 2\pi(4,25 - 0,5 \cdot 8) \Rightarrow$$

$$y_\kappa = 0,1\text{m}$$

Γ3. Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_1 . Ισχύει:

$$t_1 = t_\kappa + \frac{5T}{4} \Rightarrow t_1 = 5,25\text{s}$$

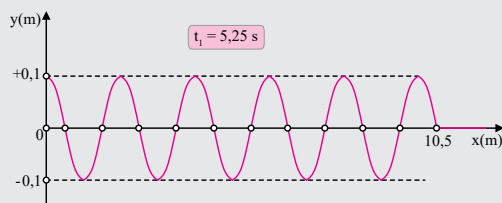
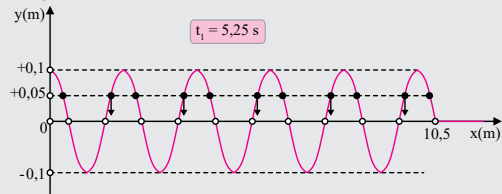
Έχουμε:

$$d_1 = v_\delta t_1 \Rightarrow d_1 = 10,5\text{m}$$

Προκύπτει:

$$\frac{d_1}{\lambda} = \frac{10,5}{2} \Rightarrow d_1 = 5,25\lambda$$

Το ζητούμενο στιγμιότυπο είναι το εξής:

**Γ4.****i)** 11 σημεία**ii)** 5 σημεία

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει:

$$t_2 - t_1 = 1,5T \Rightarrow \frac{r_2}{v_\delta} - \frac{r_1}{v_\delta} = 1,5T \Rightarrow$$

$$r_2 - r_1 = 1,5\lambda \Rightarrow r_2 - r_1 = 0,6\text{m}(1)$$

Επίσης ισχύει:

$$r_2 + r_1 = d \Rightarrow r_2 + r_1 = 1,4\text{m}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$r_1 = 0,4\text{m} \text{ και } r_2 = 1\text{m}$$

Δ2. Έχουμε:

$$r_1' - r_2' = N\lambda(3) \text{ και } r_1' + r_2' = d(4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$r_1' = \frac{N}{2}\lambda + \frac{d}{2}$$

Προκύπτει ότι:

$$0 \leq r' \leq d \Rightarrow 0 \leq \frac{N}{2}\lambda + \frac{d}{2} \leq d \Rightarrow$$

$$0 \leq 0,2N + 0,7 \leq 1,4 \Rightarrow$$

$$-3,5 \leq N \leq 3,5$$

Άρα $N = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ άρα υπάρχουν 7 σημεία στο ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$ που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος μετά την έναρξη της συμβολής σε αυτά.

Δ3. Έχουμε:

$$t_1 = \frac{r_1}{v_\delta} \Rightarrow t_1 = 4\text{s}$$

Και:

$$t_2 = \frac{r_2}{v_\delta} \Rightarrow t_2 = 10\text{s}$$

Ισχύει:

$$T = \frac{\lambda}{v_\delta} \Rightarrow T = 4\text{s}$$

Για $t < 4\text{s}$ ισχύει $y_\Sigma = 0$.

Για $4\text{s} \leq t < 10\text{s}$ ισχύει:

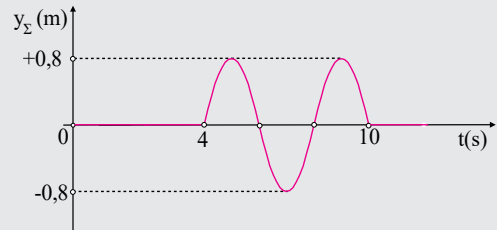
$$y_\Sigma = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$y_\Sigma = 0,8\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{4} - \frac{0,4}{0,4}\right) \Rightarrow$$

$$y_\Sigma = 0,8\eta\mu 2\pi(0,25t - 1)(\text{S.I})$$

Για $t \geq 10\text{s}$ ισχύει $y_\Sigma = 0$.

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



Δ4. Αρχικά, για τη συχνότητα έχουμε:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 0,25\text{Hz}$$

Επίσης, ισχύει:

$$|r_1 - r_2| = (2N + 1)\frac{\lambda'}{2} \Rightarrow$$

$$|r_1 - r_2| = (2N + 1)\frac{v_\delta}{2f'} \Rightarrow$$

$$f' = \frac{(2N + 1)v_\delta}{2 \cdot |r_1 - r_2|} \Rightarrow$$

$$f' = \frac{(2N + 1)}{12} \text{ και για } N = 2, f' = \frac{5}{12}\text{Hz}$$

Για το ζητούμενο ποσοστό επί τοις εκατό προκύπτει:

$$\Pi(\%) = \frac{f' - f}{f} 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = \frac{200}{3}\%$$

9ο Διαγώνισμα (Δ9)

ΘΕΜΑ Α

A1. γ), A2. β), A3. γ), A4. δ)
A5. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Για την περίοδο, έχουμε:

$$T = \frac{\lambda}{v_\delta} \Rightarrow T = 4s$$

Ισχύει:

$$t_1 = \frac{x_K}{v_\delta} + \frac{5T}{4} \quad (1)$$

Επίσης ισχύει:

$$t_1 = \frac{x_\Sigma}{v_\delta} + \frac{7T}{4} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$\frac{x_K}{v_\delta} + \frac{5T}{4} = \frac{x_\Sigma}{v_\delta} + \frac{7T}{4} \Rightarrow$$

$$x_\Sigma = v_\delta \left(\frac{x_K}{v_\delta} - \frac{T}{2} \right) \Rightarrow x_\Sigma = +3,5m$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η **β**).

Δικαιολόγηση

Ισχύει:

$$|r_1 - r_2| = N\lambda \Rightarrow |\lambda - 4\lambda| = N \frac{v_\delta}{f} \Rightarrow f = \frac{Nv_\delta}{3\lambda} \quad (1)$$

Θέτουμε στη σχέση (1) όπου $N = 1$ και προκύπτει:

$$f_{\min} = \frac{v_\delta}{3\lambda}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η **γ**).

Δικαιολόγηση

Στο ζεύγος **γ**) η φάση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίδια με αυτήν της έντασης του μαγνητικού πεδίου.

Επίσης ισχύει:

$$\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = \left(\frac{90}{30 \cdot 10^{-8}} \right) \frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \Rightarrow \frac{E_{\max}}{B_{\max}} = c$$

Έχουμε:

$$\frac{t}{T} = 3 \cdot 10^{10} t \Rightarrow T = \left(\frac{10^{-10}}{3} \right) s$$

Ισχύει:

$$\frac{x}{\lambda} = 100x \Rightarrow \lambda = \frac{1}{100} m$$

Για την ταχύτητα διάδοσης, προκύπτει:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει:

$$\varphi_1 = 2\pi \frac{t_1}{T} - 2\pi \frac{x}{\lambda} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{4\pi}{T} - 2\pi \frac{x}{\lambda} \quad (1)$$

Από το διάγραμμα ισχύει ότι για $x = 0$, $\varphi_1 = 2\pi \text{ rad}$.

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$2\pi = \frac{4\pi}{T} \Rightarrow T = 2s$$

Επίσης για $x = 0,5 m$, $\varphi_1 = 0$:

$$0 = \frac{4\pi}{T} - 2\pi \frac{0,5}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 0,5m$$

Για την ταχύτητα διάδοσης, προκύπτει:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 0,25 \frac{m}{s}$$

Γ2. Έχουμε:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta\varphi \cdot \lambda}{2\pi} \Rightarrow \Delta x = 1,5 m$$

Γ3. Ισχύει:

$$d_{K\Sigma} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow d_{K\Sigma} = 0,25m$$

Προκύπτει:

$$x_K = x_\Sigma + d_{K\Sigma} \Rightarrow x_K = 2,25 m$$

Ισχύει (με απόδειξη):

$$v = +\omega \sqrt{A^2 - y_\Sigma^2} \Rightarrow$$

$$v = +\frac{2\pi}{T} \sqrt{A^2 - \left(-\frac{A}{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$v = +\frac{2\pi\sqrt{3}A}{2T} \Rightarrow$$

$$v = 0,2\sqrt{3}\pi \frac{m}{s}$$

Γ4. Έχουμε:

$$U = \frac{1}{4} E_T \Rightarrow \frac{1}{2} D y^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow y = \pm \frac{A}{2}$$

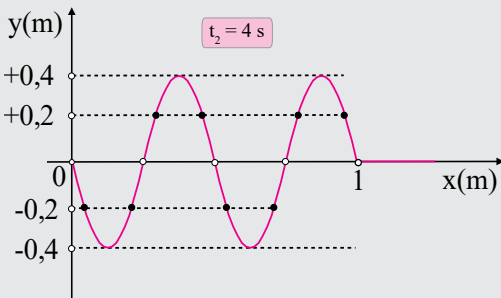
Ισχύει:

$$S = v_\delta t_2 \Rightarrow S = 1\text{m}$$

Προκύπτει:

$$\frac{S}{\lambda} = \frac{1}{0,5} \Rightarrow S = 2\lambda$$

Το ζητούμενο στιγμιότυπο είναι το εξής:



Από το στιγμιότυπο προκύπτει ότι το πλήθος των ζητούμενων σημείων είναι ίσο με 8.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει:

$$d = 4 \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{d}{2} \Rightarrow \lambda = 0,4\text{m}$$

Έχουμε:

$$\frac{T}{2} = 0,1 \Rightarrow T = 0,2\text{s}$$

Προκύπτει:

$$v_{\max,0} = \omega A_0 \Rightarrow v_{\max,0} = \frac{2\pi}{T} 2A \Rightarrow$$

$$A = \frac{T v_{\max,0}}{4\pi} \Rightarrow A = 0,2\text{m}$$

Η εξίσωση του στασίμου κύματος είναι:

$$y = 2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \eta \mu 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \sin 5\pi x \cdot \eta \mu 10\pi t (\text{S.I})$$

Δ2. Ισχύει:

$$x_z = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{12} \Rightarrow x_z = \frac{7\lambda}{12}$$

Και:

$$x_\Delta = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow x_\Delta = \frac{9\lambda}{12}$$

Προκύπτει:

$$\Delta x_{z\Delta} = \frac{9\lambda}{12} - \frac{7\lambda}{12} \Rightarrow \Delta x_{z\Delta} = \frac{\lambda}{6} \Rightarrow \Delta x_{z\Delta} = \frac{1}{15}\text{m}$$

Ισχύει:

$$d_{\min} = \Delta x_{z\Delta} \Rightarrow d_{\min} = \frac{1}{15}\text{m}$$

Έχουμε:

$$A_z = \left| 2A \sin 2\pi \frac{x_z}{\lambda} \right| \Rightarrow A_z = \left| 2A \sin 2\pi \frac{\frac{7\lambda}{12}}{\lambda} \right| \Rightarrow$$

$$A_z = \left| 0,4 \sin \frac{7\pi}{6} \right| \text{m} \Rightarrow$$

$$A_z = 0,2\sqrt{3}\text{m}$$

Προκύπτει:

$$d_{\max} = \sqrt{\Delta x_{z\Delta}^2 + A_z^2} \Rightarrow d_{\max} = \frac{2\sqrt{7}}{15}\text{m}$$

Δ3. Ισχύει $\Delta\phi_{OZ} = \pi \text{ rad}$ επομένως όταν $v = -v_{\max,0}$, τότε προκύπτει:

$$v_z = +v_{\max,z} \Rightarrow v_z = +\omega A_z \Rightarrow v_z = +\frac{2\pi}{T} A_z \Rightarrow$$

$$v_z = +2\pi\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Δ4. Την $t = 0,4\text{s}$ ισχύει:

$$y = 0,4 \sin 5\pi x \cdot \eta \mu 4\pi (\text{S.I})$$

Για $x < 0,1\text{m}$, $\phi = 4\pi \text{rad}$

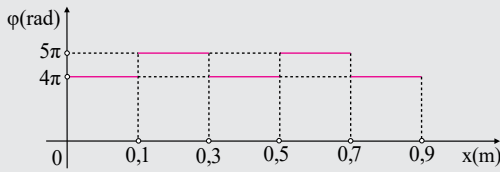
Για $0,1\text{m} < x < 0,3\text{m}$, $\phi = 5\pi \text{rad}$

Για $0,3\text{m} < x < 0,5\text{m}$, $\phi = 4\pi \text{rad}$

Για $0,5\text{m} < x < 0,7\text{m}$, $\phi = 5\pi \text{rad}$

Για $0,7\text{m} < x < 0,9\text{m}$, $\phi = 4\pi \text{rad}$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



Δ5. Αρχικά ισχύει:

$$L = \frac{4\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow L = \frac{9\lambda}{4} \quad (1)$$

Επίσης έχουμε:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 5 \text{ Hz}$$

Τελικά ισχύει:

$$L = \frac{6\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{4} \Rightarrow L = \frac{13\lambda'}{4} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$\frac{9\lambda}{4} = \frac{13\lambda'}{4} \Rightarrow \frac{9v_\delta}{f} = \frac{13v_\delta}{f'} \Rightarrow f' = \frac{13f}{9} \Rightarrow f' = \frac{65}{9} \text{ Hz}$$

Έχουμε:

$$\Delta f = f' - f \Rightarrow \Delta f = \frac{20}{9} \text{ Hz}$$

10ο Διαγώνισμα (Δ10)

ΘΕΜΑ Α

A1. β), A2. δ), A3. α), A4. γ)
A5. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **β**).

Δικαιολόγηση

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την επιταχυνόμενη κίνηση του ιόντος. Ισχύει:

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = qV \Rightarrow V = \frac{mv^2}{2q}$$

Για τη νέα τάση, ισχύει:

$$V' = \frac{25}{100}V \Rightarrow V' = \frac{1}{4}V \Rightarrow$$

$$\frac{mv'^2}{2q} = \frac{1}{4} \cdot \frac{mv^2}{2q} \Rightarrow v' = \frac{v}{2}$$

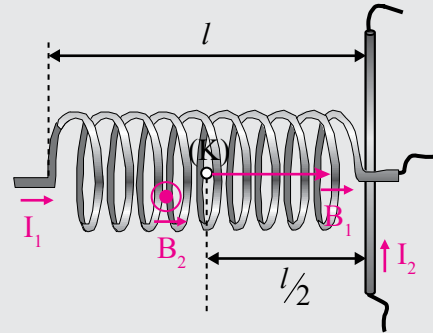
Τελικά έχουμε:

$$\frac{d}{d'} = \frac{2R}{2R'} \Rightarrow \frac{d}{d'} = \frac{\frac{mv}{Bq}}{\frac{mv'}{Bq}} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d'} = \frac{v}{v'} \Rightarrow \frac{d}{d'} = \frac{2v'}{v'} \Rightarrow d' = 0,5d$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η **α**).

Δικαιολόγηση



Στο παραπάνω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι κατευθύνσεις της έντασης του μαγνητικού πεδίου εξαιτίας του ευθύγραμμου αγωγού και του σωληνοειδούς οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους. Για τα μέτρα του B_1 και B_2 αντίστοιχα έχουμε:

$$B_1 = \mu_0 \cdot I_1 \cdot \frac{N}{l} \quad (1) \quad \text{και} \quad B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{d} \quad \overset{d=\frac{l}{2}, I_2=2\pi I_1}{\Rightarrow}$$

$$B_2 = \mu_0 \cdot \frac{2I_1}{l} \quad (2).$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις έχουμε:

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot \frac{N}{l}}{\mu_0 \cdot \frac{2I_1}{l}} = \frac{N}{2} \Rightarrow B_2 = \frac{2B_1}{N} \quad (3)$$

Για τη συνολική ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο (Κ) του σωληνοειδούς που οφείλεται και στον ευθύγραμμο αγωγό αλλά και στο σωληνοειδές, έχουμε:

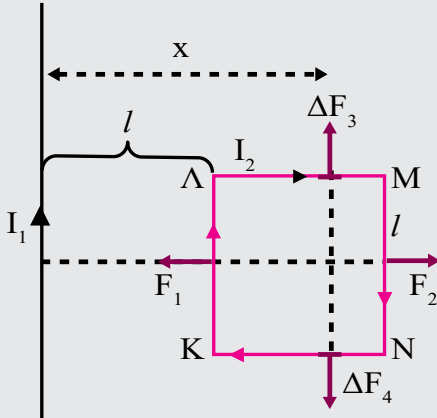
$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} B = \sqrt{B_1^2 + \frac{4B_1^2}{N^2}} \Rightarrow$$

$$B = \frac{B_1 \sqrt{N^2 + 4}}{N}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Ο ρευματοφόρος αγωγός I_1 και η πλευρά ΚΛ διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα, οπότε στον ΚΛ αναπτύσσεται δύναμη μέτρου F_1 με φορά προς τα αριστερά, όπως στο σχήμα. Ο ρευματοφόρος αγωγός και η πλευρά ΜΝ διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα, οπότε στον ΚΛ αναπτύσσεται δύναμη μέτρου F_2 με φορά προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα.



Οι οριζόντιοι αγωγοί του πλαισίου δέχονται δυνάμεις Laplace ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς. Αυτό συμβαίνει γιατί ο ευθύγραμμος αγωγός δημιουργεί ίσες εντάσεις του μαγνητικού πεδίου του σε απόσταση x από αυτόν και ανά δύο τα απέναντι στοιχειώδη τμήματα των οριζόντιων αγωγών δέχονται δυνάμεις που αλληλοαναιρούνται.

$$\Delta F_3 = B_1 I_2 \Delta \ell_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2 \cdot \Delta \ell_3}{x}$$

$$\Delta F_4 = B_1 I_2 \Delta \ell_4 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2 \cdot \Delta \ell_4}{x}$$

$$\Sigma F_{3,4} = \Delta F_3 - \Delta F_4 = 0$$

Άρα η συνιστάμενη των δυνάμεων που ασκούνται στο πλαίσιο καθορίζεται μόνο από τη συνισταμένη των F_1, F_2 .

$$F_1 = B_1 I_2 \ell = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2 \cdot \ell}{\ell} \Rightarrow F_1 = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2$$

$$F_2 = B'_1 I_2 \ell = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2 \cdot \ell}{2\ell} \Rightarrow F_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2$$

$$\Sigma F_{1,2} = F_1 - F_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \quad \text{άρα}$$

$$\alpha = \frac{\Sigma F_{1,2}}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi m}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από το διάγραμμα προκύπτει ότι:

$$\frac{3T}{4} = 0,015s \Rightarrow T = 0,02s \Rightarrow$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 50\text{Hz}$$

Επίσης έχουμε ότι:

$$P_{\max} = 100\text{W} \Rightarrow \frac{V^2}{R} = 100 \Rightarrow V = 50\text{V}$$

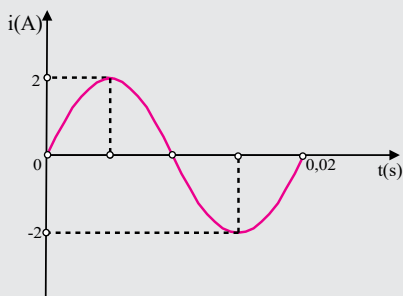
Γ2. Η χρονική εξίσωση της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι:

$$i = I \sin \omega t$$

$$\text{όπου } I = \frac{V}{R} = 2\text{A} \quad \text{και} \quad \omega = 2\pi f = 100\pi \text{ rad/s}$$

οπότε τελικά παίρνουμε:

$$i = 2\sin 100\pi t (\text{SL})$$



Γ3. Η τάση μηδενίζεται στιγμιαία 200 φορές μετά από 100 περιόδους, άρα:
 $t = 100T = 2s$

$$Q_R = I_{ev}^2 R t$$

$$\text{Όμως: } I_{ev} = \frac{I}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}A$$

$$\text{οπότε: } Q_R = 100J.$$

Γ4. $P = 50\% \bar{P} \Rightarrow V I \eta \mu^2 \omega t = \frac{1}{2} V_{ev} I_{ev} \Rightarrow$

$$V I \eta \mu^2 \omega t = \frac{1}{2} \frac{V}{\sqrt{2}} \frac{I}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\eta \mu^2 \omega t = \frac{1}{4} \Rightarrow \eta \mu \omega t = \pm \frac{1}{2}$$

$$\eta \mu \omega t = \frac{1}{2} = \eta \mu \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \omega t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{2\kappa\pi}{\omega} + \frac{\pi}{6\omega} (1) \\ \eta \mu \\ \omega t = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{2\kappa\pi}{\omega} + \frac{5\pi}{6\omega} (2) \end{cases}$$

$$\eta \mu \omega t = -\frac{1}{2} = \eta \mu \left(-\frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow$$

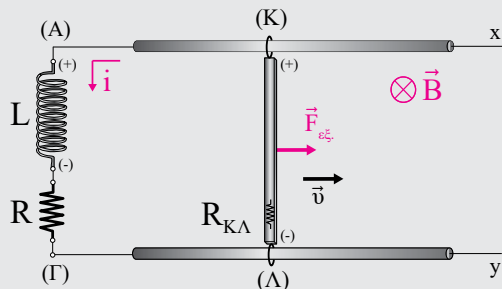
$$\begin{cases} \omega t = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{2\kappa\pi}{\omega} - \frac{\pi}{6\omega} (3) \\ \eta \mu \\ \omega t = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{2\kappa\pi}{\omega} + \frac{7\pi}{6\omega} (4) \end{cases}$$

Η στιγμιαία ισχύς είναι ίση με το 50% της μέσης ισχύος για δεύτερη φορά αν στη σχέση (2) βάλουμε όπου $\kappa = 0$.

$$\text{Τελικά } t = \frac{5\pi}{6\omega} \Rightarrow t = \frac{1}{120} s.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας είναι της μορφής $v = v_0 + at$, επομένως, έχουμε:

$$v = 6 + 4t \text{ (S.I.)}$$

Από τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff προκύπτει:

$$E_{επ} - i(R + R_{KL}) - |E_{αυτ}| = 0 \Rightarrow$$

$$Bvl - i(R + R_{KL}) - |E_{αυτ}| = 0 \Rightarrow$$

$$i = \frac{Bvl - |E_{αυτ}|}{R + R_{KL}} \Rightarrow i = \left(\frac{2 \cdot (6 + 4t) \cdot 0,5 - 6}{0,5 + 0,5} \right) \Rightarrow$$

$$i = 4t \text{ (S.I.)}$$

Δ2. Από την εξίσωση $i = 4t$ (S.I.) προκύπτει

$$\text{ότι: } \frac{di}{dt} = 4 \frac{A}{s}.$$

Για τον συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου προκύπτει:

$$|E_{\text{αυτ}}| = L \left| \frac{di}{dt} \right| \Rightarrow L = \frac{|E_{\text{αυτ}}|}{\left| \frac{di}{dt} \right|} \Rightarrow L = 1,5 \text{ H}$$

Δ3. Υπολογίζουμε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα τη χρονική στιγμή t_1 . Προκύπτει:

$$U_1 = \frac{1}{2} Li_1^2 \Rightarrow i_1 = \sqrt{\frac{2U_1}{L}} \Rightarrow i_1 = 8 \text{ A}$$

Ο ρυθμός αποθήκευσης της ενέργειας στο πηνίο είναι:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = |E_{\text{αυτ}}| i_1 \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = 48 \frac{J}{s}$$

Βρίσκουμε τη χρονική στιγμή t_1 . Ισχύει:

$$i_1 = 4t_1 \Rightarrow 8 = 4t_1 \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}$$

Η ταχύτητα εκείνη τη χρονική στιγμή είναι:

$$v_1 = 6 + 4t_1 \Rightarrow v_1 = 14 \frac{m}{s}$$

Υπολογίζουμε την τιμή της εξωτερικής δύναμης τη χρονική στιγμή t_1 με τη βοήθεια του δευτέρου νόμου του Νεύτωνα. Έχουμε:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F_{\text{εξ}} - F_L = ma \Rightarrow$$

$$F_{\text{εξ}} = Bi_1 l + ma \Rightarrow F_{\text{εξ}} = 8,4 \text{ N}$$

Ο ρυθμός της προσφερόμενης ενέργειας τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$P_{F_{\text{εξ}}} = F_{\text{εξ}} v_1 \Rightarrow P_{F_{\text{εξ}}} = F_{\text{εξ}} v_1 \Rightarrow P_{F_{\text{εξ}}} = 117,6 \text{ W}$$

Δ4. Υπολογίζουμε την ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_2 . Ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \Sigma F \cdot v_2 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = m a v_2 \Rightarrow \\ \frac{dK}{dt} &= m a v_2 \Rightarrow \\ v_2 &= \frac{\frac{dK}{dt}}{m a} \Rightarrow v_2 = 26 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_2 .

Προκύπτει:

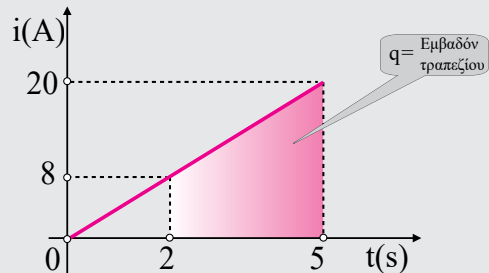
$$v_2 = 6 + 4t_2 \Rightarrow 26 = 6 + 4t_2 \Rightarrow t_2 = 5 \text{ s}$$

Από την εξίσωση $i = 4t$ (S.I.) έχουμε:

$$\text{Για } t_1 = 2 \text{ s}, i_1 = 8 \text{ A}$$

$$\text{Για } t_2 = 5 \text{ s}, i_2 = 20 \text{ A}$$

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα $i_{\text{επ.}} - t$ για τη χρονική διάρκεια $t_1 \rightarrow t_2$.



Με εμβαδομέτρηση προκύπτει:

$$q = E \Rightarrow q = \left[\frac{(8 + 20) \cdot (5 - 2)}{2} \right] C \Rightarrow q = 42 \text{ C}$$

11ο Διαγώνισμα (Δ11)

ΘΕΜΑ Α

A1. β), A2. γ), A3. β), A4. α)
A5. α) Λ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

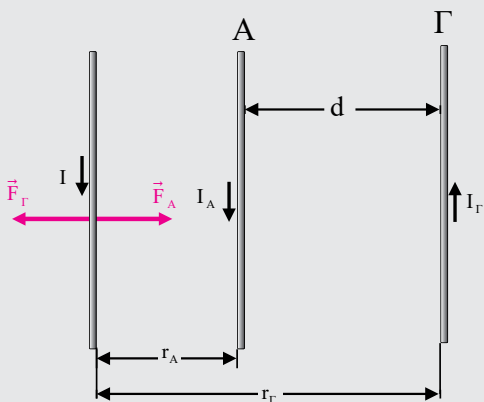
B1. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

$$\text{Ισχύει } \Sigma F = 0 \Rightarrow F_A = F_{\Gamma} \Rightarrow$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_A \cdot I_{\Gamma} \cdot \ell}{r_A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_A \cdot I_{\Gamma} \cdot \ell}{r_{\Gamma}} \Rightarrow \frac{I_A}{r_A} = \frac{I_{\Gamma}}{r_{\Gamma}} \Rightarrow$$

$$\frac{I_A}{r_{\Gamma} - d} = \frac{3I_A}{r_{\Gamma}} \Rightarrow r_{\Gamma} = \frac{3d}{2}$$



B2. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Από τον νόμο του Ohm έχουμε:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{\text{ολ}}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{2R}$$

Από την εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\Sigma F_y = m\alpha \Rightarrow w - F_L = m\alpha \Rightarrow$$

$$mg - BI_{\varepsilon\pi}L = m\frac{g}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{3mg}{4} = \frac{BE_{\varepsilon\pi}L}{2R} \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = \frac{3mgR}{2BL}$$

Από τον νόμο της επαγωγής προκύπτει:

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \frac{3mgR}{2BL} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1,5mgR}{BL}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Για τη στιγμιαία ισχύ έχουμε:

$$p = v_i \Rightarrow p = V\eta\omega t \cdot I\eta\omega t \Rightarrow$$

$$p = V_{\varepsilon\pi}\sqrt{2}I_{\varepsilon\pi}\sqrt{2}\eta\mu^2\omega t \Rightarrow p = 2\bar{P}\eta\mu^2\omega t(1)$$

Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_1 όπου

$$p = \frac{\bar{P}}{2} \text{ για 1η φορά. Από τη σχέση (1) έχουμε:}$$

$$\frac{\bar{P}}{2} = 2\bar{P}\eta\mu^2\omega t_1 \Rightarrow \eta\mu^2\omega t_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\eta\mu\omega t_1 = \pm \frac{1}{2}(2)$$

Λύνουμε τις τριγωνομετρικές εξισώσεις:

$$\eta\mu\omega t_1 = \frac{1}{2} = \eta\mu \frac{\pi}{6} \text{ και}$$

$$\eta\mu\omega t_1 = -\frac{1}{2} = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

και προκύπτουν οι λύσεις:

$$t_1 = \frac{T}{12}, t_1 = \frac{5T}{12}, t_1 = \frac{7T}{12} \dots$$

Για πρώτη φορά θα έχουμε:

$$t_1 = \frac{T}{12}$$

Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_2 όπου

$p = \frac{3\bar{P}}{2}$ για 1η φορά. Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{3\bar{P}}{2} = 2\bar{P}\eta\mu^2\omega t_1 \Rightarrow \eta\mu^2\omega t_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\eta\mu\omega t_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(3)$$

Λύνουμε τις τριγωνομετρικές εξισώσεις

$$\eta\mu\omega t_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu \frac{\pi}{3} \text{ και}$$

$$\eta\mu\omega t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

και προκύπτουν οι λύσεις:

$$t_2 = \frac{T}{6}, t_2 = \frac{T}{3}, t_2 = \frac{2T}{3} \dots$$

Για πρώτη φορά θα έχουμε:

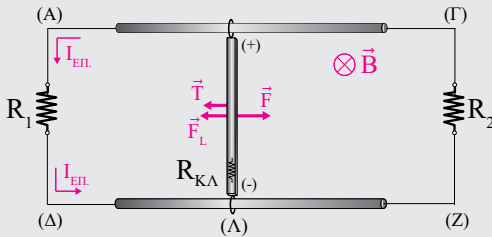
$$t_2 = \frac{T}{6}$$

Τελικά, έχουμε:

$$\Delta t = \frac{T}{6} - \frac{T}{12} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{12}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



Στον αγωγό αναπτύσσεται ΗΕΔ από επαγωγή:
 $E_{\text{επ}} = BvL$

Η ολική αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$R_{\text{ολ}} = R_{1,2} + R_{\text{ΚΛ}} \Rightarrow$$

$$R_{\text{ολ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_{\text{ΚΛ}} \Rightarrow R_{\text{ολ}} = 5\Omega$$

Όταν η ταχύτητα είναι ίση με την οριακή ισχύει:

$$I_{\text{επ}} = \frac{E_{\text{επ}}}{R_{\text{ολ}}} \Rightarrow I_{\text{επ}} = \frac{Bv_{\text{οπ}}L}{R_{\text{ολ}}} \Rightarrow$$

$$I_{\text{επ}} = \frac{Bv_{\text{οπ}}L}{R_{\text{ολ}}} \Rightarrow I_{\text{επ}} = 2\text{A}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace υπολογίζεται από τον τύπο:

$$F_L = BI_{\text{επ}}L \Rightarrow F_L = 2\text{N}$$

Γ2. Όταν ο αγωγός κινείται με σταθερή οριακή ταχύτητα ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F - T - F_L = 0 \Rightarrow$$

$$T = F - F_L \Rightarrow T = 2\text{N}$$

Για τη δύναμη της τριβής ισχύει:

$$T = \mu mg \Rightarrow \mu = \frac{T}{mg} \Rightarrow \mu = 0,5$$

Γ3. Τη χρονική στιγμή t_2 η ταχύτητα του αγωγού ΚΛ υπολογίζεται από τον τύπο της κινητικής ενέργειας:

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} \Rightarrow v_2 = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ο ρυθμός με τον οποίο η εξωτερική δύναμη παρέχει ενέργεια στο κύκλωμα, τη χρονική στιγμή t_2 , είναι:

$$P_F = Fv_2 \Rightarrow P_F = 16\text{W}$$

Ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα λόγω τριβών, τη χρονική στιγμή t_2 , είναι:

$$\frac{\Delta Q_T}{\Delta t} = T v_2 \Rightarrow \frac{\Delta Q_T}{\Delta t} = 8\frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Γ4. Από την εφαρμογή του δευτέρου νόμου του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow F - T - F_L = m\alpha \Rightarrow$$

$$F - T - \frac{B^2 v L^2}{R_{\text{ολ}}} =$$

$$F - T - BI_{\text{επ}}L = m\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F - T - \frac{B^2 v L^2}{R_{\text{ολ}}}}{m} \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) υπολογίζουμε την ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_3 , θέτοντας όπου $\alpha = 4\text{m/s}^2$. Έχουμε:

$$4 = \frac{4 - 2 - \frac{v_3}{5}}{0,4} \Rightarrow v_3 = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του αγωγού τη χρονική στιγμή t_3 είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v_3 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = m\alpha v_3 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 3,2\frac{\text{J}}{\text{s}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου είναι:

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l} \Rightarrow L = 2\text{H}$$

Από τον νόμο του Ohm έχουμε:

$$I_0 = \frac{E}{R_{\pi} + r + R} \Rightarrow I_0 = 4\text{A}$$

Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου που έχει αποθηκευτεί στο πηνίο είναι:

$$U_0 = \frac{1}{2} L I_0^2 \Rightarrow U_0 = 16 \text{ J}$$

Δ2. Σύμφωνα με τον νόμο της αυτεπαγωγής

$$\text{ισχύει: } E_{\text{αυτ}} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} (1)$$

Από τον νόμο της επαγωγής προκύπτει:

$$E_{\text{επ}} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} (2)$$

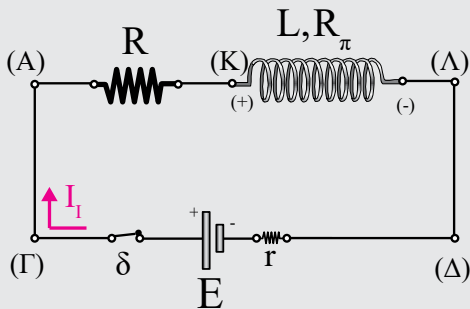
Από τις σχέσεις (1),(2) έχουμε:

$$-L \frac{\Delta I}{\Delta t} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \Rightarrow L \cdot \Delta I = N \cdot \Delta \Phi \Rightarrow$$

$$L(I_0 - 0) = N(\Phi - 0) \Rightarrow \Phi = \frac{L I_0}{N} \Rightarrow$$

$$\Phi = 8 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Δ3.



Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$I_1 = \frac{25}{100} I_0 \Rightarrow I_1 = 1 \text{ A}$$

Από την εφαρμογή του δευτέρου κανόνα του Kirchhoff στη διαδρομή ΑΚΛΔΓΑ έχουμε:

$$E - I_1 r - I_1 R - I_1 R_{\pi} - |E'_{\text{αυτ}}| = 0 \Rightarrow$$

$$|E'_{\text{αυτ}}| = E - I_1 (r + R_{\pi} + R) \Rightarrow$$

$$|E'_{\text{αυτ}}| = 15 \text{ V}$$

Ισχύει:

$$|E'_{\text{αυτ}}| = L \left| \frac{dI}{dt} \right| \Rightarrow \left| \frac{dI}{dt} \right| = \frac{|E'_{\text{αυτ}}|}{L} \Rightarrow \left| \frac{dI}{dt} \right| = 7,5 \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

Επειδή το ρεύμα αυξάνεται ισχύει:

$$\frac{dI}{dt} = +7,5 \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

Δ4. Τη χρονική στιγμή t_2 για την ένταση του ρεύματος προκύπτει:

$$P_{\eta\lambda} = E I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{P_{\eta\lambda}}{E} \Rightarrow I_2 = 2 \text{ A}$$

Εφαρμόζουμε τον 2° κανόνα του Kirchhoff στη διαδρομή ΚΑΓΔΛ για να υπολογίσουμε την τάση στα άκρα του πηνίου. Ισχύει:

$$V_K + I_2 R - E + I_2 r = V_{\Lambda} \Rightarrow$$

$$V_{K\Lambda} = E - I_2 (r + R) \Rightarrow$$

$$V_{K\Lambda} = 12 \text{ V}$$

Ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται ενέργεια στο πηνίο είναι:

$$P_{\pi\eta\nu} = V_{\pi\eta\nu} I_2 \Rightarrow P_{\pi\eta\nu} = V_{K\Lambda} I_2 \Rightarrow P_{\pi\eta\nu} = 24 \text{ W}$$

Εφαρμόζουμε τον 2ο κανόνα του Kirchhoff στη διαδρομή ΑΚΛΔΓΑ:

$$E - I_2 r - I_2 R - I_2 R_{\pi} - |E'_{\text{αυτ}}| = 0 \Rightarrow$$

$$|E'_{\text{αυτ}}| = E - I_2 (r + R_{\pi} + R) \Rightarrow |E'_{\text{αυτ}}| = 10 \text{ V}$$

Ο ρυθμός με τον οποίο αποθηκεύεται ενέργεια στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου είναι:

$$P_L = |E'_{\text{αυτ}}| I_2 \Rightarrow P_L = 20 \text{ W}$$

12ο Διαγώνισμα (Δ12)

ΘΕΜΑ Α

Α1. α), Α2. δ), Α3. β), Α4. γ)
Α5. α) Λ, β) Λ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Ισχύει:

$$T_{\text{αρχ}} = \theta_{\text{αρχ}} + 273 \Rightarrow T_{\text{αρχ}} = (127 + 273) \text{ K} \Rightarrow$$

$$T_{\text{αρχ}} = 400 \text{ K}$$

Επίσης έχουμε:

$$T_{\text{τελ}} = \theta_{\text{τελ}} + 273 \Rightarrow T_{\text{τελ}} = (527 + 273) \text{ K} \Rightarrow T_{\text{τελ}} = 800 \text{ K} \Rightarrow T_{\text{τελ}} = 2T_{\text{αρχ}}$$

Από τον νόμο μετατόπισης του Wien, προκύπτει:

$$\lambda_{\text{αρχ}} T_{\text{αρχ}} = \lambda_{\text{τελ}} T_{\text{τελ}} \Rightarrow \lambda_{\text{τελ}} = \frac{\lambda_{\text{αρχ}} T_{\text{αρχ}}}{T_{\text{τελ}}} \Rightarrow \lambda_{\text{τελ}} = \frac{\lambda_{\text{αρχ}} T_{\text{αρχ}}}{2T_{\text{αρχ}}} \Rightarrow \lambda_{\text{τελ}} = \frac{\lambda_{\text{αρχ}}}{2}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Σε απόσταση r ισχύει:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Σε απόσταση $4r$ ισχύει:

$$I' = \frac{P}{4\pi(4r)^2} \Rightarrow I' = \frac{I}{16}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Ισχύει:

$$P = \frac{E_{\text{ολ}}}{t} \Rightarrow P = \frac{Nhf}{t} \Rightarrow \frac{N}{t} = \frac{P}{hf}$$

Επίσης έχουμε:

$$I = \frac{q}{t} \Rightarrow I = \frac{N|q_e|}{t} \Rightarrow I = \frac{P|q_e|}{hf}$$

Ισχύει:

$$P' = 2P$$

Για την ένταση του ρεύματος προκύπτει τελικά:

$$I' = \frac{P'|q_e|}{hf} \Rightarrow I' = \frac{2P|q_e|}{hf} \Rightarrow I' = 2I$$

ΘΕΜΑ Γ

A)

Γ1. Για το μήκος κύματος αιχμής της ακτινοβολίας αυτής, έχουμε:

$$\lambda_{\text{max}} T = 2,9 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \lambda_{\text{max}} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{T} \Rightarrow$$

$$\lambda_{\text{max}} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Γ2. Για την ενέργεια των φωτονίων, ισχύει:

$$E = hf \Rightarrow E = \frac{hc}{\lambda_{\text{max}}} \Rightarrow E = 4 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

B)

Γ3. Για την ένταση της ακτινοβολίας σε απόσταση d , ισχύει:

$$I = \frac{P}{4\pi d^2} \Rightarrow I = \frac{400 \text{ W}}{\pi \text{ m}^2}$$

Γ4. Προκύπτει:

$$P' = P \frac{A}{4\pi d'^2} \Rightarrow P' = 5 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από διάγραμμα έχουμε:

$$f_0 = 450 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Δ2. Για το έργο εξαγωγής του μετάλλου, ισχύει:

$$\phi = hf_0 \Rightarrow \phi = 1,875 \text{ eV}$$

Δ3. Υπολογίζουμε τη μέγιστη κινητική ενέργεια των εκπεμπόμενων φωτοηλεκτρονίων:

$$K_{\text{max}} = hf - \phi \Rightarrow K_{\text{max}} = 10^{-19} \text{ J}$$

Δ4. Ισχύει:

$$P = \frac{E_{\text{ολ}}}{t} \Rightarrow P = \frac{Nhf}{t} \Rightarrow \frac{N}{t} = \frac{P}{hf}$$

Για την ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα, έχουμε:

$$I = \frac{q}{t} \Rightarrow I = \frac{N|q_e|}{t} \Rightarrow$$

$$I = \frac{P|q_e|}{hf} \Rightarrow I = 24 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

13ο Διαγώνισμα (Δ13)

ΘΕΜΑ Α

A1. γ), A2. γ), A3. α), A4. δ)
A5. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Η φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein είναι:

$$K = hf - \varphi \quad (1)$$

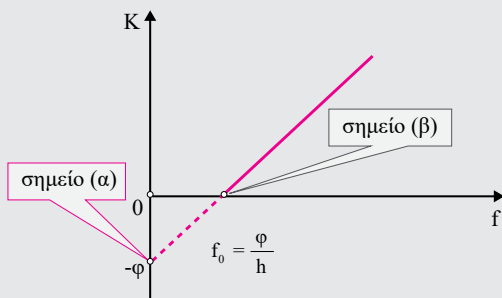
Για $f = 0$ η σχέση (1) δίνει:

$$K = -\varphi \text{ (σημείο } (\alpha))$$

Για $K = 0$ η σχέση (1) δίνει:

$$f = f_0 = \frac{\varphi}{h} \text{ (σημείο } (\beta)) \Rightarrow$$

συχνότητα κατωφλίου



Για το μέταλλο M_1 όπως φαίνεται από το δοθέν διάγραμμα, για τη συχνότητα κατωφλίου του $f_{0(1)}$ ισχύει:

$$f_{0(1)} = \frac{\varphi_0}{h} \quad (2)$$

όπου φ_0 το έργο εξαγωγής για το μέταλλο M_1 .

Για το μέταλλο M_2 , όπως φαίνεται από το δοθέν διάγραμμα, για τη συχνότητα κατωφλίου του $f_{0(2)}$ ισχύει:

$$f_{0(2)} = \frac{3\varphi_0}{h} \quad (3)$$

Εφαρμόζουμε τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein για το μέταλλο M_1 .

$$K = hf - \varphi_0$$

Για την κινητική ενέργεια K που αποκτούν τα φωτοηλεκτρόνια που εξέρχονται από το μέταλλο M_1 , αν σε αυτό προσπίπτει ακτινοβολία συχνότητας ίσης με τη συχνότητα κατωφλίου του μετάλλου M_2 , έχουμε:

$$K = hf - \varphi_0 \Rightarrow$$

$$K = h \cdot \frac{3\varphi_0}{h} - \varphi_0 \Rightarrow K = 2\varphi_0$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Ισχύει:

$$\lambda' - \lambda_c = \lambda_c \left(1 - \sin \frac{2\pi}{3} \right) \Rightarrow \lambda' = 2,5\lambda_c$$

Για το προσπίπτον φωτόνιο έχουμε:

$$p = \frac{h}{\lambda_c}$$

Για το σκεδαζόμενο φωτόνιο έχουμε:

$$p' = \frac{h}{2,5\lambda_c} \Rightarrow p' = 0,4p$$

Το ζητούμενο ποσοστό (%) είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{p' - p}{p} 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{0,4p - p}{p} 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = -60\%$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Αρχικά ισχύει:

$$K_1 - K = eV \Rightarrow \frac{8}{9}K = eV \quad (1)$$

Τελικά ισχύει:

$$\begin{aligned} K_2 - K &= -eV \Rightarrow \\ K_2 - K &= -\frac{8}{9}K \Rightarrow K_2 = \frac{K}{9} \Rightarrow \\ \frac{p_2^2}{2m} &= \frac{1}{9} \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p_2 = \frac{1}{3}p \Rightarrow \\ \frac{h}{\lambda_2} &= \frac{1}{3} \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda_2 = 3\lambda \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει:

$$\begin{aligned} E &= hf \Rightarrow E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \\ E &= \frac{hc}{1,5\lambda_c} \Rightarrow E = 5,5 \cdot 10^{-14} \text{ J} \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε την ενέργεια των φωτονίων σε eV. Προκύπτει:

$$E = \left(\frac{5,5 \cdot 10^{-14}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \right) \text{ eV} \Rightarrow E = 343750 \text{ eV}$$

Γ2. Για τη μετατόπιση Compton, έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \lambda_c (1 - \cos\varphi) \Rightarrow \\ \Delta\lambda &= \frac{\lambda_c}{2} \Rightarrow \Delta\lambda = 1,2 \cdot 10^{-12} \text{ m} \end{aligned}$$

Γ3. Για το μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \lambda' - \lambda \Rightarrow \lambda' = \lambda + \Delta\lambda \Rightarrow \\ \lambda' &= 1,5\lambda_c + \frac{\lambda_c}{2} \Rightarrow \lambda' = 2\lambda_c \Rightarrow \\ \lambda' &= 4,8 \cdot 10^{-12} \text{ m} \end{aligned}$$

Γ4. Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου, μετά τη σκέδαση, είναι:

$$\begin{aligned} K &= \Delta E \Rightarrow K = hf - hf' \Rightarrow K = \left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} \right) \Rightarrow \\ K &= hc \left(\frac{1}{1,5\lambda_c} - \frac{1}{2\lambda_c} \right) \Rightarrow K = \frac{hc}{6\lambda_c} \Rightarrow \\ K &= 1,375 \cdot 10^{-14} \text{ J} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για τη συχνότητα κατωφλίου, ισχύει:

$$f_0 = \frac{\phi}{h} \Rightarrow f_0 = 0,6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Δ2. Έχουμε:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} \Rightarrow \lambda_0 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Δ3. Για την τάση αποκοπής, προκύπτει:

$$K_{\max} = eV_0 \Rightarrow V_0 = \frac{K_{\max}}{e} \Rightarrow V_0 = 0,5 \text{ V}$$

Δ4. Για τη συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας έχουμε:

$$\begin{aligned} K_{\max} &= hf - \phi \Rightarrow f = \frac{K_{\max} + \phi}{h} \Rightarrow \\ f &= 1,8 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \end{aligned}$$

14ο Διαγώνισμα (Δ14)

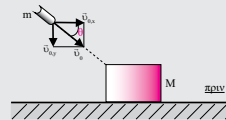
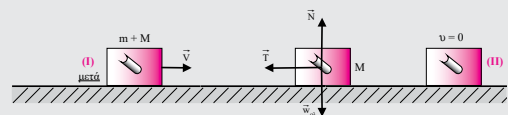
ΘΕΜΑ Α

A1. δ), A2. γ), A3. α), A4. δ)
A5. α) Λ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση



Η ορμή του συστήματος βλήμα-ξύλινο κιβώ-
τιο διατηρείται μόνο στον άξονα x.

Α.Δ.Ο. άξονας x:

$$\vec{p}_{ολ(πριν),x} = \vec{p}_{ολ(μετά),x} \Rightarrow mv_{0,x} = (m+M)V \Rightarrow$$

$$mv_0 \sin \theta = (m+M)V \Rightarrow V = \frac{mv_0}{2(m+M)} \quad (1)$$

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί
ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση
μέχρι να σταματήσει. Η θερμότητα που παρά-
γεται λόγω της τριβής ισούται με την απόλυτη
τιμή του έργου της. Εφαρμόζουμε το θεώρημα
μεταβολής της κινητικής ενέργειας. Ισχύει:

$$\Theta.M.K.E._{(I) \rightarrow (II)} : \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(τελ.)} - K_{(αρχ.)} = W_T \Rightarrow$$

$$W_T = -\frac{1}{2}(m+M)V^2 \Rightarrow$$

$$Q_{τριβής} = |W_T| = \frac{1}{2}(m+M)V^2 \quad (2)$$

Η θερμότητα που παράχθηκε κατά την κρούση
είναι:

$$Q_{κρούσης} = K_{ολ.(πριν)} - K_{ολ.(μετά)} =$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 \quad (3)$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$Q_{κρούσης} = 21 \cdot Q_{τριβής} \quad (2),(3) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 = 21 \cdot \frac{1}{2}(m+M)V^2 \Rightarrow$$

$$mv_0^2 = 22 \cdot (m+M)V^2 \quad (1) \Rightarrow$$

$$mv_0^2 = 22 \cdot (m+M) \left[\frac{mv_0}{2(m+M)} \right]^2 \Rightarrow \frac{m}{M} = \frac{2}{9}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Σύμφωνα με την εξίσωση Compton έχουμε :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi) \quad (1)$$

θέτοντας $\lambda = 2 \frac{h}{m_e c} (2)$ και $\varphi = 180^\circ$ έχουμε

$$\lambda' - 2 \frac{h}{m_e c} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos 180^\circ) \Rightarrow$$

$$\lambda' = 2 \frac{h}{m_e c} + \frac{h}{m_e c} (1+1) \Rightarrow \lambda' = 4 \frac{h}{m_e c} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει ότι:

$$\lambda' = 2\lambda \Rightarrow \frac{h}{p'} = 2 \frac{h}{p} \Rightarrow p' = \frac{p}{2}$$

Η σκέδαση Compton αποτελεί ένα είδος κρού-
σης, οπότε ισχύει η Αρχή διατήρησης της Ορ-
μής. (Α.Δ.Ο):

$$\vec{p}_{ολ,πριν} = \vec{p}_{ολ,μετά} \Rightarrow \vec{p}_{\text{φωτ.}} = \vec{p}'_{\text{φωτ.}} + \vec{p}_e \Rightarrow$$

$$p = -p' + p_e \Rightarrow p_e = p + p' \Rightarrow$$

$$p_e = p + \frac{p}{2} \Rightarrow p_e = \frac{3p}{2}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Σε $t = T$ έχουμε $A = A_0 - \frac{40}{100} A_0 = 0,6 A_0$

Το ποσοστό μείωσης της ενέργειας θα είναι:

$$\Pi\% = \frac{|\Delta E|}{E_0} \cdot 100\% = \frac{E_0 - E}{E_0} \cdot 100\% =$$

$$= \left(1 - \frac{E}{E_0} \right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{\frac{1}{2} D A^2}{\frac{1}{2} D A_0^2} \right) \cdot 100\% =$$

$$= \left[1 - \frac{(0,6 A_0)^2}{A_0^2} \right] \cdot 100\% \Rightarrow \Pi\% = 64\%$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Συγκρίνουμε την εξίσωση του κύματος
 $y = 0,2 \eta \mu 2\pi (2t - 2x) (\text{S.I.})$, με τη γενική

$$\text{μορφή } y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Προκύπτει:

$$\frac{t}{T} = 2t \Rightarrow T = 0,5s$$

Και:

$$\frac{x}{\lambda} = 2x \Rightarrow \lambda = 0,5m$$

Υπολογίζουμε την ταχύτητα διάδοσης:

$$v_{\delta} = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_{\delta} = 1 \frac{m}{s}$$

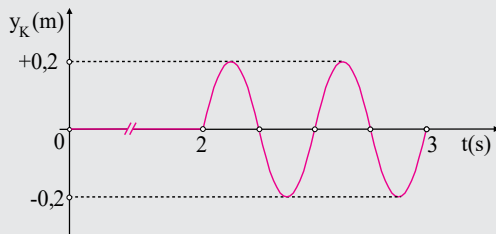
Γ2. Ισχύει:

$$t_K = \frac{x_K}{v_{\delta}} \Rightarrow t_K = 2s$$

Κατά τη χρονική διάρκεια $t = 0 \rightarrow t = 3s$, το σημείο (Κ) θα εκτελέσει:

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = \frac{t - t_K}{T} \Rightarrow N = 2\alpha\lambda.$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



Γ3. Η φάση του σημείου (Κ) είναι η:

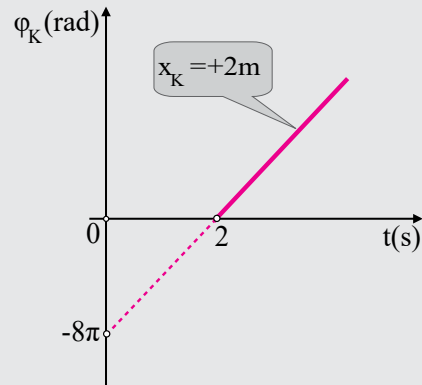
$$\varphi_K = 4\pi t - 4\pi x_K \Rightarrow \varphi_K = 4\pi t - 8\pi (S.I)(1)$$

Θέτουμε στη σχέση (1) όπου $t = 0$ και παίρνουμε: $\varphi_K = -8\pi \text{ rad}$

Θέτουμε στη σχέση (1) όπου $\varphi_K = 0$ και προκύπτει:

$$0 = 4\pi t - 8\pi \Rightarrow t = 2s$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



Γ4. i) Ισχύει $\varphi_{\Sigma} > \varphi_{\Lambda}$ άρα το (Σ) είναι πιο κοντά στην πηγή.

ii) Ισχύει:

$$\Delta\varphi_{\Sigma,\Lambda} = \varphi_{\Sigma} - \varphi_{\Lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{3\pi}{2} \text{ rad} = \varphi_{\Sigma} - \varphi_{\Lambda} \Rightarrow$$

$$\varphi_{\Sigma} = \varphi_{\Lambda} + \frac{3\pi}{2} \text{ rad}(1)$$

Για τη φάση του σημείου (Λ) έχουμε:

$$y_{\Lambda} = A \cdot \eta \mu \varphi_{\Lambda} \Rightarrow A = A \cdot \eta \mu \varphi_{\Lambda} \Rightarrow$$

$$\varphi_{\Lambda} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}(2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\varphi_{\Sigma} = 2\kappa\pi + 2\pi$$

Τελικά προκύπτει:

$$y_{\Sigma} = A \cdot \eta \mu \varphi_{\Sigma} \Rightarrow$$

$$y_{\Sigma} = A \eta \mu (2\kappa\pi + 2\pi) \Rightarrow y_{\Sigma} = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού η ένταση του μαγνητικού πεδίου στην περιοχή που βρίσκεται ο κυκλικός αγωγός μειώνεται, μειώνεται και η μαγνητική ροή που διέρχεται μέσα από αυτόν, άρα, σύμφωνα με τον νόμο επαγωγής του Faraday στα άκρα του (Ζ) και (Δ) αναπτύσσεται Η.Ε.Δ. από

επαγωγή. Επειδή έχουμε κλειστό κύκλωμα, αυτό θα διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα το οποίο θα πρέπει να υπακούει στον κανόνα του Lenz και να αντιστέκεται στο αίτιο που το προκάλεσε το οποίο είναι η μείωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου στην περιοχή του κυκλικού αγωγού. Για να γίνει αυτό, θα πρέπει ο κυκλικός αγωγός να δημιουργήσει μαγνητικό πεδίο με δυναμικές γραμμές που έχουν φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα, ώστε να μην αφήσει την ένταση του μαγνητικού πεδίου σ' αυτή την περιοχή να μειωθεί. Από τον κανόνα του δεξιού χεριού προκύπτει ότι η φορά της έντασης του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ είναι από το άκρο (Λ) προς το άκρο (Κ) και η πολικότητα των (Δ) και (Ζ) είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

Για την ένταση του ρεύματος έχουμε:

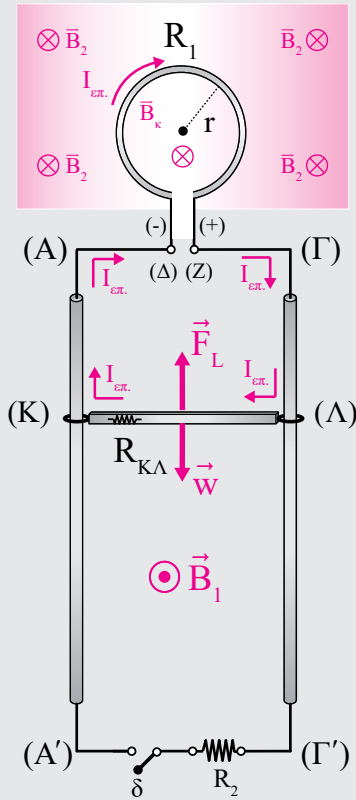
$$\begin{aligned} \frac{\Delta B_2}{\Delta t} &= \frac{B_{2(\text{τελ.})} - B_{2(\text{αρχ.})}}{\Delta t} = \\ &= \frac{4 - 0, 2\pi \cdot t_{\text{τελ.}} - 4 + 0, 2\pi \cdot t_{\text{αρχ.}}}{\Delta t} = \\ &= \frac{-0, 2\pi \cdot (t_{\text{τελ.}} - t_{\text{αρχ.}})}{\Delta t} = \frac{-0, 2\pi \cdot \Delta t}{\Delta t} \Rightarrow \\ \frac{\Delta B_2}{\Delta t} &= -0, 2\pi \frac{\text{T}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Για την Η.Ε.Δ. από επαγωγή, έχουμε:

$$\begin{aligned} E_{\text{επ}} &= N \frac{|\Delta \Phi|}{\Delta t} = N \frac{|\Delta B_2| \cdot A}{\Delta t} = N \frac{|\Delta B_2| \cdot \pi r^2}{\Delta t} \Rightarrow \\ E_{\text{επ}} &= 8 \text{ V} \end{aligned}$$

Για το επαγωγικό ρεύμα, προκύπτει:

$$I_{\text{επ}} = \frac{E_{\text{επ}}}{R_{\text{ολ.}}} \Rightarrow I_{\text{επ}} = \frac{E_{\text{επ}}}{R_1 + R_{\text{ΚΛ}}} \Rightarrow I_{\text{επ}} = 2 \text{ A}$$



Α2. Για να ισορροπεί ο αγωγός ΚΛ πρέπει να ισχύει $\Sigma \vec{F} = 0$. Στον αγωγό ασκούνται το βάρος και η δύναμη Laplace που πρέπει να είναι αντίθετες. Σύμφωνα με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού, για να έχει η δύναμη Laplace φορά προς τα πάνω πρέπει η φορά των δυναμικών γραμμών του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}_1$ να είναι από τη σελίδα προς τον αναγνώστη. Ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow F_L = w \Rightarrow B_1 I_{\text{επ}} l = mg \Rightarrow$$

$$B_1 = \frac{mg}{I_{\text{επ}} l} \Rightarrow B_1 = 2 \text{ T}$$

Α3. Όταν η ένταση B_2 του ομογενούς μαγνητικού πεδίου, που υπάρχει στον χώρο του κυκλικού αγωγού, μηδενίζεται, ο αγωγός αρχίζει να κινείται προς τα κάτω επιταχυνόμενος λόγω του βάρους του.

Λόγω της κίνησης του αγωγού ΚΛ, αφού αυτός βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές του γραμμές, στα άκρα του αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή.

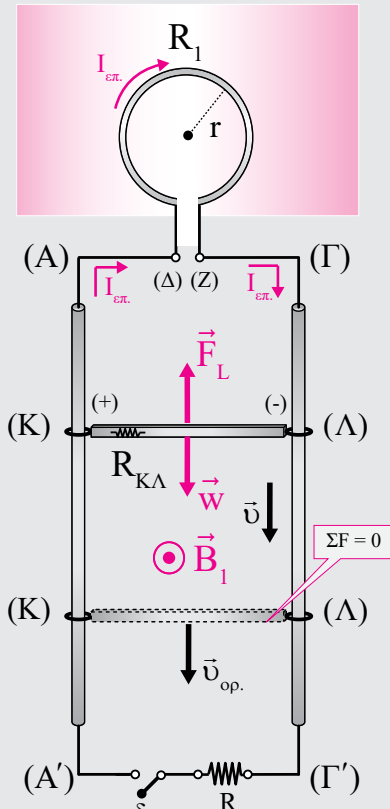
$$E_{\text{επ.}} = B_1 v l (1)$$

και πολικότητας που φαίνεται στο σχήμα.

Η τάση αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα το κύκλωμα να διαρρέεται από ρεύμα (επαγωγικό):

$$I_{\text{επ.}} = \frac{E_{\text{επ.}}}{R_{\text{ολ.}}} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} I_{\text{επ.}} = \frac{B_1 v l}{R_1 + R_{\text{ΚΛ}}} (2)$$

και φοράς που φαίνεται στο σχήμα.



Επειδή ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο θα του ασκηθεί δύναμη Laplace μέτρον:

$$F_L = B_1 I_{\text{επ.}} l \Rightarrow F_L = \frac{B_1^2 l^2}{R_1 + R_{\text{ΚΛ}}} v (3)$$

και φοράς που φαίνεται στο σχήμα.

Ο αγωγός επιταχύνεται άρα:

$$v \uparrow \Rightarrow E_{\text{επ.}} \uparrow \Rightarrow I_{\text{επ.}} \uparrow \Rightarrow F_L \uparrow \Rightarrow \Sigma F \downarrow \Rightarrow a \downarrow$$

Η κίνηση που θα εκτελέσει ο αγωγός είναι ευθύγραμμη μη ομαλά επιταχυνόμενη με συνεχώς μειούμενη επιτάχυνση.

Κάποια στιγμή η επιτάχυνση θα γίνει μηδέν, όταν και η συνισταμένη δύναμη γίνει μηδέν, οπότε από εκεί και μετά ο αγωγός θα εκτελέσει Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με σταθερή (οριακή) ταχύτητα.

Υπολογισμός οριακής ταχύτητας:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_L = mg \Rightarrow \frac{B_1^2 l^2}{R_1 + R_{\text{ΚΛ}}} v_1 = mg \Rightarrow$$

$$v_1 = \frac{mg(R_1 + R_{\text{ΚΛ}})}{B_1^2 l^2} \Rightarrow v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Δ4. Όταν κλείνουμε τον διακόπτη δ η ολική αντίσταση του κυκλώματος μικραίνει.

$$R'_{\text{ολ.}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_{\text{ΚΛ}} = 3\Omega < R_{\text{ολ.}} = 4\Omega$$

Από τη σχέση $I_{\text{επ.}} = \frac{B_1 v l}{R'_{\text{ολ.}}}$ προκύπτει ότι το

ρεύμα μεγαλώνει αφού μικραίνει η αντίσταση του κυκλώματος άρα και η δύναμη Laplace. Έτσι ο αγωγός εκτελεί ευθύγραμμη μη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με συνεχώς μειούμενη επιτάχυνση. Κάποια στιγμή, πάλι η συνισταμένη των δυνάμεων θα είναι μηδέν, οπότε ο αγωγός ΚΛ θα αποκτήσει νέα οριακή ταχύτητα.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F'_L = mg \Rightarrow$$

$$\frac{B_1^2 l^2}{R'_{\text{ολ.}}} v_2 = mg \Rightarrow v_2 = \frac{mg R'_{\text{ολ.}}}{B_1^2 l^2} \Rightarrow$$

$$v_2 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η τάση στα άκρα του αγωγού ΚΛ είναι:

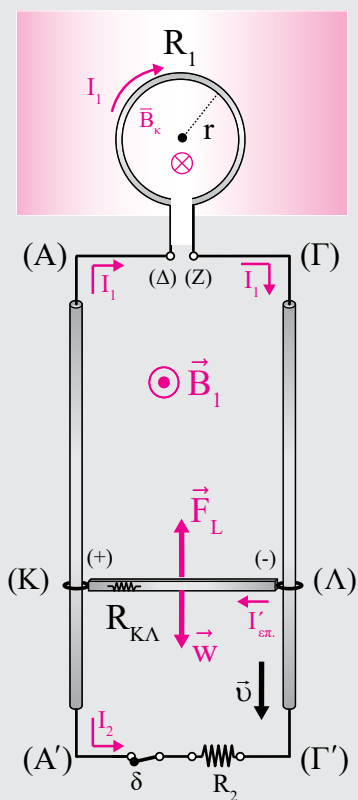
$$\begin{aligned} V_{\text{ΚΛ}} &= E_{\text{επ.}} - I_{\text{επ.}} R_{\text{ΚΛ}} = \\ &= B_1 v_2 l - \frac{B_1 v_2 l}{R'_{\text{ολ.}}} R_{\text{ΚΛ}} \Rightarrow V_{\text{ΚΛ}} = 4V \end{aligned}$$

$$I_1 = \frac{V_{\text{ΚΛ}}}{R_1} = \frac{4}{3} \text{ A}$$

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού αγωγού, όταν ο αγωγός ΚΛ κινείται με τη νέα σταθερή του ταχύτητα $\vec{v}_2$, είναι:

$$B_K = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I_1}{r} \cdot N \Rightarrow$$

$$B_K = \frac{32}{3} \cdot 10^{-5} \text{ T}$$



Δ5. Έχουμε:

$$P_2 = P_{2(\text{τελ.})} + 21\%P_{2(\text{τελ.})} \Rightarrow$$

$$P_2 = 121\%P_{2(\text{τελ.})} = 1,21P_{2(\text{τελ.})} \Rightarrow$$

$$I_2'^2 R_2 = 1,21 \cdot I_2^2 R_2 \Rightarrow$$

$$I_2' = 1,1 \cdot I_2 \Rightarrow \frac{V'_{\text{ΚΛ}}}{R_2} = 1,1 \cdot \frac{V_{\text{ΚΛ}}}{R_2} \Rightarrow$$

$$V'_{\text{ΚΛ}} = 1,1 \cdot V_{\text{ΚΛ}} = 4,4 \text{ V}$$

Όμως

$$V'_{\text{ΚΛ}} = E'_{\text{επ.}} - I'_{\text{επ.}} R_{\text{ΚΛ}} = B_1 v l - \frac{B_1 v l}{R'_{\text{ολ.}}} R_{\text{ΚΛ}} \Rightarrow$$

$$4,4 = 2v - \frac{2v}{3} \Rightarrow 4,4 = \frac{4v}{3} \Rightarrow v = 3,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για τον ρυθμό μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του αγωγού έχουμε:

$$\frac{\Delta U_{\text{βαρ.}}}{\Delta t} = \frac{-\Delta W_{\text{w}}}{\Delta t} = \frac{-mg \cdot \Delta y}{\Delta t} = -mgv \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta U_{\text{βαρ.}}}{\Delta t} = -13,2 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

15ο Διαγώνισμα (Δ15)

ΘΕΜΑ Α

A1. β), A2. δ), A3. β), A4. γ)

A5. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **γ**).

Δικαιολόγηση

Κατά τη διάρκεια της περιστροφής του συστήματος της αβαρούς ράβδου και των δύο μεταλλικών δακτυλίων, ασκούνται τα βάρη και οι τάσεις στα δύο άκρα του νήματος που συγκρατούν τους δύο δακτυλίους. Οι δυνάμεις αυτές δεν προκαλούν ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής του συστήματος που είναι το μέσο της ράβδου. Έτσι, η στροφορμή όλου του συστήματος παραμένει σταθερή και πριν αλλά και μετά που θα κόψουμε το νήμα και οι δύο δακτύλιοι σταματήσουν τελικά στα άκρα της ράβδου.

$$\vec{L}_{\pi\pi\nu} = \vec{L}_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow 2m_1 v \frac{L}{4} = 2m_1 v' \frac{L}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{v}{2} = v' \Rightarrow \frac{\omega \frac{L}{4}}{2} = \omega' \frac{L}{2} \Rightarrow \omega = 4\omega' \Rightarrow$$

$$2\pi f = 4 \cdot 2\pi f' \Rightarrow f = 4f'$$

Η ποσοστιαία επί τοις εκατό μεταβολή της συχνότητας περιστροφής του συστήματος μετά τη μετακίνηση των δακτυλίων είναι:

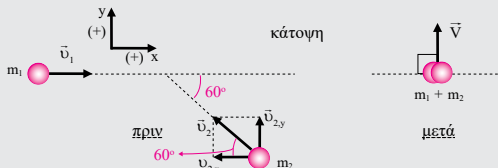
$$\Pi\% = \frac{f' - f}{f} \cdot 100\% = \frac{f' - 4f'}{4f'} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi\% = -75\%$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Αναλύουμε την ταχύτητα του σώματος m_2 σε δύο κάθετες συνιστώσες, όπως φαίνεται στο σχήμα, και στη συνέχεια εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης της Ορμής σε κάθε άξονα χωριστά.



Α.Δ.Ο. άξονας x:

$$\vec{p}_{ολ.(πριν),x} = \vec{p}_{ολ.(μετά),x} \Rightarrow$$

$$m_1 v_1 - m_2 v_{2,x} = 0 \Rightarrow$$

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 \cdot \sin 60^\circ \quad m_2 = 2m_1 \Rightarrow$$

$$m_1 v_1 = 2m_1 v_2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow v_1 = v_2 \quad (1)$$

Α.Δ.Ο. άξονας y:

$$\vec{p}_{ολ.(πριν),y} = \vec{p}_{ολ.(μετά),y} \Rightarrow$$

$$m_2 v_{2,y} = (m_1 + m_2) V \quad m_2 = 2m_1 \Rightarrow$$

$$2m_1 v_2 \cdot \sin 60^\circ = (m_1 + 2m_1) V \Rightarrow$$

$$2m_1 v_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3m_1 V \Rightarrow V = v_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας των δύο σωμάτων που έγινε θερμότητα είναι:

$$\Pi\% = \frac{Q}{K_{ολ.(πριν)}} \cdot 100\% = \frac{K_{ολ.(πριν)} - K_{ολ.(μετά)}}{K_{ολ.(πριν)}} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2} \cdot 100\% \quad m_2 = 2m_1$$

$$= \frac{m_1 v_1^2 + 2m_1 v_2^2 - (m_1 + 2m_1) V^2}{m_1 v_1^2 + 2m_1 v_2^2} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{v_1^2 + 2v_2^2 - 3V^2}{v_1^2 + 2v_2^2} \cdot 100\% \stackrel{(1),(2)}{=} =$$

$$= \frac{v_1^2 + 2v_2^2 - 3 \left(v_2 \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2}{v_1^2 + 2v_2^2} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi\% = \frac{200}{3} \%$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Ισχύει:

$$P = \frac{E_{ολ}}{t} \Rightarrow P = \frac{Nhf}{t} \Rightarrow \frac{N}{t} = \frac{P}{hf} \quad (1)$$

Επίσης έχουμε:

$$I = \frac{q}{t} \Rightarrow I = \frac{N|q_e|}{t} \Rightarrow I = \frac{P|q_e|}{hf}$$

Ισχύει:

$$P' = 2P$$

Τελικά προκύπτει:

$$I' = \frac{P'|q_e|}{hf} \Rightarrow I' = \frac{2P|q_e|}{hf} \Rightarrow I' = 2I$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από διάγραμμα έχουμε:

$$\frac{3T}{2} = 0,3 \Rightarrow T = 0,2\text{s}$$

Ισχύει:

$$v_\delta = \frac{x_K}{t_K} \Rightarrow v_\delta = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Έχουμε:

$$\lambda = v_\delta T \Rightarrow \lambda = 0,1\text{m}$$

Η εξίσωση του κύματος είναι η:

$$y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,5 \eta \mu 2\pi (5t - 10x) \text{ (S.I.)}$$

Γ2. Ισχύει:

$$t_\Sigma = \frac{x_\Sigma}{v_\delta} \Rightarrow t_\Sigma = 4\text{s}$$

Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_1 :

$$t_1 = t_\Sigma + \frac{3T}{4} \Rightarrow t_1 = 4,15\text{s}$$

Ισχύει:

$$\varphi_1 = 2\pi \frac{t_1}{T} - 2\pi \frac{x}{\lambda} \Rightarrow \varphi_1 = 41,5\pi - 20\pi x \text{ (S.I.)} (1)$$

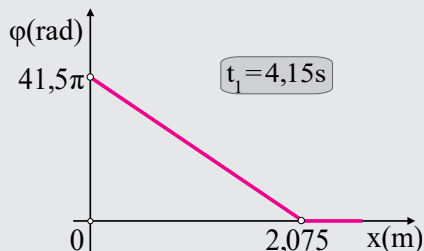
Θέτοντας στη σχέση (1), όπου $x = 0$, προκύπτει:

$$\varphi_1 = 41,5\pi \text{ rad}$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $\varphi_1 = 0$, προκύπτει:

$$0 = 41,5\pi - 20\pi x \Rightarrow x = 2,075\text{m}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



Γ3. Ισχύει:

$$t_2 = t_\Sigma + \frac{9T}{4} \Rightarrow t_2 = 4,45\text{s}$$

Προκύπτει:

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = \frac{t_2 - t_K}{T} \Rightarrow N = \frac{t_2 - \frac{x_K}{v_\delta}}{T} \Rightarrow$$

$$N = 12,25 \text{ ταλ.}$$

Οι ολοκληρωμένες ταλαντώσεις θα είναι **12**.

Γ4. Ισχύει:

$$\Delta\varphi_{K\Sigma} = \varphi_K - \varphi_\Sigma \Rightarrow 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = \varphi_K - \varphi_\Sigma \Rightarrow$$

$$\varphi_K - \varphi_\Sigma = \left[2\pi \frac{(2-1)}{0,1} \right] \Rightarrow$$

$$\varphi_K - \varphi_\Sigma = 20\pi \text{ rad}$$

Προκύπτει:

$$\varphi_K = \varphi_\Sigma + 20\pi \text{ rad} (2)$$

Για τη φάση του σημείου Σ έχουμε $v_\Sigma = 0$ και $a_\Sigma > 0$ επομένως $y_\Sigma = -A$. Προκύπτει:

$$y_\Sigma = A \cdot \eta \mu \varphi_\Sigma \Rightarrow -A = A \cdot \eta \mu \varphi_\Sigma \Rightarrow$$

$$\varphi_K = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει:

$$\varphi_K = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} + 20\pi$$

Για την ταχύτητα του σημείου Κ τελικά προκύπτει:

$$v_K = \omega A \cdot \sigma \nu \varphi_K \Rightarrow$$

$$v_K = \omega A \cdot \sigma \nu \left(2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} + 20\pi \right) \Rightarrow$$

$$v_K = 0$$

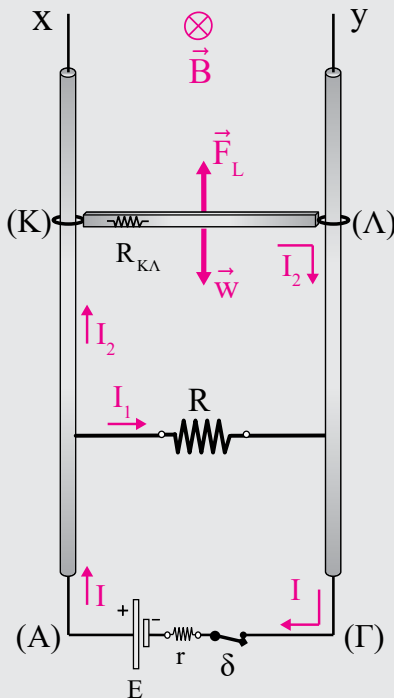
ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ο αγωγός ισορροπεί με την επίδραση του βάρους και της δύναμης Laplace, επομένως:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_L = -m\vec{g} \Rightarrow F_L = mg (1) \text{ (κατά μέ-}$$

τρο).

Για να προκύπτει η $\vec{F}_L$ με φορά προς τα πάνω με το ρεύμα στον αγωγό ΚΛ να έχει φορά από το (Κ) προς το (Λ) πρέπει οι μαγνητικές γραμμές να έχουν φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.



Η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$R_{\text{ολ.}} = \frac{R_{\text{ΚΛ}} \cdot R}{R_{\text{ΚΛ}} + R} + r \Rightarrow R_{\text{ολ.}} = 2\Omega$$

Από τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα ισχύει:

$$I = \frac{E}{R_{\text{ολ.}}} \Rightarrow I = 4\text{ A}$$

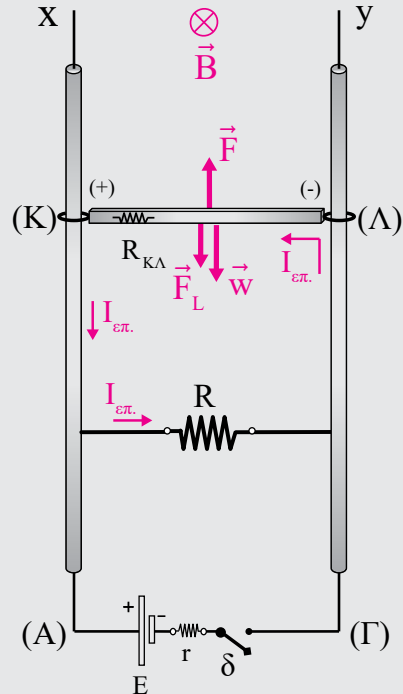
$$\text{Ισχύει } V_{\text{ΚΛ}} = V_{\pi} = E - Ir \Rightarrow V_{\text{ΚΛ}} = 4\text{ V}$$

$$I_2 = \frac{V_{\text{ΚΛ}}}{R_{\text{ΚΛ}}} \Rightarrow I_2 = 2\text{ A}$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$BI_2 l = mg \Rightarrow B = \frac{mg}{I_2 l} \Rightarrow \mathbf{B = 1\text{ T}}$$

Δ2. Καθώς ο αγωγός κινείται προς τα πάνω έχουμε μεταβολή της μαγνητικής ροής, άρα εμφανίζεται Η.Ε.Δ. από επαγωγή στα άκρα του αγωγού και επαγωγικό ρεύμα, με αποτέλεσμα να ασκείται στον αγωγό δύναμη Laplace εκτός από το βάρος και τη δύναμη $\vec{F}$.



Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε:

$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow F - F_L - mg = m\alpha \Rightarrow$$

$$F = F_L + mg + m\alpha \Rightarrow$$

$$F = BI_{\text{επ.}} l + mg + m\alpha \Rightarrow$$

$$F = B \frac{E_{\text{επ.}}}{R'_{\text{ολ.}}} l + mg + m\alpha(2)$$

Όμως: $E_{\text{επ.}} = Bvl$ και $R'_{\text{ολ.}} = R + R_{\text{ΚΛ}}$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

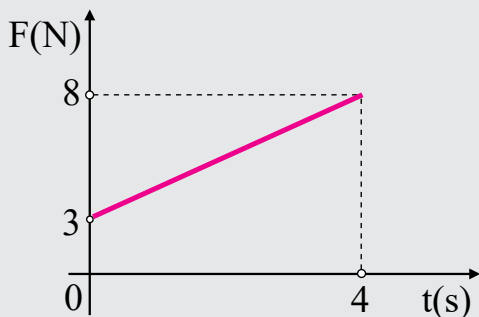
$$F = \frac{B^2 v l^2}{R'_{\text{ολ.}}} + mg + m\alpha$$

και ισχύει $v = \alpha t$ οπότε:

$$F = \frac{B^2 \alpha l^2}{R'_{\text{ολ.}}} + mg + m\alpha \Rightarrow$$

$$F = 1,25t + 3 \text{ (S.I.)}$$

Η γραφική παράσταση $F = f(t)$ παριστάνεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



Δ3. Το επαγωγικό φορτίο που μετακινήθηκε από $t = 0$ έως $t = 4\text{s}$ είναι

$$q_{\text{επ}} = \frac{\Delta\Phi}{R'_{\text{ολ.}}} \Rightarrow q_{\text{επ}} = \frac{B \cdot \Delta A}{R'_{\text{ολ.}}} \Rightarrow$$

$$q_{\text{επ}} = \frac{Bl\Delta x}{R'_{\text{ολ.}}} \Rightarrow q_{\text{επ}} = \frac{Bl \cdot \frac{1}{2} \alpha t^2}{R'_{\text{ολ.}}} \Rightarrow$$

$$q_{\text{επ}} = 10\text{C}$$

Δ4. Τη χρονική στιγμή t_1 η δύναμη $\vec{F}$ σταθεροποιείται στην τιμή $F = 8\text{N}$.

$$\text{Ισχύει } \Sigma F = F - \frac{B^2 l^2 v}{R'_{\text{ολ.}}} - mg$$

επομένως το ρεύμα της ΣF ελαττώνεται καθώς αυξάνεται η ταχύτητα του αγωγού. Τη χρονική στιγμή t_2 είναι $\frac{dK}{dt} = 0$

$$\text{Όμως } \frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \Sigma \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = \Sigma \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Επειδή $v \neq 0$ είναι $\Sigma F = 0$.

$$\text{Άρα } \frac{B^2 l^2 v_2}{R + R_{\text{ΚΛ}}} = F - mg \Rightarrow v_2 = 24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Δ5. } v_3 = \frac{7v_0}{8} = 21 \text{ m/s}$$

$$\frac{\Delta E_{\text{προσφ.}}}{\Delta t} = \frac{\Delta W_F}{\Delta t} = P_F = F \cdot v_3 \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta E_{\text{προσφ.}}}{\Delta t} = 168 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

$$\frac{\Delta Q_R}{\Delta t} = P_R = I_{\text{επ.}}^2 R \Rightarrow \frac{\Delta Q_R}{\Delta t} = 55,125 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{W_{\Sigma F}}{\Delta t} = \Sigma F \cdot v_3 =$$

$$= (F - F_L - mg) \cdot v_3 =$$

$$= \left(F - \frac{B^2 l^2 v_0}{R + R_{\text{ΑΓ}}} - mg \right) \cdot v_3 \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = 15,75 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

16ο Διαγώνισμα (Δ16)

ΘΕΜΑ Α

A1. δ), A2. β), A3. δ), A4. γ)

A5. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Ισχύει:

$$P = \frac{Nhf}{t} \Rightarrow P = \frac{Nhc}{\lambda t} (1)$$

Το μήκος κύματος μειώνεται, άρα από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η ισχύς αυξάνεται κατά 40% αρά και η συχνότητα αυξάνεται κατά 40%.

Αρχικά ισχύει:

$$K = hf - \phi (2)$$

Τελικά ισχύει:

$$1,8K = 1,4hf - \varphi(3)$$

Από τις σχέσεις 2), (3) έχουμε:

$$\varphi = K$$

B2. Α. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

$$E_{10} = E_0 - 75\%E_0 \Rightarrow E_0 = 25\%E_0 = \frac{E_0}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}DA_{10}^2 = \frac{1}{2}DA_0^2 \Rightarrow$$

$$A_{10}^2 = \frac{A_0^2}{4} \Rightarrow A_{10} = \frac{A_0}{2}$$

B. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

$$A_{10} = A_0 \cdot e^{-(\ln 2) \cdot 10T} \Rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 \cdot e^{-(\ln 2) \cdot 10T} \Rightarrow$$

$$e^{-(\ln 2) \cdot 10T} = \frac{1}{2} \Rightarrow -(\ln 2) \cdot 10T = -(\ln 2) \Rightarrow$$

$$T = 0,1s$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Η φάση του σημείου (Κ) σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$\varphi_{(K)} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{(K)}}{\lambda} \right) = \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_{(K)}}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\varphi_{(K)} = \frac{2\pi t}{T} - \frac{4\pi}{\lambda}(1)$$

Από το διάγραμμα προκύπτει:

$$(1) \Rightarrow \begin{matrix} t=0, \varphi_{(K)} = -10\pi \text{ rad} \\ -10\pi = -\frac{4\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 0,4m \end{matrix}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{matrix} t=1s, \varphi_{(K)} = 0 \\ 0 = \frac{2\pi \cdot 1}{T} - \frac{4\pi}{0,4} \Rightarrow T = 0,2s \end{matrix}$$

Το σημείο (Λ) βρίσκεται δεξιότερα κατά 0,7m από το (Κ) δηλαδή κατά απόσταση

$$\lambda + \frac{3\lambda}{4} = \frac{7\lambda}{4}.$$

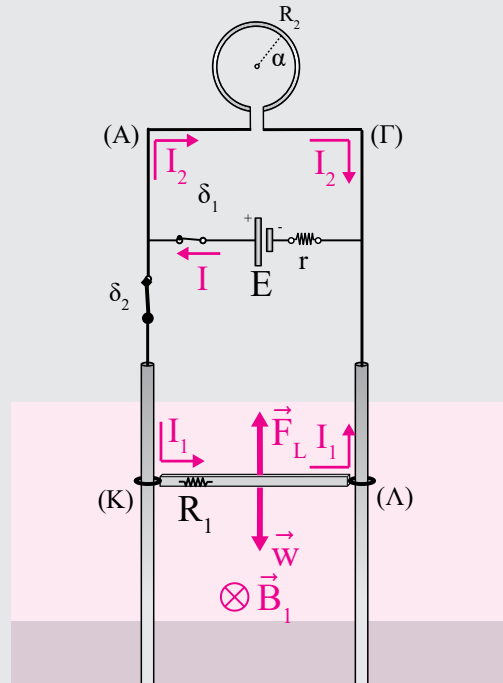
Άρα το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το κύμα για να πάει από το (Κ) στο (Λ) είναι

$$T + \frac{3T}{4} = \frac{7T}{4}, \text{ οπότε το (Κ) θα έχει διανύσει}$$

απόσταση $4\lambda + 3\lambda = 7\lambda = 1,4m$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



ι) Όταν κλείσουν οι διακόπτες ο αγωγός διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα σταθερής έντασης I_1 . Ο αγωγός διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, οπότε ασκείται σε αυτόν δύναμη Laplace την κατεύθυνση της οποίας την προσδιορίζουμε με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Ο αγωγός ισορροπεί άρα:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_L + \vec{w} = 0 \Rightarrow F_L - w = 0 \Rightarrow$$

$$F_L = w \Rightarrow B_1 \ell = mg \Rightarrow I_1 = 1A$$

Οι αντιστάσεις R_1 και R_2 είναι παράλληλα συνδεδεμένες οπότε ισχύει:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow I_1 R_1 = I_2 R_2 \Rightarrow I_2 = 1A.$$

Από τον 1^ο κανόνα Kirchhoff έχουμε:

$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow I = 2A$$

Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα ισχύει:

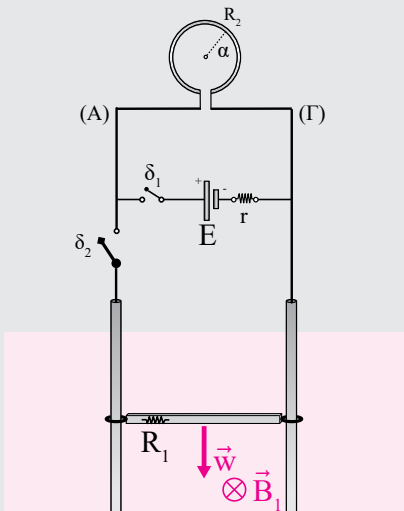
$$I = \frac{E}{R_{ολ}} \Rightarrow E = I \cdot \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + r \right) \Rightarrow E = 6V$$

ii) Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού αγωγού είναι:

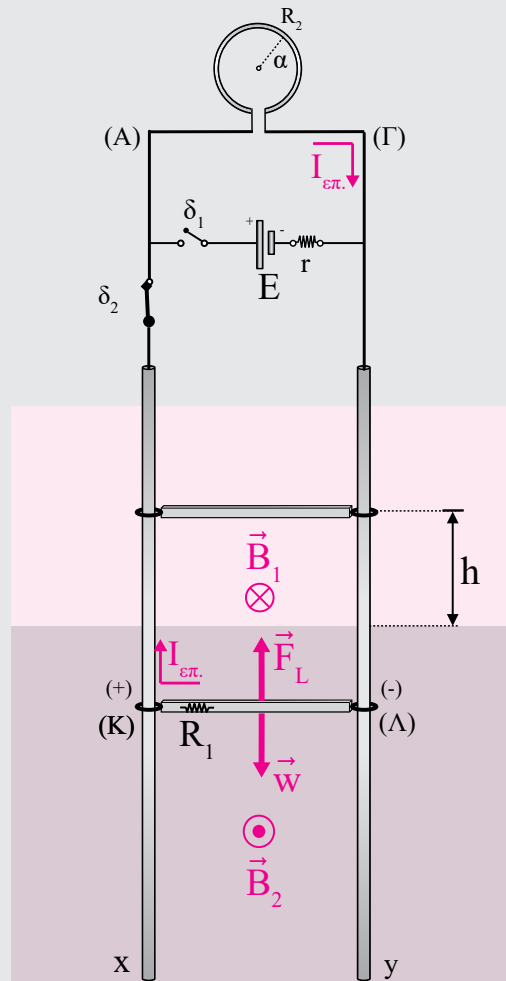
$$B = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi I_2}{4\pi \alpha} \Rightarrow B = 10^{-5} T$$

Γ2. i) Τη στιγμή που ανοίγουν και οι δύο διακόπτες ο αγωγός αρχίζει να κινείται μόνο με την επίδραση του βάρους του και πραγματοποιεί ελεύθερη πτώση μέχρι την στιγμή που εισέρχεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}_2$. Η ταχύτητά του την στιγμή που εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο ισούται με:

$$v = g\Delta t \Rightarrow v = 2 \frac{m}{s}$$



ii) Τη χρονική στιγμή που κλείνει ο διακόπτης δ_2 εξαιτίας της κίνησης του αγωγού ΚΛ στο μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}_2$ αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή $E_{επ} = Bv\ell$, το κύκλωμα διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα $I_{επ}$ και στον αγωγό ασκείται δύναμη Laplace η οποία, από τον κανόνα του Lenz, αντιτίθεται στην κίνηση του.



Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στον αγωγό ΚΛ τη χρονική στιγμή που εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}_2$ ισούται με:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_L + \vec{w} \Rightarrow$$

$$\Sigma F = F_L + w = mg - B_2 I_{\varepsilon\pi} \ell =$$

$$= mg - B_2 \frac{B_2 v \ell}{R_1 + R_2} \ell = 0$$

Άρα ο αγωγός εκτελεί **ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα $v = 2 \frac{m}{s}$** .

Γ3. Η τάση του αγωγού ΚΛ ισούται με:

$$V_{KL} = I_{\varepsilon\pi} R_2 \Rightarrow V_{KL} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_1 + R_2} R_2 \Rightarrow$$

$$V_{KL} = \frac{B_2 v \ell}{R_1 + R_2} R_2 \Rightarrow$$

$$V_{KL} = 2V$$

Η θερμική ισχύ που καταναλώνει ο αγωγός κατά την κίνησή του στο μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}_2$ ισούται με:

$$P_{\theta} = I_{\varepsilon\pi}^2 R_1 \Rightarrow P_{\theta} = \left(\frac{B_2 v \ell}{R_1 + R_2} \right)^2 R_1 \Rightarrow P_{\theta} = 1W$$

Γ4. Για το επαγωγικό φορτίο που διέρχεται από τη διατομή του αγωγού ΚΛ ισχύει:

$$q_{\varepsilon\pi} = I_{\varepsilon\pi} \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{q_{\varepsilon\pi}}{I_{\varepsilon\pi}} \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{q_{\varepsilon\pi}}{\frac{B_2 v \ell}{R_1 + R_2}} \Rightarrow \Delta t = 2s$$

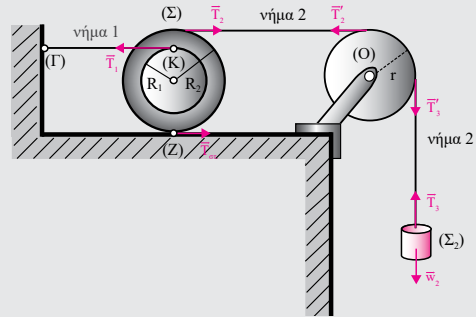
Η θερμότητα που εκλύεται λόγω φαινομένου joule στο κυκλικό συμμάτινο πλαίσιο είναι:

$$Q = I_{\varepsilon\pi}^2 R_2 \Delta t \Rightarrow$$

$$Q = \left(\frac{B_2 v \ell}{R_1 + R_2} \right)^2 R_2 \Delta t \Rightarrow Q = 2J$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που δέχεται το στερεό, η τροχαλία και το σώμα (Σ_2).

Αφού το σώμα ισορροπεί, πρέπει:

$$\Sigma F_2 = 0 \Rightarrow T_3 = m_2 g \Rightarrow T_3 = 30N$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές έχουμε:

$$T'_3 = T_3 = 30N$$

Η τροχαλία ισορροπεί οπότε θα πρέπει η συνισταμένη των ροπών ως προς το κέντρο της (O) να κάνει μηδέν. Έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow T'_2 \cdot r = T'_3 \cdot r \Rightarrow$$

$$T'_2 = T'_3 \Rightarrow T'_2 = 30N$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές έχουμε:

$$T_2 = T'_2 = 30N$$

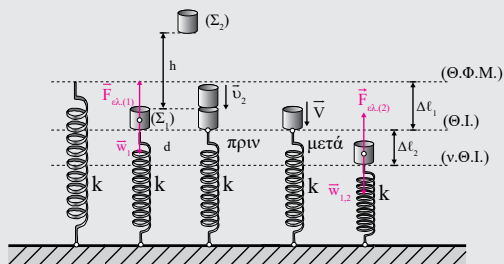
Το στερεό ισορροπεί οπότε η συνισταμένη των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο του είναι μηδέν, άρα και ως προς το σημείο (Z).

Έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(Z)} = 0 \Rightarrow T_1 \cdot (R_1 + R_2) = T_2 \cdot 2R_2 \Rightarrow$$

$$T_1 \cdot 3R_1 = T_2 \cdot 4R_1 \Rightarrow 3T_1 = 4T_2 \Rightarrow T_1 = 40N$$

Δ2.



Για την κίνηση του σώματος (Σ_2) από τη στιγμή που κόβουμε το νήμα και μέχρι την πλαστική του κρούση με το σώμα (Σ_1), εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας.

$$\Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow K_{\text{τελ.}} - K_{\text{αρχ.}} = W_{w_2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 - 0 = m_2 g h \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{2gh} \Rightarrow v_2 = \frac{4\sqrt{10}}{3} \text{ m/s}$$

Τα σώματα Σ_2 και Σ_1 συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά. Σύμφωνα με την Αρχή Διατήρησης της Ορμής ισχύει:

$$\vec{p}_{\text{ολ. πριν}} = \vec{p}_{\text{ολ. μετά}} \Rightarrow \vec{p}_2 + \vec{p}_1 = \vec{p}_{\text{συσ.}} \Rightarrow$$

$$m_2 v_2 = (m_2 + m_1) V \Rightarrow V = \sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Δ3. Στην κατάσταση ισορροπίας του σώματος (Σ_1), έχουμε:

$$(\Theta.Ι.): \Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{\text{ελ.}(1)} + \vec{w}_1 = 0 \Rightarrow$$

$$F_{\text{ελ.}(1)} - w_1 = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ.}(1)} = w_1 \Rightarrow$$

$$k \Delta l_1 = m_1 g (1 \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow \Delta l_1 = 0,1 \text{ m})$$

Για τη νέα θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων (Σ_1) και (Σ_2) ισχύει:

$$(\nu.Θ.Ι.): \Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{\text{ελ.}(2)} + \vec{w}_{1,2} = 0 \Rightarrow$$

$$F_{\text{ελ.}(2)} - w_{1,2} = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ.}(2)} = w_{1,2} \Rightarrow$$

$$k \cdot (\Delta l_1 + \Delta l_2) = (m_1 + m_2) g \Rightarrow$$

$$k \Delta l_1 + k \Delta l_2 = m_1 g + m_2 g \stackrel{(1)}{\Rightarrow} k \Delta l_2 = m_2 g \Rightarrow$$

$$\Delta l_2 = \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow \Delta l_2 = 0,3 \text{ m}$$

Εφαρμόζουμε τη διατήρηση ενέργειας της ταλάντωσης (Α.Δ.Ε.Τ.) για τη θέση που γίνεται η κρούση η οποία απέχει από τη νέα θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων (Σ_1) και (Σ_2) απόσταση $\Delta l_2 = 0,3 \text{ m}$.

$$E = K + U \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 + \frac{1}{2} k \Delta l_2^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) V^2 + k \Delta l_2^2}{k}} \Rightarrow$$

$$A = 0,7 \text{ m}$$

Δ4. Το συσσωμάτωμα θα ακινητοποιηθεί για πρώτη φορά μετά την κρούση στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης του. Στη θέση αυτή η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θα είναι:

$$U_{\text{ελ.}} = \frac{1}{2} k (A + \Delta l_1 + \Delta l_2)^2 \Rightarrow U_{\text{ελ.}} = 60,5 \text{ J}$$

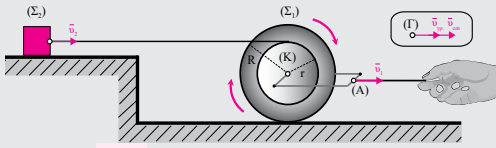
17ο Διαγώνισμα (Δ17)

ΘΕΜΑ Α

A1. γ), A2. β), A3. α), A4. γ)
A5. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **β)**.
 Δικαιολόγηση



Έστω v_1 και v_2 τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωμάτων (Σ_1) και (Σ_2) σε τυχαία χρονική στιγμή.

Κάθε χρονική στιγμή οι ταχύτητες όλων των σημείων του νήματος που συνδέει τα σώματα (Σ_1) και (Σ_2) είναι ίσες, αφού το νήμα είναι διαρκώς τεντωμένο. Ισχύει:

$$v_B (= v_{\text{νημ.}}) = v_{\Gamma} \Rightarrow v_2 = v_{\Gamma} \quad (1)$$

Το στερεό (Σ_1) εκτελεί σύνθετη κίνηση οπότε όλα του τα σημεία (εκτός από το κέντρο μάζας του) κάθε χρονική στιγμή θα έχουν δύο ταχύτητες, μία εξαιτίας της μεταφορικής και μία εξαιτίας της στροφικής του. Έτσι για την ταχύτητα του σημείου (Γ) του στερεού που καταλήγει το νήμα, έχουμε:

$$v_{\Gamma} = v_{\text{cm}} + v_{\text{γρ.}} \quad (2)$$

Όμως το στερεό (Σ_1) κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει, οπότε:

$$v_{\text{cm}} = \omega R \quad \text{και}$$

$$v_{\text{γρ.}} = \omega r \Rightarrow v_{\text{γρ.}} = \omega \frac{R}{2} \Rightarrow v_{\text{γρ.}} = \frac{v_{\text{cm}}}{2}$$

$$(2) \Rightarrow v_{\Gamma} = v_{\text{cm}} + \frac{v_{\text{cm}}}{2} \Rightarrow v_{\Gamma} = \frac{3v_{\text{cm}}}{2}$$

Όμως $v_2 = v_{\Gamma}$ και $v_1 = v_{\text{cm}}$ οπότε τελικά παίρνουμε:

$$v_2 = \frac{3v_1}{2}$$

Κάθε χρονική στιγμή το σώμα (Σ_2) έχει ταχύτητα $v_2 = \frac{3v_1}{2}$ μεγαλύτερη από την ταχύτητα με την οποία κινείται το κέντρο μάζας του στερεού (Σ_1), άρα και για την μετατόπιση

$\Delta x'$ του σώματος (Σ_2) και τη μετατόπιση Δx του στερεού (Σ_1) σε χρονικό διάστημα Δt ισχύει το ίδιο:

$$\Delta x' = \frac{3\Delta x}{2} \Rightarrow \Delta x' = 3\text{m}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Για τη μονοχρωματική ακτινοβολία (Α) εφαρμόζουμε τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein. Έχουμε:

$$K_A = hf_A - \varphi \quad f_A = 2f_0 \quad f_0 = \frac{\varphi}{h} \Rightarrow K_A = 2hf_0 - \varphi \Rightarrow$$

$$K_A = 2h \cdot \frac{\varphi}{h} - \varphi \Rightarrow K_A = \varphi \quad (1)$$

Για τη μονοχρωματική ακτινοβολία (Β) εφαρμόζουμε τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein. Έχουμε:

$$K_B = hf_B - \varphi \quad f_B = 5f_A = 10f_0 \quad f_0 = \frac{\varphi}{h} \Rightarrow K_B = 10hf_0 - \varphi \Rightarrow$$

$$K_B = 10h \cdot \frac{\varphi}{h} - \varphi \Rightarrow K_B = 9\varphi \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$K_B = 9K_A \Rightarrow \frac{1}{2} m_e v_B^2 = 9 \cdot \frac{1}{2} m_e v_A^2 \Rightarrow v_B = 3v_A \quad (3)$$

Για τις ακτίνες R_A και R_B των κυκλικών τροχιών ισχύει:

$$R_A = \frac{m_e v_A}{B|q_e|}$$

και

$$R_B = \frac{m_e v_B}{B|q_e|} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} R_B = \frac{m_e 3v_A}{B|q_e|} \Rightarrow R_B = 3R_A$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ).

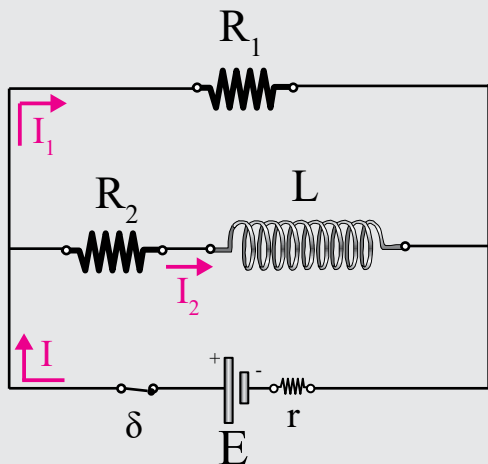
Δικαιολόγηση

Όταν έχει σταθεροποιηθεί η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα ισχύει:

Η συνολική αντίσταση του κυκλώματος ισού-

ται με:

$$R_{ολ} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + r \Rightarrow R_{ολ} = \frac{6R \cdot 2R}{6R + 2R} + \frac{R}{2} \Rightarrow R_{ολ} = 2R$$



Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm ισχύει:

$$I = \frac{E}{R_{ολ}} \Rightarrow I = \frac{E}{2R}$$

Η πολική τάση στα άκρα της πηγής ισούται με:

$$V_{\pi} = E - Ir \Rightarrow V_{\pi} = E - \frac{E}{2R} \cdot \frac{R}{2} \Rightarrow V_{\pi} = \frac{3E}{4}$$

Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει τον κλάδο που βρίσκεται το πηνίο ισούται με:

$$I_2 = \frac{V_{\pi}}{R_2} \Rightarrow I_2 = \frac{3E}{8R} \quad (1)$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ που ανοίγει ο διακόπτης, η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο ισούται με:

$$U_0 = \frac{1}{2} LI_2^2$$

Τη χρονική στιγμή t_1 η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο είναι ίση με το 25% της τιμής που είχε τη χρονική στιγμή $t = 0$, δηλαδή

$$U_1 = 25\% U_0 \Rightarrow \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} LI_2^2 \Rightarrow I = \frac{I_2}{2} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} I = \frac{3E}{16R}$$

Όμως για την ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον βρόγχο του κυκλώματος που περιέχει το πηνίο και τις αντιστάσεις R_1, R_2 έχουμε:

$$I = \frac{|E_{αντ.}|}{R_1 + R_2} \Rightarrow I = \frac{|E_{αντ.}|}{6R + 2R} \stackrel{I = \frac{3E}{16R}}{\Rightarrow} \frac{3E}{16R} = \frac{|E_{αντ.}|}{8R} \Rightarrow |E_{αντ.}| = \frac{3E}{2} \Rightarrow L \left| \frac{di}{dt} \right| = \frac{3E}{2} \Rightarrow \left| \frac{di}{dt} \right| = \frac{3E}{2L}$$

Μετά το άνοιγμα του διακόπτη το ρεύμα μειώνεται οπότε τελικά έχουμε $\frac{di}{dt} = -\frac{3E}{2L}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Υπολογίζουμε την περίοδο του κύματος. Προκύπτει:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2 \cdot \Delta t \Rightarrow T = 0,2s$$

Για την ταχύτητα διάδοσης ισχύει:

$$v_{\delta} = \lambda f \Rightarrow v_{\delta} = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_{\delta} = 2,5 \frac{m}{s}$$

Για το πλάτος της ταλάντωσης ισχύει:

$$s = 2A \Rightarrow A = \frac{s}{2} \Rightarrow A = 0,4m$$

Γράφουμε την εξίσωση του κύματος:

$$y = A \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \eta \mu 2\pi (5t - 2x) (S.I.)$$

Γ2. Για το σημείο (Κ) ισχύει:

$$\Delta \phi_{OK} = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow \Delta \phi_{OK} = 2\pi \frac{x_K - x_0}{\lambda} \Rightarrow$$

ροπές ως προς το σημείο επαφής (B) του καρουλιού με το έδαφος έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(B)} = 0 \Rightarrow F \cdot (R + r) - T_1 \cdot 2R = 0 \Rightarrow$$

$$F \cdot \frac{3R}{2} = T_1 \cdot 2R \quad T_1 = T_1' = 30 \text{ N, νήμα αβαρές} \Rightarrow$$

$$F = \frac{4T_1}{3} = \frac{4 \cdot 30}{3} \Rightarrow F = 40 \text{ N}$$

Δ2. Για τις επιταχύνσεις των σωμάτων ισχύει:

$$v_2 = v_{\nu\eta\mu.(3)} = v_{\gamma\rho.(r)} = \omega r =$$

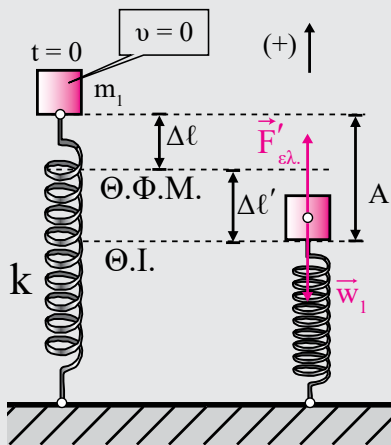
$$= v_{\nu\eta\mu.(2)} = v_{\alpha\nu\omega\tau.} = 2v_{cm} \Rightarrow$$

$$\alpha_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu(r)} \cdot r = 2\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_2 = 2 \frac{m}{s^2}$$

Δ3. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ που τα δύο σώματα m_1 και m_2 αποκολλώνται, το σώμα m_1 θα κινηθεί από την ακινησία προς τα κάτω λόγω του βάρους του και της δύναμης του ελατηρίου. Για τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσής του ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow w_1 = F_{ελ.}' \Rightarrow$$

$$m_1 g = k \cdot \Delta l' \Rightarrow \Delta l' = 0,1 \text{ m}$$



Έτσι τη στιγμή $t = 0$ το σώμα m_1 βρίσκεται στην ακραία θετική του απομάκρυνση. Το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει είναι

$$A = \Delta l + \Delta l' \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

$$k = m_1 \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Υπολογισμός αρχικής φάσης.

$$x = A \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad t=0, x=A \Rightarrow A = A \eta\mu \varphi_0 \Rightarrow$$

$$\eta\mu \varphi_0 = 1 \quad 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα μάζας m_1 είναι:

$$x = A \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$x = 0,2 \eta\mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) (\text{S.I.})$$

Δ4. Η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας είναι:

$$\omega_T = \alpha_{\gamma\omega\nu(r)} t_1 = \frac{\alpha_2}{r} \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_T r}{\alpha_2} = \frac{\pi}{6} \text{ s}$$

Η απομάκρυνση του σώματος μάζας m_1 τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$x_1 = 0,2 \eta\mu \left(10t_1 + \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= 0,2 \eta\mu \left(10 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) = 0,1 \text{ m}$$

Δηλαδή τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα μάζας m_1 βρίσκεται στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου άρα η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή $U_{ελ.} = 0$.

Δ5. Για το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από τη χρονική στιγμή 0 έως τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$W_F = F \cdot \Delta x_A$$

Για τη μετατόπιση του σημείου (A) έχουμε:

$$\Delta x_A = \Delta x_{cm} + \Delta l$$

όπου Δl το μήκος του νήματος 1 το οποίο ξετυλίγεται από τη χρονική στιγμή 0 έως τη χρονική στιγμή t_1 . Όμως ισχύει $\Delta l = \Delta \theta \cdot r$ άρα:

$$\Delta x_A = \Delta x_{cm} + \Delta \theta \cdot r = \Delta x_{cm} + \Delta \theta \cdot \frac{R}{2}$$

Όμως επειδή το καρούλι εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση έχουμε:

$$\Delta x_{cm} = \Delta \theta \cdot R$$

οπότε η τελευταία σχέση δίνει:

$$\Delta x_A = \Delta x_{cm} + \frac{\Delta x_{cm}}{2} = \frac{3\Delta x_{cm}}{2}$$

Τελικά για το έργο της δύναμης $\vec{F}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} W_F &= F \cdot \Delta x_A = \frac{3F\Delta x_{cm}}{2} = \frac{3F \frac{1}{2} \alpha_{cm} t_1^2}{2} = \\ &= \frac{3F\alpha_{cm} t_1^2}{4} \Rightarrow W_F = \frac{25}{3} \text{ J} \end{aligned}$$

18ο Διαγώνισμα (Δ18)

ΘΕΜΑ Α

A1. γ), A2. α), A3. β), A4. γ)
A5. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Α. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Από τη μετατόπιση Compton έχουμε:

$$\Delta \lambda = \lambda_c (1 - \cos \varphi) \Rightarrow$$

$$\Delta \lambda = \lambda_c (1 - 0,6) \Rightarrow \Delta \lambda = 0,4 \lambda_c$$

Το ζητούμενο ποσοστό επί τοις εκατό είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{0,4 \lambda_c}{\lambda_c} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 40\%$$

B. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Για το μήκος κύματος Compton του σκεδαζόμενου φωτονίου προκύπτει:

$$\Delta \lambda = 0,4 \lambda_c \Rightarrow \lambda' - \lambda_c = 0,4 \lambda_c \Rightarrow \lambda' = 1,4 \lambda_c$$

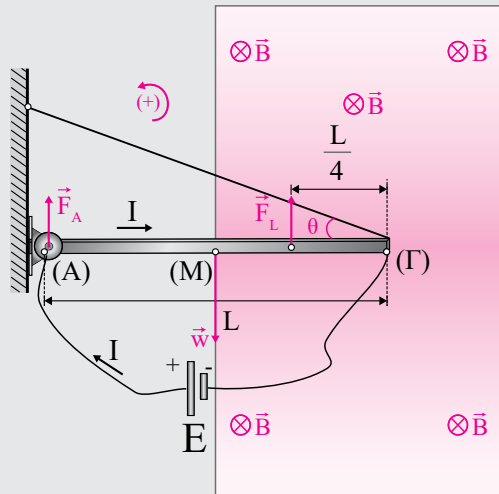
Ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{p'}{p} = \frac{\frac{h}{\lambda'}}{\frac{h}{\lambda}} \Rightarrow \frac{p'}{p} = \frac{\lambda}{\lambda'} \Rightarrow$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{\lambda_c}{1,4 \lambda_c} \Rightarrow \frac{p'}{p} = \frac{5}{7}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η β).

Στην αρχική κατάσταση ισορροπίας ο αγωγός δέχεται το βάρος του $\vec{w}$, τη δύναμη Laplace $\vec{F}_L$ και τη δύναμη από την άρθρωση. Αφού η δύναμη που δέχεται ο αγωγός από την άρθρωση έχει κατακόρυφη διεύθυνση, τότε το νήμα οριακά χαλαρώνει καθώς όλες οι δυνάμεις θα πρέπει να είναι κατακόρυφες.



Ισχύει:

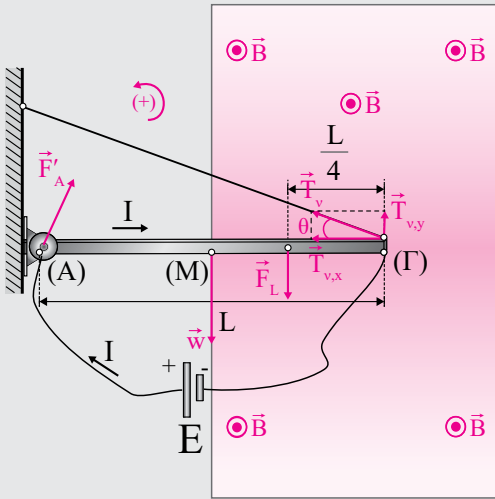
$$\Sigma \vec{\tau}_{(A)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\tau}_w + \vec{\tau}_{F_L} + \vec{\tau}_{F_A} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$-w \frac{L}{2} + F_L \frac{3L}{4} + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$F_L \frac{3}{4} = Mg \frac{1}{2} \Rightarrow F_L = \frac{2Mg}{3} \quad (1)$$

Όταν αντιστρέφουμε τη φορά των δυναμικών γραμμών του μαγνητικού πεδίου η δύναμη Laplace αλλάζει φορά όπως φαίνεται στο

σχήμα αλλά όχι μέτρο.



Στη νέα κατάσταση ισορροπίας του αγωγού έχουμε:

$$\Sigma \vec{\tau}_{(A)} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\vec{\tau}_W + \vec{\tau}_{F_L} + \vec{\tau}_{T_{v,x}} + \vec{\tau}_{T_{v,y}} + \vec{\tau}_{F'_A} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$-w \cdot \frac{L}{2} - F_L \cdot \frac{3L}{4} + 0 + T_{\theta p} \cdot \eta \mu 30^\circ \cdot L = 0 \Rightarrow$$

$$-Mg \cdot \frac{1}{2} - F_L \cdot \frac{3}{4} + T_{\theta p} \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow T_{\theta p} = 2Mg$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η α).

Αν μετακινήσουμε τον ανακλαστήρα ξεκινώντας από το σημείο Ο (μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΠΣ) έτσι ώστε να απέχει απόσταση $H = 0,8\text{m}$ από αυτό, το σημείο Σ παραμένει διαρκώς ακίνητο για τρίτη φορά κατά τη μετακίνησή του από το Ο στο Α οπότε έχουμε ακυρωτική συμβολή στο σημείο Σ με $N = 2$. Ισχύει:

$$(\text{ΠΑΣ}) - (\text{ΠΟΣ}) = (2N + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$2(\text{ΠΑ}) - (\text{ΠΟΣ}) = \frac{5\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$2\sqrt{H^2 + \left(\frac{S}{2}\right)^2} - S = \frac{5\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$2\sqrt{0,8^2 + \left(\frac{1,2}{2}\right)^2} - 1,2 = \frac{5\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 0,32\text{m}$$

$$\text{Όμως } v_\delta = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v_\delta}{\lambda} \Rightarrow f = 6,25\text{Hz}$$

Το σημείο Σ για να κάνει ταλάντωση με μέγιστο πλάτος πρέπει:

$$(\text{ΠΑΣ}) - (\text{ΠΟΣ}) = N\lambda' \Rightarrow$$

$$\sqrt{H^2 + \left(\frac{S}{2}\right)^2} - S = N \cdot \frac{v_\delta}{f_{\text{,,}}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{0,8^2 + \left(\frac{1,2}{2}\right)^2} - 1,2 = N \cdot \frac{2}{f'} \Rightarrow$$

$$f' = 2,5N$$

Θέλω $f' > f$ με το ελάχιστο $N \in \mathbb{N}$ άρα $N = 3$ οπότε τελικά παίρνουμε $f' = 7,5\text{Hz}$.

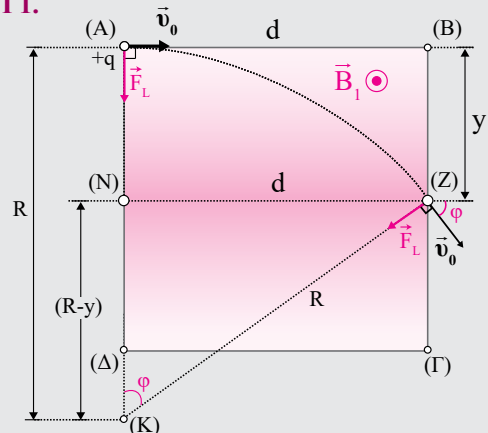
Το ελάχιστο ποσοστό αύξησης της συχνότητας ταλάντωσης της πηγής είναι:

$$\Pi\% = \frac{f' - f}{f} \cdot 100\% = \frac{7,5 - 6,25}{6,25} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi\% = 20\%$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



Για την επίκεντρη γωνία που διαγράφει το σωματίδιο στο πεδίο (1) έχουμε:

$$\varphi = \omega t \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{T_1} t \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{\frac{2\pi m}{B_1 q}} t \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{qB_1 t}{m} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Από το τρίγωνο KNZ έχουμε:

$$\eta \mu \varphi = \frac{d}{R} \Rightarrow R = \frac{d}{\eta \mu \frac{\pi}{3}} \Rightarrow R = 0,4 \text{ cm}$$

Για την κατακόρυφη εκτροπή προκύπτει:

$$\text{συν} \varphi = \frac{R-y}{R} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{R-y}{R} \Rightarrow$$

$$y = \frac{R}{2} \Rightarrow y = 0,2 \text{ cm}$$

Γ2. Υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας εισόδου στο πεδίο (1). Ισχύει:

$$R = \frac{mv_0}{B_1 |q|} \Rightarrow v_0 = \frac{RB_1 |q|}{m} \Rightarrow v_0 = \frac{2}{3} \frac{m}{s}$$

Για το κατά de Broglie μήκος κύματος του σωματιδίου έχουμε:

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{mv_0} \Rightarrow \lambda = \frac{5}{3} \cdot 10^{-25} \text{ m}$$

Γ3. Κατά την κίνηση του σωματιδίου στο μαγνητικό πεδίο (1) δε μεταβάλλεται το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου επειδή το έργο της δύναμης Lorentz που ασκείται σε αυτό είναι ίσο με μηδέν.

Αναλύουμε την ταχύτητα σε δύο συνιστώσες, μια παράλληλη $\vec{v}_\pi$ στις δυναμικές γραμμές του πεδίου (2) και σε μια κάθετη $\vec{v}_\kappa$ στις δυναμικές γραμμές αυτού. Ισχύει:

$$v_\pi = v_0 \cdot \text{συν} \varphi \Rightarrow v_\pi = \frac{1}{3} \frac{m}{s}$$

Για την περίοδο της ελικοειδούς κίνησης έχουμε:

$$T_2 = \frac{2\pi m}{B_2 |q|} \Rightarrow T_2 = 6\pi \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Για το βήμα της έλικας ισχύει:

$$\beta = v_\pi T_2 \Rightarrow \beta = 2\pi \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

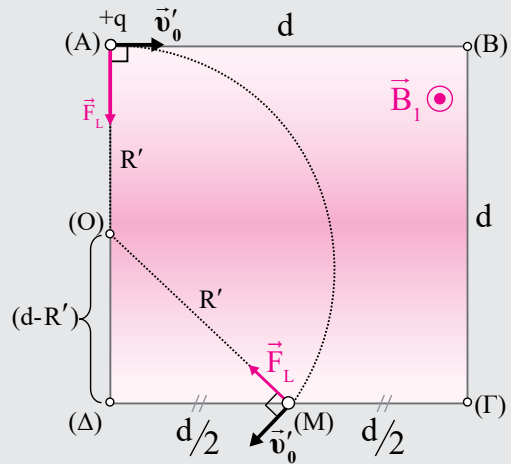
Για τον χρόνο κίνησης στο μαγνητικό πεδίο (2) έχουμε:

$$s = v_\pi \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{s}{v_\pi} \Rightarrow \Delta t = 3 \text{ s}$$

Για το μήκος της τροχιάς του σωματιδίου έχουμε:

$$s' = v_0 \cdot \Delta t \Rightarrow s' = \left(\frac{2}{3} \cdot 3 \right) \text{ m} \Rightarrow s' = 2 \text{ m}$$

Γ4.



Από το τρίγωνο OΔM έχουμε:

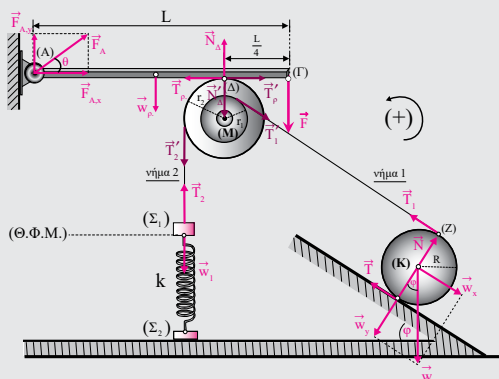
$$R'^2 = \left(\frac{d}{2} \right)^2 + (d - R')^2 \Rightarrow$$

$$R' = \frac{5d}{8} \Rightarrow R' = \frac{\sqrt{3}}{8} \text{ cm}$$

Για το μέτρο της ταχύτητας εισόδου θα ισχύει:

$$R' = \frac{mv_0'}{B_1 |q|} \Rightarrow v_0' = \frac{R' B_1 |q|}{m} \Rightarrow v_0' = \frac{5\sqrt{3}}{24} \frac{m}{s}$$

ΘΕΜΑ Δ



Δ1. i) Αφού ο δίσκος ισορροπεί πρέπει η συνισταμένη των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο του να είναι ίση με μηδέν καθώς και η συνισταμένη των δυνάμεων σε κάθε άξονα. Έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow -TR + T_1 R = 0 \Rightarrow T = T_1 \quad (1)$$

$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow w_x = T + T_1 \quad (1)$$

$$mg \cdot \eta\mu\phi = 2T_1 \Rightarrow T_1 = \frac{mg \cdot \eta\mu\phi}{2} \Rightarrow T_1 = 5\text{N}$$

ii) Αφού το ελατήριο στην κατάσταση ισορροπίας δεν έχει δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης, σημαίνει ότι βρίσκεται στη θέση φυσικού μήκους του. Έτσι το σώμα (Σ_1) δέχεται την τάση του νήματος 2 και το βάρος του. Αφού το σώμα (Σ_1) ισορροπεί πρέπει:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow w_1 = T_2 \Rightarrow m_1 g = T_2 \Rightarrow T_2 = 5\text{N}$$

Επειδή το νήμα 2 είναι αβαρές, το μέτρο της δύναμης που δέχεται ο μεγάλος δίσκος της τροχαλίας από το νήμα 2 είναι ίσο με το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ_1 από το νήμα 2 οπότε $T'_2 = T_2 \Rightarrow T'_2 = 5\text{N}$

Δ2. i) Επειδή το νήμα 1 είναι αβαρές, το μέτρο της δύναμης που δέχεται ο μικρός δίσκος της τροχαλίας από το νήμα 1, είναι ίσο με το μέτρο της δύναμης που δέχεται ο δίσκος από το νήμα 1 δηλαδή $T'_1 = T_1 = 5\text{N}$.

Η τροχαλία ισορροπεί οπότε η συνισταμένη των ροπών ως προς το κέντρο της M θα πρέπει να ισούται με μηδέν.

$$\Sigma \tau_{(M)} = 0 \Rightarrow$$

$$+T'_2 r_2 - T'_1 r_1 - T'_\rho r_2 = 0 \Rightarrow$$

$$T'_\rho = 2,5\text{N}$$

Η δύναμη της στατικής τριβής που δέχεται η ράβδος από την τροχαλία και η δύναμη της στατικής τριβής που δέχεται η τροχαλία από τη ράβδο έχουν σχέση μεταξύ τους δράσης – αντίδρασης οπότε έχουμε $T_\rho = T'_\rho \Rightarrow T_\rho = 2,5\text{N}$

ii) Από την ισορροπία των ροπών για τη ράβδο ως προς το άκρο της A έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow$$

$$-F \cdot L + N_\Delta \cdot \frac{3L}{4} - Mg \cdot \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$N_\Delta = 30\text{N}$$

Από την ισορροπία των δυνάμεων σε κάθε άξονα x, y για τη ράβδο έχουμε:

Άξονας x :

$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_{A,x} = T_\rho \Rightarrow F_{A,x} = 2,5\text{N}$$

Άξονας y :

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_{A,y} + N_\Delta = Mg + F \Rightarrow F_{A,y} = 2,5\text{N}$$

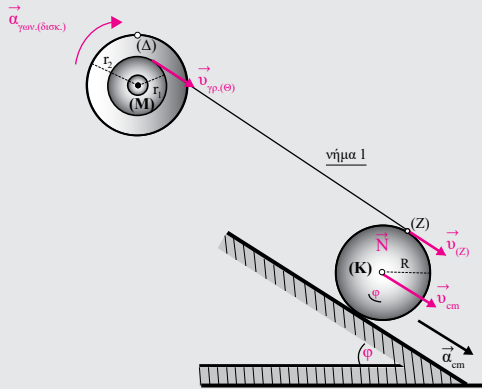
Το μέτρο της δύναμης από την άρθρωση ισούται με:

$$F_A = \sqrt{F_{A,x}^2 + F_{A,y}^2} \Rightarrow F_A = 2,5\sqrt{2}\text{N}$$

Και η διεύθυνσή της:

$$\epsilon\phi\theta = \frac{F_{A,y}}{F_{A,x}} = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ.$$

Δ3.



Όταν κόψουμε το νήμα 2, η τροχαλία αρχίζει να περιστρέφεται περί το κέντρο της (M), ενώ ο δίσκος κυλιέται χωρίς ολίσθηση πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

Α' τρόπος

Κατά τη διάρκεια της κίνησης του συστήματος διπλή τροχαλία – δίσκος ισχύει ότι το μήκος Δl του νήματος 1 που ξετυλίγεται από την περιφέρεια του μικρού δίσκου της τροχαλίας είναι ίσο με το άθροισμα της μετατόπισης Δx_{cm} του κέντρου μάζας του δίσκου και του μήκους $\Delta l'$ που τυλίγεται στην περιφέρειά του, δηλαδή:

$$\Delta l = \Delta x_{cm} + \Delta l' \Rightarrow \Delta l = \Delta x_{cm} + \Delta l' \Rightarrow$$

$$\Delta \theta_{(τροχ.)} r_1 = \Delta \theta_{(δισκ.)} R + \Delta \theta_{(δισκ.)} R \Rightarrow$$

$$\Delta \theta_{(τροχ.)} r_1 = 2 \Delta \theta_{(δισκ.)} R \Rightarrow$$

$$\Delta \theta_{(τροχ.)} = 2,5 \Delta \theta_{(δισκ.)} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta \theta_{(τροχ.)}}{2\pi} = 2,5 \frac{\Delta \theta_{(δισκ.)}}{2\pi} \Rightarrow N_{(τροχ.)} = 2,5 N_{(δισκ.)} \Rightarrow$$

$$N_{(τροχ.)} = 10 \text{ περιστροφές}$$

Β' τρόπος

Κάθε χρονική στιγμή όλα τα σημεία του νήματος 1 έχουν την ίδια ταχύτητα άρα και το σημείο Θ της περιφέρειας του μικρού δίσκου της τροχαλίας με το ανώτερο σημείο Z του

δίσκου. Η ταχύτητα του σημείου Z είναι διπλάσια από την ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου αφού το σημείο Z είναι το ανώτερο σημείο του δίσκου και αυτός εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. Η ταχύτητα του σημείου Θ οφείλεται στην περιστροφική κίνηση της τροχαλίας.

Έχουμε:

$$v_{\Theta} = v_Z \Rightarrow \omega_{τροχ.} r_1 = 2 v_{cm} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta(\omega_{τροχ.})}{\Delta t} r_1 = 2 \frac{\Delta(v_{cm})}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{γων.(τροχ.)} r_1 = 2 \alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$\alpha_{γων.(τροχ.)} r_1 = 2 \alpha_{γων.(δισκ.)} R \Rightarrow$$

$$\alpha_{γων.(τροχ.)} = 2,5 \alpha_{γων.(δισκ.)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \alpha_{γων.(τροχ.)} \Delta t^2 = 2,5 \frac{1}{2} \alpha_{γων.(δισκ.)} \Delta t^2 \Rightarrow$$

$$\Delta \theta_{(τροχ.)} = 2,5 \Delta \theta_{(δισκ.)} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta \theta_{(τροχ.)}}{2\pi} = 2,5 \frac{\Delta \theta_{(δισκ.)}}{2\pi} \Rightarrow N_{(τροχ.)} = 2,5 N_{(δισκ.)} \Rightarrow$$

$$N_{(τροχ.)} = 10 \text{ περιστροφές}$$

Δ4. Όταν κόψουμε το νήμα 2 καταργείται η δύναμη της τάσης T_2 και το σώμα (Σ_1) θα κινηθεί προς τα κάτω λόγω του βάρους του εκτελώντας απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$.

Στη θέση ισορροπίας του σώματος (Σ_1), έχουμε

$$(\Theta.I.): \Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ.} + \vec{w}_1 = 0 \Rightarrow F_{ελ.} = w_1 \Rightarrow$$

$$k \Delta l = m_1 g \Rightarrow \Delta l = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow \Delta l = 0,1 \text{ m}$$

$$k = m_1 \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος (Σ_1) είναι $A = \Delta l = 0,1 \text{ m}$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε $x = +A$, επομένως:

$$A = A \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = 1$$

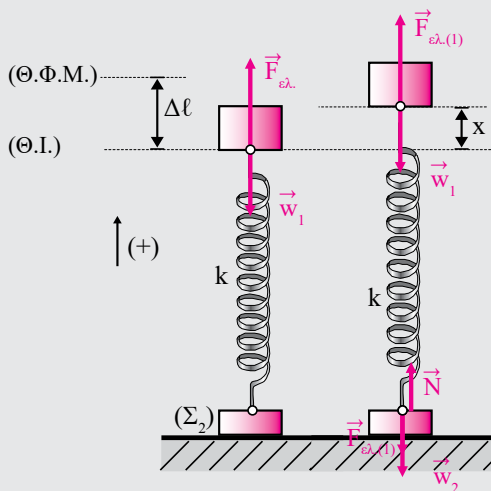
Επειδή $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{rad}$ τελικά προκύπτει:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{rad}$$

Επομένως, η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σώματος (Σ_1) είναι:

$$x = 0,1 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{S.I.})$$

Δ5.



Σε μια τυχαία θέση της ταλάντωσης του σώματος (Σ_1) η οποία απέχει απόσταση x από τη θέση ισορροπίας του έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = -k\vec{x} \Rightarrow \vec{F}_{el} + \vec{w} = -k\vec{x} \Rightarrow$$

$$F_{el(1)} - w_1 = -kx \Rightarrow F_{el(1)} = m_1 g - kx \Rightarrow$$

$$F_{el(1)} = 5 - 50x (\text{S.I.}) \text{ για } -0,1\text{m} \leq x \leq 0,1\text{m}$$

Το σώμα (Σ_2) ισορροπεί άρα:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}'_{el(1)} + \vec{w}_2 + \vec{N} = 0 \Rightarrow$$

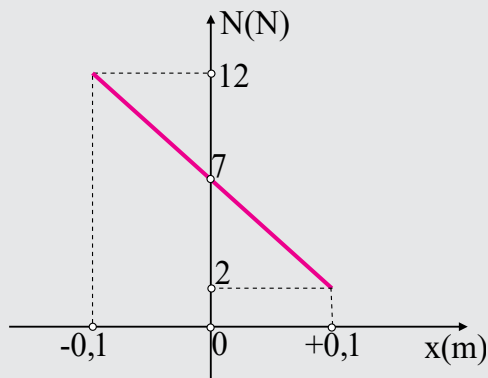
$$N = F'_{el(1)} + m_2 g \Rightarrow$$

$$N = 7 - 50x (\text{S.I.}) \text{ για } -0,1\text{m} \leq x \leq 0,1\text{m}$$

$$\text{Για } x = +0,1\text{m} \Rightarrow N = 2\text{N}$$

$$\text{Για } x = -0,1\text{m} \Rightarrow N = 12\text{N}$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow N = 7\text{N}$$



19ο Διαγώνισμα (Δ19)

ΘΕΜΑ Α

A1. β), A2. γ), A3. β), A4. α)

A5. α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Το να μη γνωρίζουμε πού ακριβώς μέσα στον πυρήνα βρίσκεται το πρωτόνιο αντιστοιχεί σε αβεβαιότητα στη θέση περίπου $\Delta x \approx d$ (θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει αβεβαιότητα θέσης το $d/2$, αλλά αυτό δεν αλλάζει την τάξη μεγέθους της απάντησης).

Χρησιμοποιώντας την αρχή της αβεβαιότητας:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \Rightarrow \Delta x \approx d \Rightarrow d \Delta p \geq \hbar \Rightarrow \Delta p \geq \frac{\hbar}{d}$$

Η κινητική ενέργεια του πρωτονίου (ακόμα και αν θεωρήσουμε πως η ορμή του είναι μηδέν κατά μέσο όρο) είναι:

$$K = \frac{p^2}{2m} \geq \frac{(0 \pm \Delta p)^2}{2m} = \frac{\left(\frac{\hbar}{d}\right)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2d^2 m}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Έστω ότι τη στιγμή που περνά το σώμα μάζας M από τη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος (θέση ισορροπίας της ταλάντωσης), έχει ταχύτητα v_0 . Εφαρμόζοντας Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα της κίνησης του σώματος μάζας M κατά τη διάρκεια της κρούσης του με το σώμα μάζας m , έχουμε:

$$\begin{aligned}\vec{p}_{\text{αρχ}} &= \vec{p}_{\text{τελ}} \Rightarrow \\ Mv_0 + 0 &= (m + M)V_0 \Rightarrow \\ V_0 &= \frac{M}{m + M} v_0 \quad (1)\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας αρχή διατήρησης ενέργειας στη νέα ταλάντωση (ΑΔΕΤ) στη θέση της κρούσης (που παραμένει θέση ισορροπίας και για τη νέα ταλάντωση), έχουμε:

$$\begin{aligned}E &= K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}(m + M)V_0^2 + 0 \Rightarrow \\ kA'^2 &= (m + M)\frac{M^2}{(m + M)^2}v_0^2 \Rightarrow \\ M\omega^2 A'^2 &= \frac{M^2}{m + M}A^2\omega^2 \Rightarrow A' = A\sqrt{\frac{M}{m + M}} \quad (2)\end{aligned}$$

Για την παραγωγή της σχέσης (2) χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις $k = M\omega^2$, $v_0 = A\omega$ και (1).

Από τη σχέση (2) παρατηρούμε ότι $A' < A$.

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Αν v είναι η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων

$$\text{ισχύει: } v = \frac{L}{t_1} \quad (1)$$

$$\text{Η συχνότητα } f, \text{ των κυμάτων είναι: } f = \frac{N}{t_2} \quad (2)$$

Σύμφωνα με τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2), έχουμε:

$$v = \lambda f \Rightarrow v = \lambda \cdot \frac{N}{t_2} \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (3) καταλήγουμε:

$$\frac{L}{t_1} = \lambda \cdot \frac{N}{t_2} \Rightarrow \lambda = \frac{L}{N} \cdot \frac{t_2}{t_1}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ο πυρήνας Ηλίου (He) μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο δέχεται δύναμη Lorentz F_L , η οποία παραμένει μονίμως κάθετη στην ταχύτητά του παίζοντας ρόλο κεντρομόλου δύναμης. Έτσι ο πυρήνας He εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, της οποίας η ακτίνα και η περίοδος δίνονται από τις σχέσεις:

$$R = \frac{mv}{B|q|} \quad (1) \quad T = \frac{2\pi m}{B|q|} \quad (2)$$

Η περίοδος T_1 της κίνησης του πυρήνα He πριν περάσει το φύλλο του μολύβδου σύμφωνα με τη σχέση (2) είναι:

$$T_1 = \frac{2\pi m}{B|q|} \Rightarrow T_1 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

Από τη σχέση (2) παρατηρούμε ότι η περίοδος είναι ανεξάρτητη της ταχύτητας, συνεπώς η περίοδος T_2 της κίνησης του πυρήνα He αφού περάσει το φύλλο του μολύβδου θα είναι

$$T_2 = T_1 \Rightarrow T_2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

Γ2. Από τη σχέση (1) βρίσκουμε την ταχύτητα v_1 του πυρήνα He πριν διαπεράσει το φύλλο μολύβδου:

$$v_1 = \frac{BR_1|q|}{m} = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Το μήκος κύματος de Broglie λ_1 , που αντιστοιχεί στον πυρήνα He για τη συγκεκριμένη ταχύτητα είναι:

$$\lambda_1 = \frac{h}{p_1} = \frac{h}{mv_1} \Rightarrow \lambda_1 = 343,75 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Γ3. Από τη σχέση (1) βρίσκουμε την ταχύτητα v_2 του πυρήνα He αφού διαπεράσει το

φύλλο μολύβδου:

$$v_2 = \frac{BR_2 |q|}{m} = 10^5 \text{ m/s}$$

Το μήκος κύματος de Broglie λ_2 , που αντιστοιχεί στον πυρήνα He για τη συγκεκριμένη ταχύτητα είναι:

$$\lambda_2 = \frac{h}{p_2} = \frac{h}{mv_2} \Rightarrow \lambda_2 = 1031,25 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Το ποσοστό επί τοις εκατό της μεταβολής του μήκους κύματος de Broglie που αντιστοιχεί στον πυρήνα He αφού διαπεράσει το φύλλο μολύβδου είναι:

$$\Pi\% = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi\% = 200\%$$

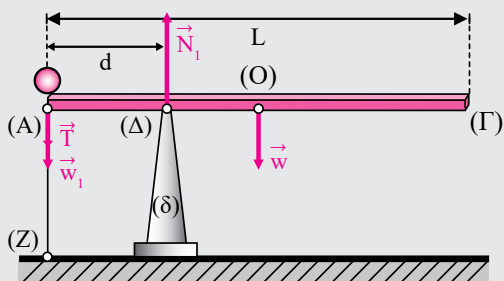
Γ4. Η απώλεια ενέργειας $E_{\text{απ}}$, του πυρήνα He κατά το πέρασμά του μέσα από το φύλλο του μολύβδου είναι:

$$E_{\text{απ}} = |K_2 - K_1| = \left| \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \right| \Rightarrow$$

$$E_{\text{απ}} = 25,6 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

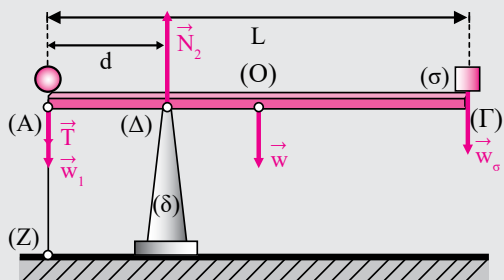


Στη σανίδα ΑΓ ασκούνται: η δύναμη που ασκεί η σφαίρα στη σανίδα που είναι ίση με το βάρος w_1 , το βάρος της σανίδας w , που ασκείται στο μέσο της Ο επειδή είναι ομογενής, η τάση του νήματος T , που είναι μηδενική και η δύναμη N_1 από το υποστήριγμα (δ).

Η σανίδα ισορροπεί οπότε:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow w_1 \cdot d - w \cdot \left(\frac{L}{2} - d \right) = 0 \Rightarrow d = 1 \text{ m}$$

Δ2.



Στη σανίδα τώρα προστίθεται η δύναμη που ασκεί το σώμα (σ) που είναι ίση με το βάρος του w_σ , η τάση του νήματος T , που είναι μη μηδενική και η δύναμη N_2 από το υποστήριγμα (δ). Η σανίδα ισορροπεί οπότε:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow$$

$$N_2 \cdot d - w \cdot \frac{L}{2} - w_\sigma \cdot L = 0 \Rightarrow$$

$$N_2 = 900 \text{ N}$$

Αλλά

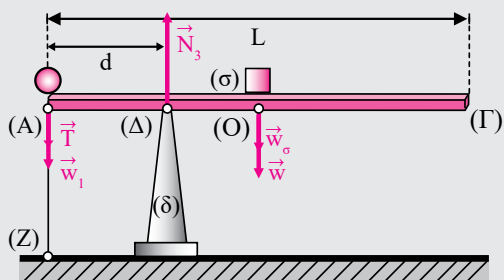
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$$

$$N_2 - T - w_1 - w - w_\sigma = 0 \Rightarrow$$

$$T = 400 \text{ N}$$

οπότε παρατηρούμε ότι $T < T_{\text{θρ}}$, συνεπώς το νήμα δεν κόβεται.

Δ3.



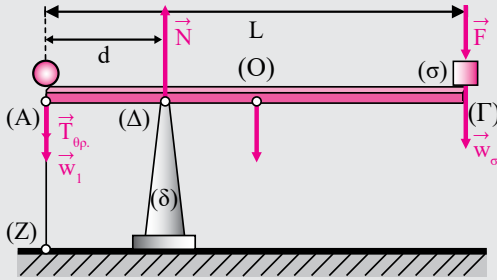
Η σανίδα ισορροπεί οπότε έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow$$

$$w_1 \cdot d + T \cdot d - (w + w_\sigma) \cdot \left(\frac{L}{2} - d \right) = 0 \Rightarrow$$

$$T = 100 \text{ N}$$

Δ4.



Η δύναμη που ασκείται στο σημείο Γ της σανίδας είναι ίση με το άθροισμα του βάρους w_σ του σώματος (σ) και της δύναμης F . Η τάση του νήματος στην οριακή στιγμή που θα κοπεί το νήμα θα πάρει την τιμή $T = T_{\theta p}$. Η σανίδα ισορροπεί οπότε έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow$$

$$w_1 \cdot d + T_{\theta p} \cdot d - (w_\sigma + F) \cdot (L - d) = 0 \Rightarrow$$

$$F = 50 \text{ N}$$

Από τη σχέση $F = 20 + 5t$, για $F = 50 \text{ N}$ βρίσκουμε: $t = 6 \text{ s}$.

20ό Διαγώνισμα (Δ20)

ΘΕΜΑ Α

A1. δ), A2. γ), A3. α), A4. δ)
A5. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **α**).

Δικαιολόγηση

Το φωτόνιο που σκεδάζεται από το ελεύθερο ηλεκτρόνιο στο σημείο Α έχει μήκος κύματος λ' με

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) \quad (1)$$

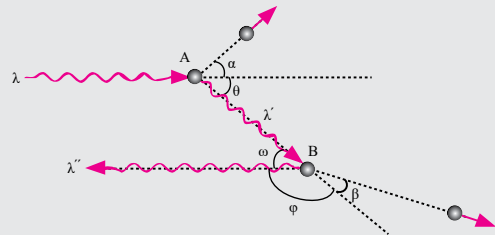
Η σκέδαση αυτού του φωτονίου στο σημείο Β θα έχει ως αποτέλεσμα το νέο μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου λ'' να είναι:

$$\lambda'' = \lambda' + \frac{h}{mc}(1 - \cos \phi) \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (1) στην (2) έχουμε:

$$\lambda'' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) + \frac{h}{mc}(1 - \cos \phi) \Leftrightarrow$$

$$\lambda'' = \lambda + \frac{h}{mc}(2 - \cos \theta - \cos \phi) \quad (3)$$



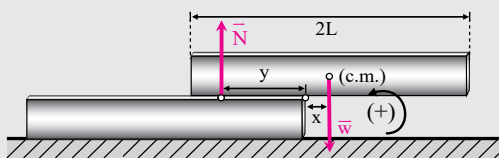
Οι γωνίες θ και ω είναι εντός εναλλάξ των παράλληλων ευθειών που ορίζονται από την αρχική και τελική διεύθυνση διάδοσης του φωτονίου με τέμνουσα την ευθεία ΑΒ, οπότε είναι ίσες, δηλαδή $\theta = \omega$. Επίσης, οι γωνίες ω και ϕ είναι παραπληρωματικές, οπότε $\omega + \phi = \pi$ ή $\theta + \phi = \pi$. Αυτό σημαίνει ότι οι γωνίες θ και ϕ έχουν αντίθετα τα συνημίτονά τους, δηλαδή $\cos \theta = -\cos \phi$.

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στην σχέση (3) προκύπτει ότι

$$\lambda'' = \lambda + \frac{2h}{mc} \Leftrightarrow \lambda'' - \lambda = \frac{2h}{mc} \Leftrightarrow \Delta \lambda = \frac{2h}{mc}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α).**Δικαιολόγηση**

Στο σχήμα της εκφώνησης φαίνονται τα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων $\vec{N}$ και $\vec{w}$ που ασκούνται στην πάνω ράβδο όταν αυτή τοποθετείται κατά τρόπο ώστε να προεξέχει από την κάτω:



Η δύναμη στήριξης $\vec{N}$, που ασκείται από την όμοια κάτω ράβδο, ασκείται σε σημείο που απέχει κατά y από το σημείο K .

Το βάρος $\vec{w}$ έχει σημείο εφαρμογής το κέντρο μάζας (c.m.) της ράβδου που βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση x από το σημείο K . Αν η πάνω ράβδος πρόκειται να ανατραπεί θα πρέπει να περιστραφεί ως προς οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο K και είναι κάθετος στο μήκος της. Ορίζουμε θετική φορά περιστροφής την αντίθετη της φοράς κίνησης των δεικτών του ρολογιού όπως φαίνεται στο σχήμα.

Το βάρος $\vec{w}$ και η δύναμη $\vec{N}$ δημιουργούν αρνητική συνισταμένη ροπή γύρω από το K . Δηλαδή για οποιαδήποτε τιμή του $x > 0$ η ράβδος θα ανατραπεί.

Σωστή λοιπόν πρέπει να είναι υποχρεωτικά η απάντηση (α).

Πραγματικά, αν $x = 0$ τότε $\tau_w = 0$ και η συνθήκη ισορροπίας γράφεται:

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow \tau_N + \tau_w = 0 \Rightarrow \tau_N + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\tau_N = 0 \Rightarrow -N \cdot y + 0 = 0 \Rightarrow y = 0$$

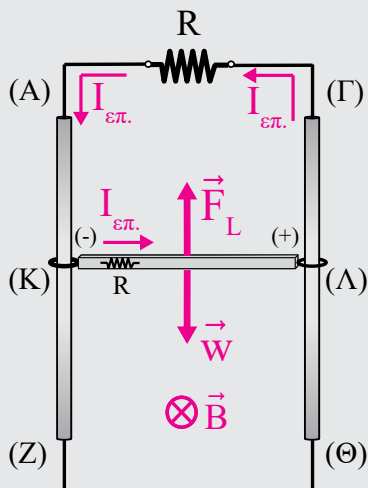
αφού φυσικά η δύναμη στήριξης N δεν μπορεί να είναι 0.

Δηλαδή οι δύο αντίθετες δυνάμεις έχουν σημείο εφαρμογής το K , συνεπώς τόσο η συνισταμένη δύναμη όσο και η συνισταμένη ροπή είναι μηδενικές, άρα η ράβδος παραμένει σε ισορροπία στη θέση αυτή.

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ).**Δικαιολόγηση**

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο αγωγός ΚΛ αρχίζει να κατέρχεται επιταχυνόμενος και κινούμενος κάθετα στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου. Στον αγωγό ΚΛ αναπτύσσεται επαγωγική τάση $E_{\text{επ}} = B\ell v$. Το κλειστό κύκλωμα ΚΛΓΑΚ διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα έντασης:

$$I_{\text{επ}} = \frac{E_{\text{επ}}}{R + R} \Rightarrow I_{\text{επ}} = \frac{B\ell v}{2R} \quad (1)$$



Στον αγωγό ΚΛ ασκείται δύναμη Laplace αντίρροπη του βάρους του που έχει μέτρο $F_L = BI_{\text{επ}}\ell \quad (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$F_L = \frac{B^2 \ell^2 v}{2R} \quad (3)$$

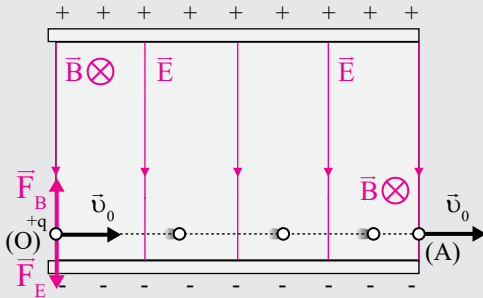
Τη χρονική στιγμή που ο αγωγός ΚΛ αποκτά οριακή ταχύτητα $\vec{v}_{\text{op}}$, η συνισταμένη δύναμη που δέχεται είναι μηδέν, επομένως:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_L = mg \Rightarrow \frac{B^2 \ell^2 v_{\text{op}}}{2R} = mg \Rightarrow$$

$$v_{\text{op}} = \frac{2mgR}{B^2 \ell^2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $\vec{v}_{(0)}$ η ταχύτητα των ιόντων που εκτοξεύονται από το σημείο (O) και εξέρχονται από το σημείο (A) έχοντας ταχύτητα $\vec{v}_0$ χωρίς να εκτραπούν από την ευθύγραμμη πορεία τους. Αυτό συμβαίνει επειδή η συνισταμένη δύναμη που δέχεται κάθε τέτοιο ιόν κατά την κίνησή του στο φίλτρο ταχυτήτων είναι μηδέν, $\Sigma \vec{F} = 0$. Κάθε ιόν εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση άρα οι δύο ταχύτητες είναι ίσες, $\vec{v}_{(0)} = \vec{v}_0$.



Η δύναμη $\vec{F}_E$ που ασκείται στο θετικό ιόν από το ηλεκτρικό πεδίο έχει την ίδια κατεύθυνση με την ένταση $\vec{E}$. Σύμφωνα με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού η δύναμη $\vec{F}_B$ που ασκείται στο θετικό ιόν από το μαγνητικό πεδίο έχει κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα πάνω. Οι δύο δυνάμεις είναι αντίθετες, επομένως έχουν ίσα μέτρα.

$$F_E = F_B \Rightarrow E \cdot |q| = B \cdot |q| \cdot v_{(0)} \Rightarrow$$

$$E = B \cdot v_{(0)} \Rightarrow v_{(0)} = \frac{E}{B} \Rightarrow$$

$$v_{(0)} = v_0 \Rightarrow v_{(0)} = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

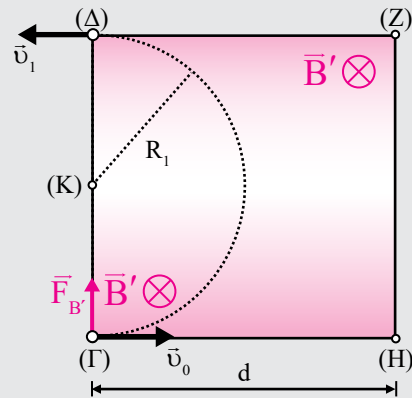
Γ2. Το θετικό ιόν που μπαίνει με ταχύτητα $\vec{v}_0$ στο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}'$ δέχεται δύναμη Lorentz $\vec{F}_{B'}$ που παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης και αναγκάζει το ιόν να εκτελέσει ομαλή κυκλική κίνηση. Η τροχιά που διαγράφει το μονοσθενές θετικό ιόν, $q = +e$, μέσα στο μα-

γνητικό πεδίο είναι ημικυκλική με κέντρο (K) και ακτίνα:

$$R_1 = \frac{d}{2} = 10^{-2} \text{ m}.$$

$$F_{B'} = B' \cdot |q| \cdot v_0 = m \cdot \frac{v_0^2}{R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{m \cdot v_0}{B' \cdot e} \Rightarrow$$

$$m = \frac{B' \cdot e \cdot R_1}{v_0} \Rightarrow m = 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$



Έστω Δt_1 το χρονικό διάστημα της κίνησης του ιόντος από το Γ μέχρι το Δ και $\phi_1 = \pi \text{ rad}$ η γωνία που διαγράφει η επιβατική του ακτίνα.

$$\phi_1 = \omega_1 \cdot \Delta t_1 \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{T_1} \cdot \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{T_1}{2} \Rightarrow$$

$$\Delta t_1 = \frac{2\pi m}{2B' \cdot |q|} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{\pi m}{B' \cdot e} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Γ3. Το μέτρο της ταχύτητας του ιόντος παραμένει σταθερό κατά την κίνηση του στο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}'$, επομένως $v_1 = v_0 = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Η με-

ταβολή της ορμής του ιόντος είναι ίση με:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0 \Rightarrow \Delta p = m \cdot v_1 - m \cdot v_0$$

Θεωρούμε θετική τη φορά της $\vec{v}_1$, οπότε:

$$\Delta p = m \cdot v_1 - m \cdot (-v_0) \Rightarrow$$

$$\Delta p = 2m \cdot v_0 \Rightarrow \Delta p = 6,4 \cdot 10^{-23} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η μεταβολή $\Delta \vec{p}$ της ορμής του ιόντος έχει την ίδια κατεύθυνση με την $\vec{v}_1$.

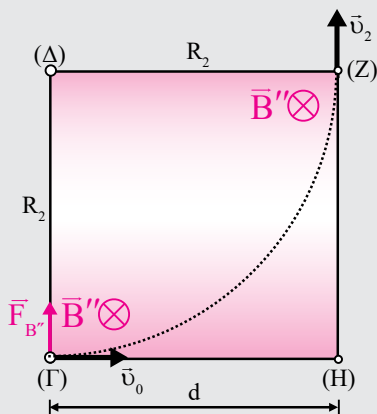
Η δύναμη $\vec{F}_{B'}$ είναι συνεχώς κάθετη στην τροχιά του ιόντος επομένως $W_{F_{B'}} = 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα έργου – ενέργειας η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του ιόντος είναι:

$$\Delta K = W_{F_{B'}} \Rightarrow \Delta K = 0$$

Γ4. Η $\vec{v}_0$ είναι κάθετη στην $\Gamma\Delta$ και η $\vec{v}_2$ είναι κάθετη στη $Z\Delta$. Το ιόν διαγράφει μέσα στο μαγνητικό πεδίο ένα τεταρτοκύκλιο με κέντρο το (Δ) και ακτίνα $R_2 = d$ εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση. Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του ιόντος είναι ίση με:

$$R_2 = \frac{m \cdot v_0}{B'' \cdot e} \Rightarrow B'' = \frac{m \cdot v_0}{d \cdot e} \Rightarrow B'' = 10^{-2} \text{ T}$$



Έστω Δt_2 το χρονικό διάστημα της κίνησης του ιόντος από το Γ μέχρι το (Z) και $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ η γωνία που διαγράφει η επιβατική του ακτίνα.

$$\varphi_2 = \omega_2 \cdot \Delta t_2 \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{T_2} \cdot \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{T_2}{4} \Rightarrow$$

$$\Delta t_2 = \frac{2\pi m}{4B'' \cdot |q|} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{\pi m}{2B'' \cdot e}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση προκύπτει ότι:

$$\Delta t_2 = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

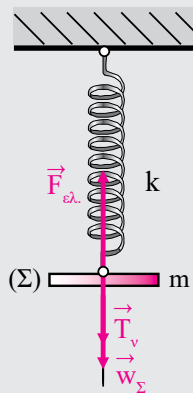
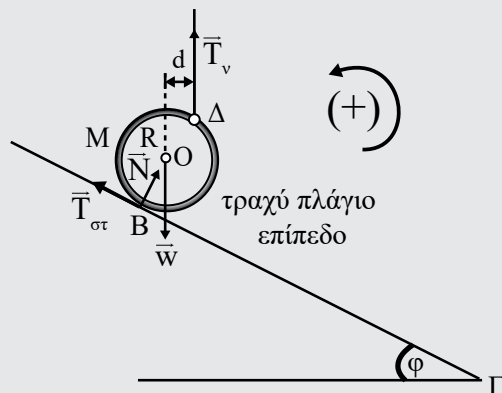
Η στροφορμή $\vec{L}$ κάθε ιόντος, ως προς τον άξονα που περνά από το Δ και είναι κάθετος στο επίπεδο της τροχιάς του, παραμένει σταθερή κατά την κίνηση στο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}''$ γιατί η δύναμη $\vec{F}_{B'}$ που δέχεται από αυτό δεν έχει ροπή. Η διεύθυνση της $\vec{L}$ είναι κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς και έχει φορά προς τα έξω. Το μέτρο της είναι ίσο με:

$$L = m \cdot v_0 \cdot R_2 \Rightarrow L = 6,4 \cdot 10^{-25} \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το σώμα (Σ) ισορροπεί, άρα $\Sigma \vec{F} = 0$. Θεωρώντας θετική τη φορά προς τα κάτω έχουμε:

$$w_\Sigma + T_v = F_{ελ} \Rightarrow T_v = k \cdot \Delta \ell - mg \Rightarrow T_v = 30 \text{ N}$$



Ο δακτύλιος ισορροπεί, άρα $\Sigma \tau_{(O)} = 0$. Το βάρος $\vec{w}$ του δακτυλίου και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ δεν έχουν ροπή ως προς το (Ο) γιατί οι φορείς τους περνούν από αυτό, επομένως:

$$\begin{aligned}\tau_{T_v} + \tau_{T_{\sigma\tau}} &= 0 \Rightarrow \\ T_v \cdot d - T_{\sigma\tau} \cdot R &= 0 \Rightarrow \\ T_{\sigma\tau} &= T_v \cdot \frac{d}{R} \Rightarrow \\ T_{\sigma\tau} &= 15 \text{ N}\end{aligned}$$

Δ2. Μετά την κοπή του νήματος το σώμα (Σ) εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ που κόβεται το νήμα, το σώμα (Σ) έχει μηδενική ταχύτητα, επομένως βρίσκεται στη θετική ακραία θέση της ταλάντωσής του. Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος είναι ίσο με την επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση αυτή, μείον την επιμήκυνση που έχει το ελατήριο στη θέση ισορροπίας του σώματος μετά την κοπή του νήματος.

$$A = \left(\Delta \ell - \frac{mg}{k} \right) = (0,1 - 0,025) \text{ m} = 0,075 \text{ m}$$

$$k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης για την ταλάντωση του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0), \quad 0 \leq \phi_0 < 2\pi \text{ rad}$$

Για $t_0 = 0$:

$$x = +A \Rightarrow A \cdot \eta\mu\phi_0 = A \Rightarrow$$

$$\eta\mu\phi_0 = 1 \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω:

$$x = 0,075 \cdot \eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{SI})$$

Η εξίσωση της επιτάχυνσης για την ταλάντωση του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$a = -\omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow$$

$$a = -30 \cdot \eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{SI})$$

Δ3. Η κύλιση του δακτυλίου κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου είναι σύνθετη. Η γωνιακή επιτάχυνση του δακτυλίου είναι σταθερή επομένως η στροφική του κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη. Σύμφωνα με τη σχέση που συνδέει το μέτρο της μεταφορικής με το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης, $\alpha_{\text{cm}} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$, η μεταφορική κίνηση του δακτυλίου είναι ομαλά επιταχυνόμενη με: $\alpha_{\text{cm}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Έστω t_1 η χρονική στιγμή κατά την οποία ο δακτύλιος φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

$$S_1 = \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} \cdot t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2S_1}{\alpha_{\text{cm}}}} \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}$$

$$\text{Όμως } v_1 = \alpha_{\text{cm}} \cdot t_1 \Rightarrow v_1 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Επίσης } v_1 = \omega_1 \cdot R \Rightarrow \omega_1 = \frac{v_1}{R} \Rightarrow \omega_1 = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Δ4. Η κύλιση του δακτυλίου στο λείο οριζόντιο επίπεδο είναι σύνθετη. Η μεταφορική του κίνηση είναι ομαλή, εφόσον ο δακτύλιος δε δέχεται καμία δύναμη στην οριζόντια διεύθυνση, με μεταφορική ταχύτητα $v_1 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Επίσης, η στροφική του κίνηση στο λείο οριζόντιο επίπεδο είναι ομαλή, εφόσον δεν υπάρχει καμία ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής του, με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

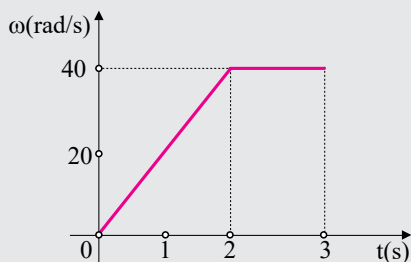
Έστω t_2 η χρονική στιγμή κατά την οποία ο δακτύλιος περνά από το σημείο E.

$$S_2 = v_1 \cdot (t_2 - t_1) \Rightarrow t_2 = \frac{S_2}{v_1} + t_1 \Rightarrow t_2 = 3 \text{ s}$$

Επομένως, η γωνιακή ταχύτητα ως προς τον χρόνο δίνεται από την συνάρτηση:

$$\omega = \begin{cases} \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t \Rightarrow \omega = 20t, & 0 \leq t \leq 2 \text{ s} \\ 40, & 2 \text{ s} \leq t \leq 3 \text{ s} \end{cases} (\text{SI})$$

Σχεδιάζουμε την αντίστοιχη γραφική παράσταση:



Το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης γωνιακής ταχύτητας – χρόνου και του άξονα των χρόνων είναι ίσο με την αντίστοιχη γωνία στροφής, επομένως:

$$\Delta\theta = \frac{3+1}{2} \cdot 40\text{rad} \Rightarrow \Delta\theta = 80\text{rad}$$

Αν N είναι ο αριθμός των περιστροφών του δακτυλίου από $t_0 = 0$ έως $t_2 = 3\text{s}$, τότε:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{40}{\pi} \text{ περιστροφές}$$

21ο Διαγώνισμα (Δ21)

ΘΕΜΑ Α

A1. α), A2. δ), A3. γ), A4. α)
A5. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

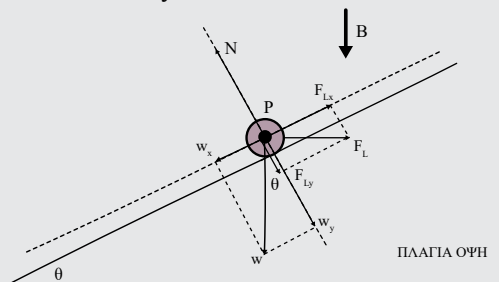
B1. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Σχεδιάζουμε την πλάγια όψη του κεκλιμένου επιπέδου, καθώς και τις δυνάμεις που ασκούνται στον πρισματικό αγωγό P : το βάρος του $\vec{w}$, την ηλεκτρομαγνητική δύναμη $\vec{F}_L$, και την δύναμη $\vec{N}$ από το λείο κεκλιμένο επίπεδο.

Η φορά του ηλεκτρικού ρεύματος έχει σημειωθεί με φορά από την σελίδα προς τα έξω. Επίσης έχουμε σημειώσει με θ τις γωνίες που είναι ίσες μεταξύ τους.

Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αναφοράς με τον ένα άξονα (έστω $x'x$) παράλληλο προς το κεκλιμένο επίπεδο και αναλύουμε τις δυνάμεις σε συνιστώσες:



Γράφουμε τη συνθήκη ισορροπίας για τον κάθε άξονα χωριστά:

$$\Sigma F_x = 0 \text{ και } \Sigma F_y = 0$$

Μας αρκούν οι υπολογισμοί μόνο για τον ένα άξονα. Έτσι:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{Lx} = w_x \Rightarrow$$

$$F_L \sin\theta = w \sin\theta \Rightarrow BIl = mg \Rightarrow$$

$$B \frac{E}{R} l = mg \Rightarrow m = \frac{BEI}{gR}$$

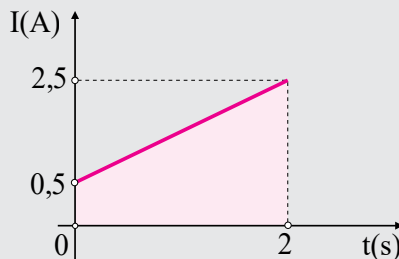
B2. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Εφαρμόζοντας το νόμο του Ohm στο κυκλώμα στο πλαίσιο έχουμε:

$$I = \frac{E\pi}{R} = \frac{10t+5}{10} \Rightarrow I = t + 0,5 (\text{S.I.})$$

Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση $I-t$, οπότε για το χρονικό διάστημα από $t = 0$ μέχρι $t = 2\text{s}$ το ηλεκτρικό φορτίο q που διέρχεται από μια τομή του σύρματος του πλαισίου είναι ίσο με το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τραπεζίου στο διάγραμμα του σχήματος.



$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \ q = \frac{(0,5 + 2,5) \cdot 2}{2} = 3C$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η **α**).

Δικαιολόγηση

Επειδή η ομογενής ράβδος ισορροπεί, η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων που της ασκούνται, ως προς το σημείο στήριξης, είναι μηδενική. Έτσι, με θετική φορά στροφικής κίνησης της ομογενούς ράβδου ως προς το σημείο Α τη φορά της κίνησης των δεικτών του ρολογιού, ισχύει:

$$\sum \bar{\tau}_{CM} = 0$$

$$m_2 \cdot g \cdot d_2 - m_1 \cdot g \cdot d_1 = 0 \Rightarrow$$

$$m_2 \cdot d_2 = m_1 \cdot d_1 \Rightarrow$$

$$N_2 \cdot m \cdot d_2 = N_1 \cdot m \cdot d_1 \Rightarrow$$

$$N_2 \cdot d_2 = N_1 \cdot d_1.$$

Η τελευταία σχέση ικανοποιείται στην 1^η και 4^η μέτρηση.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Τα σημεία τα οποία βρίσκονται σε θέση:

$$x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$$

είναι οι δεσμοί του στάσιμου κύματος και έχουν μηδενικό πλάτος ταλάντωσης δηλαδή παραμένουν συνεχώς ακίνητα.

Γνωρίζουμε ότι το σημείο Γ στη θέση $x = L$ είναι δεσμός και το σημείο Β στη θέση $x = 0$ είναι κοιλία. Αν το Γ είναι ο αμέσως επόμενος δεσμός μετά από την κοιλία Β, τότε θα ισχύει:

$$L = \frac{\lambda}{4}$$

Ενδέχεται όμως το Γ να είναι ο μεθεπόμενος δεσμός μετά από την κοιλία Β. Οπότε:

$$L = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} = 3 \frac{\lambda}{4}$$

Αν μεταξύ των Γ και Α μεσολαβούν δύο δεσμοί, ισχύει:

$$L = \frac{\lambda}{4} + 2 \frac{\lambda}{2} = 5 \frac{\lambda}{4}$$

Γενικεύοντας μπορούμε να γράψουμε:

$$L = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4} + 2n \frac{\lambda}{4} = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, n \geq 0$$

Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων που, συμβάλλοντας, δίνουν το στάσιμο κύμα είναι:

$$v = \lambda \cdot f$$

Εάν συνδυάσουμε τις παραπάνω σχέσεις θα έχουμε:

$$L = (2n + 1) \frac{v}{4f} \Rightarrow$$

$$f = (2n + 1) \frac{v}{4L} \Rightarrow f = (2n + 1) f_1$$

$$\text{με } f_1 = \frac{v}{4L}$$

Γ2. Η μικρότερη συχνότητα αντιστοιχεί στην τιμή $f_1 = \frac{v}{4L}$ η οποία προκύπτει από την εξίσωση:

$$f = (2n + 1) \frac{v}{4L} \text{ για } n = 0.$$

Θέτοντας $n = 0$ στην $L = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$ έχουμε:

$$L = \frac{\lambda_1}{4} \Rightarrow \lambda_1 = 7 \text{ m}$$

Αυτό σημαίνει ότι θα παρατηρήσουμε μόνο στο ελεύθερο άκρο της χορδής να δημιουργείται κοιλία και στο ακλόνητο ένας και μόνο δεσμός.

Γ3. Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος είναι:

$$v = \lambda_1 \cdot f_1 \Rightarrow v = 350 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Γ4. Η εξίσωση της απομάκρυνσης ενός στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \eta \mu \frac{2\pi}{T} t$$

Η μέγιστη απομάκρυνση του σημείου της χορδής που βρίσκεται στη θέση $x = \frac{\lambda}{8}$ είναι $2\sqrt{2}10^{-2}\text{ m}$ οπότε:

$$2A\sigma\omega 2\pi \frac{\lambda}{8} = 2\sqrt{2}10^{-2}\text{ m} \Rightarrow$$

$$A\sigma\omega \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}10^{-2}\text{ m} \Rightarrow A \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}10^{-2}\text{ m}$$

$$\Rightarrow A = 2 \cdot 10^{-2}\text{ m}$$

Άρα η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A\sigma\omega 2\pi \frac{x}{\lambda_7} \eta\mu \frac{2\pi}{T} t \text{ με}$$

$$\lambda_7 = \frac{v}{f_7} = \frac{350}{350}\text{ m} = 1\text{ m} \text{ και } T = \frac{1}{f_7} = \frac{1}{350}\text{ s}$$

θα είναι:

$$y = 2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \sigma\omega 2\pi \frac{x}{1} \eta\mu \frac{2\pi}{T} t \Rightarrow$$

$$y = 4 \cdot 10^{-2} \sigma\omega 2\pi x \cdot \eta\mu 700\pi t \text{ (S.I.)}$$

ΘΕΜΑ Δ

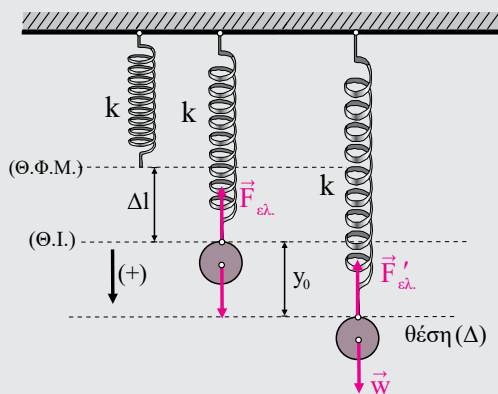
Δ1. Καθώς το σύστημα αρχικά ισορροπεί (Θ.Ι.), το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά Δl σε σχέση με το φυσικό του μήκος, η σφαίρα δέχεται το βάρος της και τη δύναμη του ελατηρίου και ισχύει:

$$\Sigma F_{\Theta.I.} = 0 \Rightarrow m \cdot g = k \cdot \Delta l \quad (1)$$

Κατεβάζουμε αργά και κατακόρυφα προς τα κάτω τη σφαίρα κατά $y_0 = 0,2\text{ m}$ από τη θέση ισορροπίας της και από τη θέση αυτή την αφήνουμε ελεύθερη τη στιγμή $t_0 = 0$.

Τη στιγμή ακριβώς που η σφαίρα αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί ισχύει:

$$(\Sigma F_{\Delta}) = m \cdot g - k \cdot (\Delta l + y_0) \quad (2)$$



Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1) και (2), προκύπτει:

$$(\Sigma F_{\Delta}) = -k \cdot y_0 \quad (3)$$

Αυτή όμως είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη της απλής αρμονικής ταλάντωσης. Άρα η σφαίρα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση από τη στιγμή που την αφήσαμε ελεύθερη και εφόσον μπορούμε να αγνοήσουμε τις αντιστάσεις του αέρα πάνω της.

Η σταθερά επαναφοράς της απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι η σταθερά του ελατηρίου, όπως προκύπτει από σχέση (3), οπότε η περίοδος της ταλάντωσης είναι:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 0,2 \cdot \pi \text{ s}$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αφήσαμε τη σφαίρα ελεύθερη να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα, η θέση αυτή αποτελεί ακραία θέση ταλάντωσης, οπότε το πλάτος A της ταλάντωσης είναι:

$$A = y_0 = 0,2\text{ m}$$

Η ενέργεια ταλάντωσης είναι:

$$E_{\tau\alpha\lambda} = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow E_{\tau\alpha\lambda} = 0,4 \text{ J}$$

Δ2. Εφαρμόζουμε την εξίσωση της εκθετικής μείωσης του πλάτους για το χρονικό διάστημα από τη στιγμή $t_0 = 0$ που αφήσαμε τη σφαίρα ελεύθερη να κινηθεί, μέχρι τη στιγμή $t = 14\text{ s}$,

κατά την οποία το πλάτος έγινε ίσο με το μισό του αρχικού:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot t} \Rightarrow e^{-\Lambda \cdot t} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Lambda = \frac{\ln 2}{t} \equiv \left(\frac{0,7}{14} \right) s^{-1} = 0,05 s^{-1}$$

Έτσι προκύπτει:

$$\frac{b}{2 \cdot m} = 0,05 s^{-1} \Rightarrow b = 0,02 kg \cdot s^{-1}$$

Δ3. Αν μπορούσαμε να θεωρήσουμε κβαντικό τον ταλαντωτή, τότε το κβάντο ενέργειας, δηλαδή η διαφορά ενέργειας δύο διαδοχικών επιτρεπόμενων καταστάσεων για αυτόν, θα ήταν:

$$E_{\kappa\beta.} = h \cdot f = \frac{h}{T} \Rightarrow E_{\kappa\beta.} = 10^{-33} J$$

Δ4. Στο χρονικό διάστημα από τη στιγμή $t_0 = 0$ που αφήσαμε τη σφαίρα ελεύθερη να κινηθεί, μέχρι τη στιγμή $t = 14s$, κατά την οποία το πλάτος έγινε ίσο με το μισό του αρχικού, ο ταλαντωτής έχει χάσει ενέργεια:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A_0^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(\frac{A_0}{2} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(A_0^2 - \frac{A_0^2}{4} \right) = \frac{3 \cdot k}{8} \cdot A_0^2 \Rightarrow \Delta E = 0,3 J$$

Το πλήθος των κβάντων ενέργειας που θα είχαν αποβληθεί, για αυτή την απώλεια ενέργειας, αν θεωρούσαμε τον ταλαντωτή κβαντικό, προκύπτει:

$$\Delta E = n \cdot E_{\kappa\beta.},$$

$$\text{άρα } n = \frac{\Delta E}{E_{\kappa\beta.}} \Rightarrow n = 3 \cdot 10^{32} \text{ κβάντα}$$

Προφανώς, πρόκειται για ένα τεράστιο πλήθος κβάντων, σε μια τόσο μικρή διαφορά ενέργειας. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να θεωρήσουμε συνεχή την απώλεια ενέργεια του συστήματος και όχι κβαντισμένη. Δεν μπορεί να εφαρμοστεί η κβαντική θεωρία στον μακρόκοσμο.

22ο Διαγώνισμα (Δ22)

ΘΕΜΑ Α

A1. β), A2. δ), A3. α), A4. α)
A5. α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **α**).

Δικαιολόγηση

Εφόσον το στάσιμο κύμα – κυματοσυνάρτηση έχει δεσμούς στα δύο άκρα του, θα έχει το μέγιστο δυνατό μήκος κύματος όταν $\lambda = 2L = 2 \cdot 10^{-10} m$, όπου L η διάμετρος του πυρήνα.

Η ορμή δίνεται από τον τύπο του deBroglie :

$$\lambda = \frac{h}{p} \Leftrightarrow p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} J \cdot s}{2 \cdot 10^{-10} m} =$$

$$= 3,3 \cdot 10^{-24} kg \cdot \frac{m}{s}$$

Εφόσον $\Psi \neq 0$ για όλο το εύρος από $x = 0$ έως $x = L$, το πρωτόνιο μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε μέσα σε αυτό το εύρος θέσεων, άρα η αβεβαιότητα στη θέση είναι $\Delta x = L = 10^{-10} m$. (Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε πως η αβεβαιότητα θέσης είναι το μισό του L , αλλά αυτό δεν αλλάζει την τάξη μεγέθους του αποτελέσματος).

Για την αβεβαιότητα της ορμής:

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq h \Leftrightarrow \Delta p \geq \frac{h}{\Delta x} =$$

$$= \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{2\pi \cdot 10^{-10}} kg \cdot m / s =$$

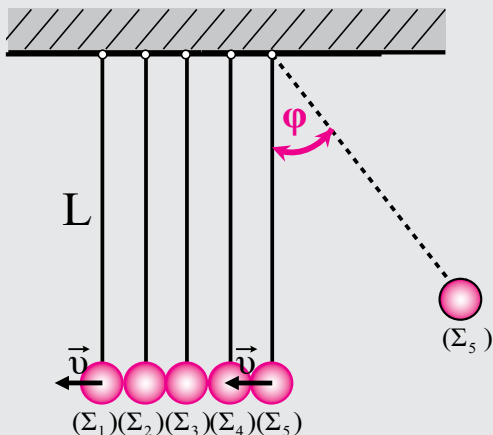
$$= \frac{6,6}{6,28} \cdot 10^{-24} kgm / s \equiv$$

$$\equiv 1,1 \cdot 10^{-24} kg \cdot \frac{m}{s}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ).**Δικαιολόγηση**

Ακριβώς πριν την κρούση η σφαίρα 5 θα έχει αποκτήσει οριζόντια ταχύτητα $\bar{u}$ με φορά προς τα αριστερά. Αφού οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες, κατά την κρούση ανταλλάσσουν ταχύτητες, οπότε η 5 ακινητοποιείται και η 4 αρχίζει να κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα $\bar{u}$. Η επόμενη κρούση ακινητοποιεί την 4 και μεταβιβάζει την ταχύτητα στην 3. Το ίδιο συμβαίνει στις διαδοχικές κρούσεις μεταξύ των 3 με 2 και 2 με 1.

Δηλαδή έχουμε σειρά διαδοχικών, κεντρικών κι ελαστικών κρούσεων κάθε σφαίρας με εκείνη που βρίσκεται στα αριστερά της, με αποτέλεσμα να μεταβιβάζεται ολόκληρη η ενέργεια και η ορμή της και η ίδια να μένει ακίνητη. Η σφαίρα 1 αρχίζει να κινείται με ταχύτητα $\bar{u}$ και ανέρχεται στο ίδιο ύψος με εκείνο από το οποίο έπεσε η πρώτη σφαίρα.

**B3. Σωστή απάντηση είναι η β).****Δικαιολόγηση**

Αν συγκρίνουμε τις τιμές που προκύπτουν από τα ζεύγη τιμών (T, λ) της πειραματικής καμπύλης, όπου T είναι η ένδειξη της κλίμακας του φασματοσκοπίου και λ το μήκος κύματος, με τις τιμές του πίνακα με τα γνωστά μήκη κύματος του ορατού φάσματος συμπεραίνουμε ότι:

Το πειραματικό σημείο Α αντιστοιχεί στο ερυθρό χρώμα, το Γ στο κίτρινο το Ε στο πράσινο και τα Η, Θ στο ιώδες.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Με χρήση της αρχής διατήρησης της ορμής (ΑΔΟ) κατά τη διάρκεια της κρούσης βρίσκουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος V_σ :

$$\vec{p}_{\text{αρχ}} = \vec{p}_{\text{τελ}} \Rightarrow m v_o = (M + m) V_\sigma \Rightarrow$$

$$V_\sigma = \frac{m v_o}{M + m} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ακριβώς μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, συνεπώς βρίσκεται στη θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) της ταλάντωσης που θα εκτελέσει. Συνεπώς έχει τη μέγιστη ταχύτητα, δηλαδή, $V_\sigma = v_{\text{max}} = A\omega \Rightarrow A = \frac{V_\sigma}{\omega}$ (1)

όπου ω , η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος, που δίνεται από τη σχέση:

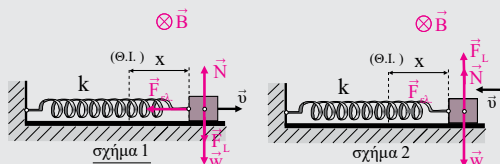
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M + m}} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Αρα από τη σχέση (1) βρίσκουμε το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα:

$$A = 0,25 \text{ m}$$

Το διάστημα s , που θα διανύσει το συσσωμάτωμα στο χρονικό διάστημα μιας περιόδου T της απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει είναι:

$$s = 4A \Rightarrow s = 1 \text{ m}$$

Γ2.

Όταν το σώμα μάζας M' είναι ακίνητο (τόσο πριν από την έναρξη της ταλάντωσης, όσο και στιγμιαία, στις ακραίες θέσεις αυτής), δε δέχεται δύναμη Lorentz από το μαγνητικό πεδίο. Στα παραπάνω σχήματα, φαίνεται το σώμα μάζας M' σε μια τυχαία θέση με απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του (που ταυτίζεται με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου) και οι αντίστοιχες ασκούμενες δυνάμεις σε αυτό όταν κινείται προς τα δεξιά (Σχήμα 1) και όταν κινείται προς τα αριστερά (Σχήμα 2). Η διεύθυνση της δύναμης Lorentz F_L , είναι κατακόρυφη και η φορά της καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού, $w = M'g$, το βάρος του σώματος και N , η κάθετη αντίδραση από το έδαφος. Από τα παραπάνω σχήματα, φαίνεται ότι το σώμα μάζας M' μπορεί να χάσει την επαφή του με το έδαφος μόνο όταν κινείται προς τα αριστερά, όπου η δύναμη Lorentz έχει τότε φορά προς τα πάνω (Σχήμα 2). Το μέτρο της δύναμης Lorentz (εφόσον $\vec{v} \perp \vec{B}$), υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F_L = B|q|v(2)$$

Επομένως, για να εκτελεί με ασφάλεια απλή αρμονική ταλάντωση (ΑΑΤ) το σώμα μάζας M' , αρκεί να μπορεί να διέρχεται από τη Θ.Ι. με φορά προς τα αριστερά, όπου το μέτρο της ταχύτητας (άρα και της δύναμης από το μαγνητικό πεδίο) μεγιστοποιείται. Στον κατακόρυφο άξονα yy' έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + F_L - W = 0 \Rightarrow$$

$$N = M'g - B|q|v(3)$$

Η κάθετη αντίδραση N , από το έδαφος όταν το σώμα βρίσκεται σε επαφή με αυτό είναι:

$$N \geq 0 \Rightarrow B|q|v \leq M'g \Rightarrow B|q|v_{\max} = M'g \Rightarrow$$

$$B|q|\omega' A_{\max} = M'g \Rightarrow A_{\max} = \frac{M'g}{B|q|\omega'}(4)$$

όπου ω' , η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του σώματος μάζας M' , που δίνεται από τη σχέση:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{M'}} = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Άρα, από τη σχέση (4) βρίσκουμε:

$$A_{\max} = \frac{1}{8} \text{m} = 0,125 \text{m}.$$

Συνεπώς, η μέγιστη απομάκρυνση $d_{\max}$, που μπορούμε να δώσουμε στο σώμα μάζας M' , έτσι ώστε αυτό να μην χάνει κατά την κίνησή του την επαφή του με το έδαφος είναι:

$$d_{\max} = A_{\max} \Rightarrow d_{\max} = 0,125 \text{m}$$

Γ3. Όταν αφήσουμε ελεύθερο το σώμα μάζας M' , θα εκτελέσει ΑΑΤ πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο με πλάτος $A = d = 0,1 \text{m} < d_{\max}$, που σημαίνει ότι το σώμα δε θα χάνει σε καμία χρονική στιγμή την επαφή του με το έδαφος. Εφαρμόζοντας αρχή διατήρησης ενέργειας στην ταλάντωση (ΑΔΕΤ) οπότε έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} M' v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{k(A^2 - x^2)}{M'}} \Rightarrow v = -2\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Δεχόμαστε την αρνητική τιμή στην τιμή της ταχύτητας, εφόσον η θετική φορά είναι προς τα δεξιά και το σώμα μάζας M' κατευθύνεται προς τα αριστερά όταν διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση $x = +0,05 \text{m}$.

Σύμφωνα με τη σχέση (2) βρίσκουμε ότι η δύναμη Lorentz που ασκείται στο σώμα μάζας M' έχει μέτρο $F_L = 0,2\sqrt{3} \text{N}$ και φορά προς τα πάνω, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η αντίσταση του τετραγωνικού πλαισίου θα είναι:

$$R = 4\alpha R^* \Rightarrow R = 80 \Omega$$

Η μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή του διαγράμματος αντιστοιχεί σε τέσσερα χρονικά διαστήματα:

Για $\Delta t_1 = 0 - 5\text{s}$ η μαγνητική ροή αυξάνεται γραμμικά από $\Phi_1 = 0$ σε $\Phi_2 = 24\text{Wb}$

Για $\Delta t_2 = 5 - 7\text{s}$ η μαγνητική ροή μειώνεται γραμμικά από $\Phi_3 = 24\text{Wb}$ σε $\Phi_4 = 0$

Για $\Delta t_3 = 7 - 8\text{s}$ η μαγνητική ροή αυξάνεται γραμμικά (με τις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου να έχουν αλλάξει φορά) από $\Phi_5 = 0$ σε $\Phi_6 = -12\text{Wb}$

Για $t_4 \geq 8\text{s}$ η μαγνητική ροή παραμένει σταθερή $\Phi_7 = -12\text{Wb}$.

Η επαγωγική τάση που αναπτύσσεται και η ισχύς που καταναλώνεται στο πλαίσιο σε αυτά τα χρονικά διαστήματα, συνοψίζεται παρακάτω:

$$\text{Για } \Delta t_1 \quad \varepsilon_{\varepsilon\pi 1} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t_1} = -4,8\text{V}$$

$$I_{\varepsilon\pi 1} = \frac{\varepsilon_{\varepsilon\pi 1}}{R} = -0,06\text{A}$$

$$P_1 = I_{\varepsilon\pi 1}^2 R = 0,288\text{W}$$

$$\text{Για } \Delta t_2 \quad \varepsilon_{\varepsilon\pi 2} = -\frac{\Phi_4 - \Phi_3}{\Delta t_2} = 12\text{V}$$

$$I_{\varepsilon\pi 2} = \frac{\varepsilon_{\varepsilon\pi 2}}{R} = 0,15\text{A}$$

$$P_2 = I_{\varepsilon\pi 2}^2 R = 1,8\text{W}$$

$$\text{Για } \Delta t_3 \quad \varepsilon_{\varepsilon\pi 3} = -\frac{\Phi_6 - \Phi_5}{\Delta t_3} = 12\text{V}$$

$$I_{\varepsilon\pi 3} = \frac{\varepsilon_{\varepsilon\pi 3}}{R} = 0,15\text{A}$$

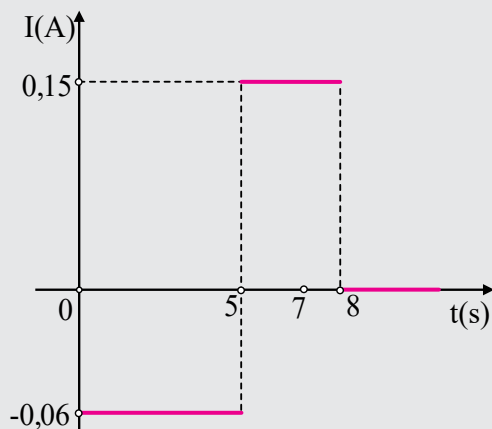
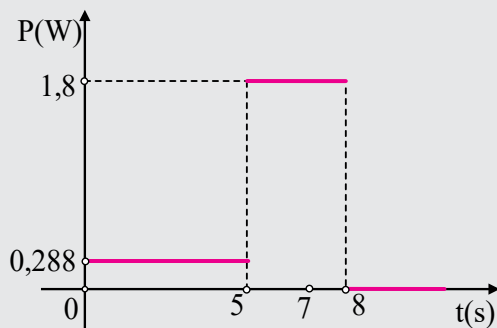
$$P_3 = I_{\varepsilon\pi 3}^2 R = 1,8\text{W}$$

$$\text{Για } t_4 \geq 8\text{s} \quad \varepsilon_{\varepsilon\pi 4} = 0$$

$$I_{\varepsilon\pi 4} = 0$$

$$P_4 = 0$$

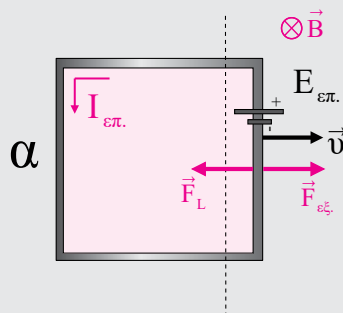
Τα ζητούμενα διαγράμματα θα είναι:



ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Τόσο ο προηγούμενος πίνακας, όσο και τα διαγράμματα, υποδηλώνουν ότι θα μπορούσαμε να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του πλαισίου στο χρονικό διάστημα $\Delta t_2 + \Delta t_3$ κατά τρόπο ενιαίο.

Δ2. Ο χρόνος εισόδου του πλαισίου στο μαγνητικό πεδίο με σταθερή ταχύτητα είναι:

$$v = \frac{x}{t} \Rightarrow t = \frac{\alpha}{v} \Rightarrow t = 10^{-2}\text{s}$$



Καθώς εισέρχεται το πλαίσιο στο μαγνητικό πεδίο, μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που περνά από αυτό, αναπτύσσεται επαγωγική τάση και διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα. Αυτό δημιουργεί δύναμη Laplace, όπως φαίνεται στο σχήμα. (Δύναμη Lorentz δέχονται και τα ηλεκτρόνια στα τμήματα των πλευρών του πλαισίου που είναι παράλληλα στην ταχύτητα. Έχει όμως φορά προς τα τοιχώματα, οπότε η τάση από επαγωγή αναπτύσσεται εγκάρσια, συνεπώς δε συνεισφέρει στην κυκλοφορία ρεύματος και αγνοείται). Για κάθε ένα από τα παραπάνω μεγέθη, ισχύουν:

$$\varepsilon_{\varepsilon\pi} = Bv\alpha \Rightarrow \varepsilon_{\varepsilon\pi} = 2V$$

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{\varepsilon_{\varepsilon\pi}}{R} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = 0,025A$$

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi}\alpha = 5 \cdot 10^{-3} N$$

Για να κινείται το πλαίσιο με σταθερή ταχύτητα θα πρέπει να ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_L + \vec{F}_{\varepsilon\pi} = \vec{0}$$

$$F_L - F_{\varepsilon\pi} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} = 5 \cdot 10^{-3} N$$

Η φορά της $F_{\varepsilon\pi}$ φαίνεται στο σχήμα.

Δ3. Ο λαμπτήρας με ενδείξεις κανονικής λειτουργίας (100V, 50W), έχει ωμική αντίσταση:

$$R_{\Lambda} = \frac{V_{\kappa}^2}{P_{\kappa}} = 200\Omega$$

και για να λειτουργεί κανονικά, θα πρέπει να διαρρέεται από:

$$I_{\kappa} = \frac{V_{\kappa}}{R} = 0,5A$$

Με την περιστροφή του πλαισίου εντός του μαγνητικού πεδίου έντασης B_1 , αναπτύσσεται εναλλασσόμενη τάση στο κύκλωμα το οποίο διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα ενεργού τιμής $I_{\varepsilon\pi}$. Για να λειτουργεί κανονικά ο λαμπτήρας, το ρεύμα κανονικής λειτουργίας πρέπει να ισούται με την ενεργό ένταση του

εναλλασσόμενου ρεύματος. Άρα θα πρέπει να είναι:

$$I_{\varepsilon\pi} = I_{\kappa} \Rightarrow \frac{V_{\varepsilon\pi}}{R_{\text{ολ}}} = I_{\kappa} \Rightarrow \frac{V/\sqrt{2}}{R_{\Lambda} + R} = I_{\kappa} \Rightarrow$$

$$I_{\kappa} = \frac{V}{\sqrt{2} \cdot (R_{\Lambda} + R)} \Rightarrow V = \sqrt{2} \cdot (R_{\Lambda} + R) \cdot I_{\kappa}$$

$$\Rightarrow V = 140 \cdot \sqrt{2}V$$

όπου V το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης.

Για το πλάτος εναλλασσόμενης τάσης σε πλαίσιο που στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα E , ισχύει:

$$V = N \cdot \omega \cdot B_1 \cdot A \Rightarrow$$

$$140 \cdot \sqrt{2}V = 1 \cdot \omega \cdot 10 \cdot \sqrt{2}T \cdot 0,1^2 m^2 \Rightarrow$$

$$\omega = 1400 \frac{\text{rad}}{s}$$

23ο Διαγώνισμα (Δ23)

ΘΕΜΑ Α

A1. γ), A2. β), A3. β), A4. δ)
A5. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ

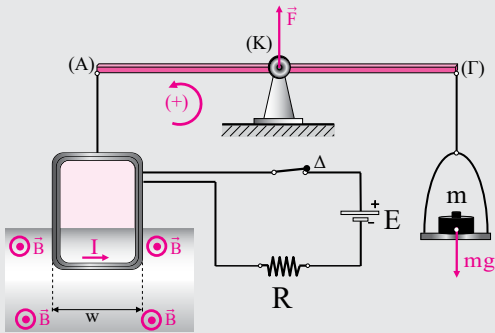
ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **α**).

Δικαιολόγηση

Όταν ο διακόπτης είναι ανοιχτός, επιτυγχάνουμε ισορροπία του βραχίονα στο σημείο (Κ). Όταν ο διακόπτης Δ κλείσει, οι επιπλέον δυνάμεις που ασκούνται στον βραχίονα και ασκούν ροπή ως προς το (Κ) είναι η δύναμη Laplace F_L και το βάρος mg που τοποθετούμε στον δίσκο στα δεξιά. Η επιπλέον δύναμη F που ασκείται στο στήριγμα, δεν ασκεί ροπή ως προς αυτό. Το ρεύμα που διαρρέει το πλαίσιο είναι:

$$I = \frac{E}{R} = 0,3A$$



Συνεπώς, αφού ο βραχίονας ισορροπεί εκ νέου, οι επιπλέον δυνάμεις που δέχεται έχουν ως προς το (Κ):

$$\Sigma \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_L + \vec{\tau}_{mg} + \vec{\tau}_F = 0 \Rightarrow$$

$$F_L (AK) - mg (K\Gamma) + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$F_L = mg \Rightarrow NBIw = mg \Rightarrow$$

$$B = \frac{mg}{NIw} = \frac{4}{15} T$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Από τον νόμο του Wien γνωρίζουμε ότι

$$\lambda_{\max} \cdot T = \text{σταθ.}$$

Με βάση τα δεδομένα της εκφώνησης, αυτό το σταθερό γινόμενο ισούται με

$$2900 \text{ nm} \cdot 1000^\circ \text{K} = 2,9 \cdot 10^6 \text{ nm} \cdot ^\circ \text{K}$$

Θεωρώντας ότι η ανθρώπινη θερμοκρασία κυμαίνεται από $\theta_1 = 35^\circ \text{C}$ έως $\theta_2 = 40^\circ \text{C}$, τα αντίστοιχα όρια των ανιχνευόμενων μηκών κύματος θα είναι:

$$\lambda_1 \cdot T_1 = \text{σταθ.} = 2,9 \cdot 10^6 \text{ nm} \cdot ^\circ \text{K} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{2,9 \cdot 10^6 \text{ nm} \cdot ^\circ \text{K}}{(273 + 35)^\circ \text{K}} = 9416 \text{ nm}$$

$$\lambda_2 \cdot T_2 = \text{σταθ.} = 2,9 \cdot 10^6 \text{ nm} \cdot ^\circ \text{K} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_2 = \frac{2,9 \cdot 10^6 \text{ nm} \cdot ^\circ \text{K}}{(273 + 40)^\circ \text{K}} = 9265 \text{ nm}$$

Για τον λόγο αυτόν οι κάμερες υπερύθρου βελτιστοποιούνται για την ανίχνευση της ακτινοβολίας που εκπέμπει το ανθρώπινο σώμα στην περιοχή αυτή.

B3. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Στα σημεία επαφής οι γραμμικές ταχύτητες των δίσκων έχουν το ίδιο μέτρο αφού δεν έχουμε ολίσθηση του ενός ως προς τον άλλο. Για τους δίσκους Α και Β στο κοινό σημείο επαφής οι γραμμικές ταχύτητες έχουν το ίδιο μέτρο. Δηλαδή:

$$v_B = v_A \Rightarrow \omega_B R_B = \omega_{\text{εισ}} R_A$$

Οι δίσκοι C και B περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega_C = \omega_B$$

Επίσης για τους δίσκους C και D στο κοινό σημείο επαφής τους οι γραμμικές ταχύτητες έχουν το ίδιο μέτρο. Δηλαδή:

$$v_C = v_D \Rightarrow \omega_C R_C = \omega_{\text{εξοδ}} R_D$$

$$\text{Έτσι: } \omega_{\text{εξοδ}} = \omega_C \frac{R_C}{R_D} \quad \text{ή} \quad \omega_{\text{εξοδ}} = \omega_B \frac{R_C}{R_D} \quad \text{ή}$$

$$\omega_{\text{εξοδ}} = \omega_{\text{εισ}} \frac{R_A}{R_B} \frac{R_C}{R_D}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η ενεργός τιμή της ΗΕΔ από επαγωγή είναι:

$$\varepsilon_{\text{ev}} = \frac{\varepsilon_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = \frac{N\omega BA}{\sqrt{2}} = \frac{N2\pi fBA}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{\text{ev}} \cong 20 \text{ V}$$

Γ2. Με βάση τα χαρακτηριστικά κανονικής λειτουργίας, οι λαμπτήρες θα λειτουργήσουν κανονικά αν η ενεργός τάση στα άκρα τους είναι 20V. Η ενεργός τάση στα άκρα του εναλλακτήρα θα είναι μικρότερη από 20V αφού θα είναι ίση με την ενεργό τιμή της πολικής τάσης του εναλλακτήρα, αλλά ο εναλλακτήρας έχει εσωτερική αντίσταση $r = 5\Omega$ και $V_{\pi, \text{ev}} = \varepsilon_{\text{ev}} - I_{\text{ev}} r < \varepsilon_{\text{ev}} = 20$. Επομένως οι λαμπτήρες δε λειτουργούν κανονικά.

Γ3. Ο μέσος ρυθμός παροχής ενέργειας για

την περιστροφή του πλαισίου στον εναλλακτήρα θα ισούται με την μέση ολική ισχύ που παρέχει ο εναλλακτήρας στο κύκλωμα (διατήρηση ενέργειας).

Από τα χαρακτηριστικά κανονικής λειτουργίας των λαμπτήρων, προκύπτει:

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{P} \Rightarrow R = 10\Omega$$

Η ολική αντίσταση του κυκλώματος θα είναι:

$$R_{o\lambda} = \frac{R \cdot R}{R + R} + r = 10\Omega$$

Η ενεργός ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα θα είναι:

$$I_{ev} = \frac{\varepsilon_{ev}}{R_{o\lambda}} \cong 2A$$

Η μέση ολική ισχύς του κυκλώματος είναι:

$$\bar{P}_{o\lambda} = \varepsilon_{ev} I_{ev} \Rightarrow \bar{P}_{o\lambda} = 40W$$

Γ4. Ο μέσος ρυθμός κατανάλωσης ενέργειας στους δύο λαμπτήρες θα είναι ίσος με την κατανάλισκόμενη από αυτούς ισχύ:

$$\bar{P} = I_{ev}^2 R_{\text{ολ λαμπτ}} \Rightarrow \bar{P} \cong \mathbf{20W}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Τα υπόλοιπα 20W (κατά προσέγγιση) της ισχύος του εναλλακτήρα, καταναλώνονται στην δική του αντίσταση r .

ΘΕΜΑ Δ

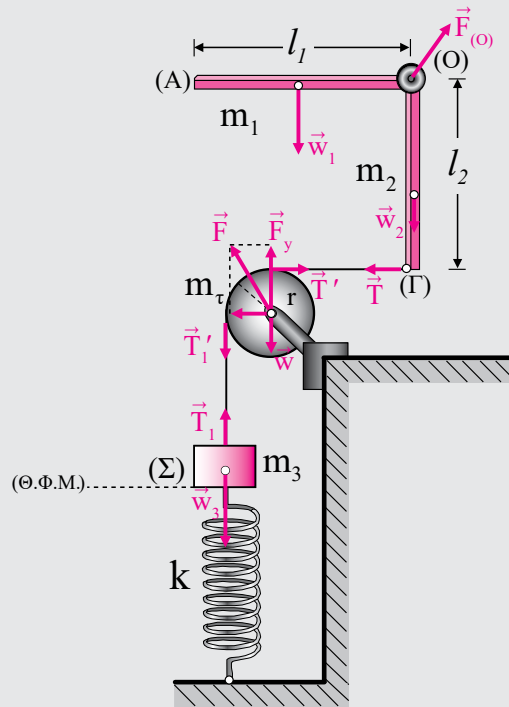
Δ1. Εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα των δύο ράβδων, ως προς τον άξονα στο Ο:

$$(\sum \tau)_0 = 0,$$

$$w_1 \cdot \frac{l}{2} = T \cdot l, T = \frac{w_1}{2} = \frac{m_1 g}{2} \Rightarrow T = 30\text{N}$$

Δ2. Το τεντωμένο οριζόντιο τμήμα του αβ-
ρους νήματος, ασκεί στα άκρα του δυνάμεις
αντίθετες. Δηλαδή κατά μέτρο ισχύει:

$$T' = T = 30\text{N}$$



Εφαρμόζουμε στην τροχαλία συνθήκη ισορροπίας ροπών ως προς τον άξονα περιστροφής στο κέντρο της:

$$(\sum \tau)_{O_x} = 0, T_1' \cdot r = T \cdot r, T_1' = T = 30\text{N}$$

Αναλύουμε τη δύναμη που δέχεται η τροχαλία από τον άξονά της σε δύο συνιστώσες $\vec{F}_x, \vec{F}_y$ οριζόντια και κατακόρυφα, όπως στο σχήμα. Εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων κατά άξονες:

$$\sum F_x = 0, T' - F_x = 0, F_x = T' = 30\text{N}$$

$$\sum F_v = 0, F_v - T_1' - w = 0,$$

$$F_y = T_1' + w = 40\text{N}$$

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα για να υπολογίσουμε το μέτρο της δύναμης F που δέχεται η τροχαλία από τον άξονά της:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow \mathbf{F = 50N}$$

$$T_1 = T_1' = 30\text{N}$$


βάρους του: $w_3 = m_3 g = 30 \text{ N}$.

$$(\Sigma).$$

συσπείρωση κατά Δl και ισχύει:

$$(\sum F)_{\Theta I} = 0, \quad k \cdot \Delta l = m_3 g,$$

$$\Delta l = \frac{m_3 \cdot g}{k} = \frac{30}{300} \text{ m} = 0,1 \text{ m}$$

ροπίας του, ισχύει:

$$\begin{aligned}\Sigma F' &= k \cdot (\Delta l - x) - m_3 \cdot g = \\ &= k \cdot \Delta l - k \cdot x - m_3 g = -k \cdot x\end{aligned}$$

αρμονική, με σταθερά επαναφοράς

$$D = k = 300 \frac{\text{N}}{\text{m}} \text{ και περίοδο}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_3}{k}} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} \text{ s.}$$

Η σύμμετρη που κομμάκι το ήμαρ και αρχί-
σε η απλή αρμονική ταλάντωση του σώματος,
η ταχύτητά του Σ ήταν μηδέν. Άρα η αρχική
του θέση ήταν ακραία θέση της ταλάντωσης
που ακολουθεί, συνεπώς το πλάτος ταλάντω-
σης είναι ίσο με την συσπείρωση του ελατηρί-
ου στη θέση ισορροπίας του σώματος:

$$A = \Delta l = 0,1\text{m}$$

είναι:

$$\Delta l_{\max} = 2A = 0,2\text{m},$$

$$\|x\|_{\max} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1(A)}} \|y\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1(A)}} \|y\|_1 \leq \sqrt{n} \|y\|_{\max}.$$

$$U_{\varepsilon\lambda}^{\max} = \frac{1}{2}k(2 \cdot A)^2 = 2 \cdot k \cdot A^2 \Rightarrow U_{\tau\omega\lambda}^{\max} = 6J$$

[illegible]

$$U_{\tau\alpha\lambda}^{\max} = \frac{1}{2}k \cdot A^2 \Rightarrow U_{\tau\alpha\lambda}^{\max} = 1,5J$$

24ο Διαγώνισμα (Δ24)

ΘΕΜΑ Α

A1. β), A2. α), A3. δ), A4. β)
A5. α) $\wedge$, β) $\wedge$, γ) Σ , δ) Σ , ε) $\wedge$

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **α).**

Δικαιολόγηση

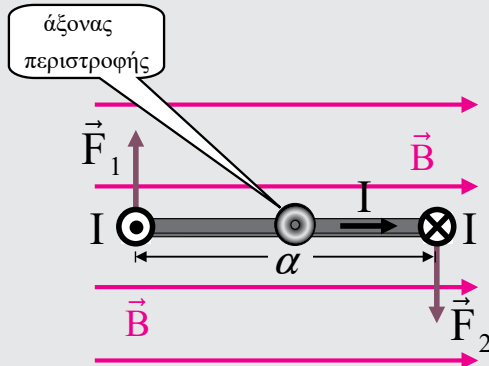
Το ρεύμα που διαρρέει το ορθογώνιο πλαίσιο του οποίου το επίπεδο είναι παράλληλο στις μαγνητικές δυναμικές γραμμές δεν ασκεί δύ-

ναμη και ροπή στα οριζόντια τμήματα του σύρματος επειδή είναι παράλληλα στο πεδίο. Το μαγνητικό πεδίο ασκεί μια δύναμη Laplace σε κάθε ένα από τα κατακόρυφα τμήματα του σύρματος όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού η κατεύθυνση της δύναμης στο ανοδικό ρεύμα στα αριστερά είναι στην αντίθετη κατεύθυνση από τη δύναμη ίσου μέτρου στο προς τα κάτω ρεύμα στα δεξιά. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η κάτοψη του πλαισίου. Κάθε μία δύναμη έχει μέτρο:

$$F_1 = F_2 = BI\alpha$$

Αυτές οι δυνάμεις αποτελούν ένα ζεύγος δυνάμεων, οι φορείς τους απέχουν απόσταση b και η ροπή που προκαλούν στο πλαίσιο τείνει να το περιστρέφει γύρω από τον κατακόρυφο άξονά του. Συνεπώς η ροπή σε μία σπείρα είναι:

$$\tau_1 = Fd = BI\alpha b$$



Η συνολική ροπή που εφαρμόζεται στο ορθογώνιο πλαίσιο N σπειρών είναι:

$$\tau = N\tau_1 = NBI\alpha b$$

Σημείωση: Η ποσότητα $NIB\alpha b$ λέγεται μαγνητική διπολική ροπή του πλαισίου και είναι διανυσματικό μέγεθος με μονάδα μέτρησης το $1\text{A} \cdot \text{m}^2$.

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Από το πείραμα που εκτέλεσε ο πρώτος μαθητής και τον πίνακα τιμών που μας παρείχε προκύπτει γραμμική μεταβολή της δύναμης του βάρους των βαριδίων που χρησιμοποίησε, ανάλογη με την απόσταση. Επειδή στη θέση ισορροπίας οι δυνάμεις των βαρών των βαριδίων και οι δυνάμεις επαφής του ελατηρίου είναι αντίθετες σε κάθε μέτρηση, ο συντελεστής κλίσης της ευθείας είναι:

$$k_1 = \frac{w_1}{x_1} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2}{1 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Από το διάγραμμα που μας παρείχε ο δεύτερος μαθητής, μπορούμε να υπολογίσουμε την σταθερά k_2 :

$$k_2 = \frac{F_{ελ}}{x} = \frac{7,5 \text{ N}}{7,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Θέτοντας σε ταλάντωση τους δύο ταλαντωτές με την ίδια μάζα m και το ίδιο πλάτος A , οι μέγιστες επιταχύνσεις που προκύπτουν έχουν λόγο:

$$\frac{\alpha_{\max_1}}{\alpha_{\max_2}} = \frac{\omega_1^2 A}{\omega_2^2 A} = \frac{\frac{k_1}{m}}{\frac{k_2}{m}} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{50 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{100 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = \frac{1}{2}$$

Άρα η μέγιστη επιτάχυνση του δεύτερου ταλαντωτή είναι μεγαλύτερη και ο λόγος τους είναι:

$$\frac{\alpha_{\max_1}}{\alpha_{\max_2}} = \frac{1}{2}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Από το διάγραμμα φαίνεται πως η κυματοσυνάρτηση έχει μη μηδενικές τιμές μεταξύ, περίπου, των θέσεων $-3,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ και $3,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Αυτό αντιστοιχεί σε αβεβαιότητα στη θέση περίπου $\Delta x \approx 7,0 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ (θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει αβεβαιότητα θέσης το $3,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, αλλά αυτό δεν αλλάζει την απάντηση).

Χρησιμοποιώντας την αρχή της αβεβαιότητας:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar \Rightarrow$$

$$(7,0 \cdot 10^{-10} \text{ m}) \cdot \Delta p \geq \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}}{2\pi} \Rightarrow$$

$$\Delta p \geq 1,5 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το σώμα με την πτώση του αναγκάζει το άκρο του μέσου να ταλαντωθεί και τελικά εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $v_0 = 10 \text{ m/s}$ εκτελώντας κατακόρυφη βολή προς τα πάνω με σταθερή επιτάχυνση g . Έρχεται σε επαφή με το έδαφος στη θέση $x = -15 \text{ m}$, σε χρόνο:

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow$$

$$-15 \text{ m} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2 \Rightarrow$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \text{ s} \Rightarrow$$

$$t_1 = 3 \text{ s} \quad \text{ή} \quad t_2 = -1 \text{ s} \text{ απορρίπτεται}$$

Άρα ο χρόνος πτώσης είναι: $t_1 = 3 \text{ s}$

Γ2. i) Εφόσον ο χρόνος για να εκτελέσει μισή περίοδο ταλάντωσης το σύστημα σώμα-ελαστικό μέσο είναι $t = \frac{1}{50} \text{ s}$, προκύπτει:

$$T = 2 \cdot \frac{1}{50} \text{ s} = \frac{1}{25} \text{ s}, \text{ και άρα η συχνότητα θα}$$

$$\text{είναι } f = \frac{1}{T} = 25 \text{ Hz}.$$

Η συχνότητα ταλάντωσης μόνο του ελαστικού μέσου, αφού εκτοξευθεί το σώμα, δίνεται διπλάσια.

$$\Delta \text{ηλαδή } f' = 50 \text{ Hz}.$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $v_\delta = 25 \text{ m/s}$, οπότε βρίσκουμε ότι το μήκος κύματος θα είναι:

$$v_\delta = \lambda \cdot f' \Rightarrow \lambda = \frac{25 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{50 \text{ s}^{-1}} = 0,5 \text{ m}$$

Η εξίσωση του κύματος θα είναι:

$$y = A \cdot \eta \mu 2\pi \left(f' t - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \eta \mu 2\pi (50 \cdot t - 2 \cdot x) \text{ (S.I.)}$$

ii) Η αντίστοιχη εξίσωση του στιγμιότυπου την $t' = 0,2 \text{ s}$, θα είναι:

$$y = 0,4 \cdot \eta \mu 2\pi (50 \cdot 0,2 - 2 \cdot x) \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \eta \mu 2\pi (10 - 2 \cdot x) \text{ (S.I.)}, \quad 0 \leq x \leq 5 \text{ m}$$

Γ3. Αφού το ελαστικό μέσο είναι ελεύθερο στο ένα άκρο του και ακλόνητα στερεωμένο στο άλλο, αν δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, θα παρουσιάζει κοιλία στο ελεύθερο άκρο και δεσμό στο ακλόνητο.

Άρα για το μήκος L του μέσου έχουμε:

$$L = k \lambda_{\sigma\tau} + \frac{\lambda_{\sigma\tau}}{2} = (2k+1) \frac{\lambda_{\sigma\tau}}{2} \Rightarrow$$

$$L = (2k+1) \frac{\lambda}{4} \Rightarrow 2k+1 = \frac{4L}{\lambda} \Rightarrow$$

$$k = \frac{\frac{4L}{\lambda} - 1}{2} = 24$$

Εφόσον το k προέκυψε ακέραιος αριθμός, δημιουργούνται στάσιμα κύματα.

Το k εκφράζει τον αριθμό των ατράκτων του στάσιμου κύματος, οπότε ο αριθμός των δεσμών θα είναι:

$$N_\Delta = k + 1 \Rightarrow N_\Delta = 25$$

διότι για την πρώτη άτρακτο απαιτούνται 2 δεσμοί και από κει και πέρα, για κάθε άτρακτο απαιτείται άλλος ένας δεσμός.

Ο αριθμός των κοιλιών θα είναι ο αριθμός των ατράκτων συν την πρώτη κοιλία στο ελεύθερο άκρο:

$$N_K = k + 1 \Rightarrow N_K = 25$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για το χρονικό διάστημα $\Delta t = 0 - 2\text{s}$ η ένταση του μαγνητικού πεδίου μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό:

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{1,5\text{T} - 0}{2\text{s} - 0} = \frac{3}{4} \frac{\text{T}}{\text{s}}$$

Η επαγωγική τάση που αναπτύσσεται στο πλαίσιο είναι:

- Για το χρονικό διάστημα 0 έως 2s

$$\varepsilon_{\varepsilon\pi_1} = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} N = \frac{|\Phi_{\text{τελ}} - \Phi_{\text{αρχ}}|}{\Delta t} N = \frac{|\Delta B \cdot A|}{\Delta t} N \Rightarrow \varepsilon_{\varepsilon\pi_1} = 1,5\text{V}$$

Η ολική αντίσταση του πλαισίου είναι:

$$R_{\text{ολ}} = N \cdot R \Rightarrow R_{\text{ολ}} = 100\Omega$$

Το ρεύμα που διαρρέει το πλαίσιο είναι:

$$I_1 = \frac{\varepsilon_{\varepsilon\pi_1}}{R_{\text{ολ}}} = 0,015\text{A}$$

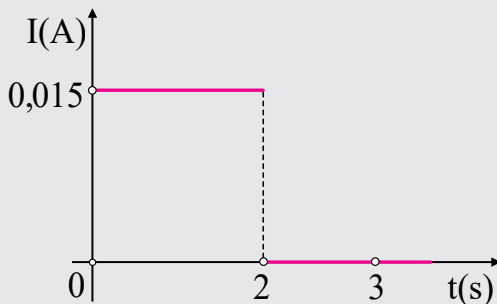
- Για το χρονικό διάστημα 2 έως 3s:

$$\varepsilon_{\varepsilon\pi_2} = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} N = \frac{|\Phi_{\text{τελ}} - \Phi_{\text{αρχ}}|}{\Delta t} N = 0$$

και

$$I_2 = \frac{\varepsilon_{\varepsilon\pi_2}}{R_{\text{ολ}}} = 0$$

Το ζητούμενο διάγραμμα:



Δ2. Η αποδιδόμενη ισχύς την χρονική στιγμή $t_1 = 1,2\text{s}$:

$$P_1 = I_1^2 \cdot R_{\text{ολ}} \Rightarrow P_1 = 0,0225\text{W}$$

και τη χρονική στιγμή $t_1 = 3\text{s}$ επειδή το ρεύμα είναι μηδέν:

$$P_2 = 0$$

Η ολική θερμότητα που αποδίδεται το χρονικό διάστημα $\Delta t = 3\text{s}$:

$$Q_{\text{ολ}} = Q_1 + Q_2 = Q_1 = I_1^2 \cdot R_{\text{ολ}} \cdot \Delta t \Rightarrow Q_{\text{ολ}} = 0,045\text{J}$$

Δ3. Η γενική μορφή της εξίσωσης της εναλλασσόμενης τάσης που προκύπτει από την περιστροφή του πλαισίου μέσα στο ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι:

$$v = V \eta \mu(\omega t + \phi_0)(1)$$

όπου το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης:

$$V = N \cdot \omega \cdot B \cdot A = 300 \cdot \sqrt{2}\text{V}$$

Αφού γνωρίζουμε ότι $\phi_0 = 0$, η (1) γίνεται:

$$v = 300 \cdot \sqrt{2} \cdot \eta \mu(100 \cdot \sqrt{2} \cdot t)(\text{S.I.})$$

Δ4. Όταν συνδέουμε την R_2 στο κύκλωμα η συνολική αντίσταση γίνεται:

$$R_{\Sigma} = R_{\text{ολ}} + R_2 = 100\Omega + 50\Omega = 150\Omega$$

Το κύκλωμα κλείνει και η ενεργός τιμή του ρεύματος είναι:

$$I_{\text{ev}} = \frac{V_{\text{ev}}}{R_{\Sigma}} = \frac{\frac{V}{\sqrt{2}}}{R_{\Sigma}} = \frac{V}{\sqrt{2} \cdot R_{\Sigma}} \Rightarrow I_{\text{ev}} = 2\text{A}$$

25ο Διαγώνισμα (Δ25)

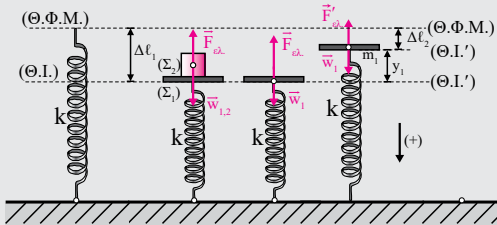
ΘΕΜΑ Α

A1. γ), A2. δ), A3. γ), A4. α)
A5. α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση



Αρχικά το σύστημα των δύο σωμάτων ισορροπεί σε θέση όπου το ελατήριο είναι συσπειρωμένο τόσο, ώστε με την κατακόρυφη προς τα πάνω δύναμη που ασκεί, να εξουδετερώνει τα βάρη των δύο σωμάτων (Θ.Ι.). Κάνουμε ένα ελεύθερο διάγραμμα δυνάμεων στην κατακόρυφη διεύθυνση $y'y$ και εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{\Theta, I} &= 0, m_1 g + m_2 g - k \Delta l_1 = \\ &= 0, k \Delta l_1 = (m_1 + m_2) g \quad (1)\end{aligned}$$

Οπότε προκύπτει:

$$\Delta l_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot g}{k} = \frac{3m_2 g}{k} \quad (2)$$

Όταν αφαιρέσαμε το σώμα Σ_2 , το σύστημα δε βρίσκεται πλέον σε κατάσταση ισορροπίας. Το σώμα Σ_1 , βρίσκεται αυτήν τη στιγμή κάτω από τη δική του θέση ισορροπίας (Θ.Ι') κατά y_1 .

Στη νέα θέση ισορροπίας (Θ.Ι') του σώματος Σ_1 , με τη βοήθεια ελεύθερου διαγράμματος δυνάμεων, εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας:

$$\Sigma F_{\Theta, I'} = 0, m_1 g - k \Delta l_2 = 0, k \Delta l_2 = m_1 g \quad (3)$$

Οπότε προκύπτει:

$$\Delta l_2 = \frac{m_1 g}{k} = \frac{2m_2 g}{k} = \frac{2}{3} \cdot \Delta l_1 \quad (4)$$

Με τη βοήθεια ελεύθερου διαγράμματος δυνάμεων που δέχεται το σώμα Σ_1 , στη θέση όπου αφαιρέσαμε το Σ_2 , έχουμε:

$$\Sigma F = m_1 g - \Delta l_1 = k \Delta l_2 - k \Delta l_1 = -k y_1$$

Δείξαμε ότι το σώμα Σ_1 που απομένει μόνο του πάνω στο ελατήριο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σταθεράς k . Ο ζητούμενος λόγος τη στιγμή που αφαιρέσαμε το Σ_2 , είναι:

$$\begin{aligned}\frac{U_{\text{ελ}}}{U_{\text{ταλ}}} &= \frac{\frac{1}{2} k \cdot \Delta l_1^2}{\frac{1}{2} k \cdot y_1^2} = \frac{\Delta l_1^2}{(\Delta l_1 - \Delta l_2)^2} = \\ &= \frac{\Delta l_1^2}{\left(\Delta l_1 - \frac{2}{3} \Delta l_1\right)^2} = 9\end{aligned}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Το σημείο (Α) εκτελεί σύνθετη κίνηση, μία μεταφορική και μία περιστροφική και τη στιγμή που το νόμισμα εγκαταλείπει το χέρι μας έχει μηδενική ταχύτητα, οπότε:

$$v_A = v_o - \omega \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{2v_o}{L} (1)$$

Για την κατακόρυφη προς τα πάνω κίνηση του κέντρου μάζας (Κ) εφαρμόζουμε τις εξισώσεις κίνησης από τη στιγμή που το νόμισμα εγκαταλείπει το χέρι μας μέχρι να φτάσει στο ύψος h :

$$v_{\text{τελ}} = v_o - gt \Rightarrow 0 = v_o - gt \Rightarrow$$

$$t = \frac{v_o}{g} (2) \quad h = v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow v_o^2 = 2gh (3)$$

Επειδή στο νόμισμα δεν ασκούνται ροπές κατά τη διάρκεια της κίνησής του η γωνιακή του ταχύτητα ω παραμένει σταθερή, συνεπώς η γωνία φ που περιστρέφεται με τη βοήθεια των σχέσεων (1), (2) και (3) είναι:

$$\varphi = \omega t = \frac{2v_o}{L} \cdot \frac{v_o}{g} \Rightarrow \varphi = \frac{2v_o^2}{Lg} \Rightarrow \varphi = \frac{4h}{L} (4)$$

Άρα ο αριθμός N , των περιστροφών που θα εκτελέσει το νόμισμα μέχρι τη στιγμή που το κέντρο μάζας (Κ) φτάσει στο ύψος h , είναι:

$$N = \frac{\Phi}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{4h}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{2h}{\pi L}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Μεταξύ των σημείων (Α) και (Β) έχουμε συμβολή με αποτέλεσμα τη δημιουργία στάσιμου κύματος. Η απόσταση δύο διαδοχικών κοιλιών ή δεσμών είναι $\frac{\lambda}{2}$. Στα σημεία (Κ)

και (Λ) έχουμε αντίστοιχα δύο δεσμούς και ανάμεσα τους δύο κοιλίες, άρα και έναν επιπλέον δεσμό.

Έτσι: $KL = \lambda = 1,5m$

Από την εξίσωση $v = \lambda f \Rightarrow v = 6 \frac{m}{s}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Σύμφωνα με τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein: $K = hf - \phi(1)$

Για να εξέλθει το φωτοηλεκτρόνιο από τη μεταλλική επιφάνεια πρέπει:

$$hf - \phi \geq 0 \Rightarrow h \frac{c}{\lambda} \geq \phi \Rightarrow \lambda \leq \frac{hc}{\phi}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{\phi} = \frac{1200eV \cdot nm}{12eV} \Rightarrow \lambda_{\max} = 100nm$$

Άρα το μέγιστο μήκος κύματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας είναι 100nm και βρίσκεται στην περιοχή της **υπεριώδους ακτινοβολίας**.

Γ2. Τα φωτοηλεκτρόνια μάζας m_e , εξέρχονται από το μέταλλο με σχεδόν μηδενική ταχύτητα και κατόπιν επιταχύνονται στον επιταχυντή, αποκτώντας ταχύτητα μέτρου v . Άρα σύμφωνα με την αρχή διατήρησης ενέργειας έχουμε:

$$W = K \Rightarrow eV = \frac{1}{2} m_e v_{\min}^2 \Rightarrow v_{\min} = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}} (2)$$

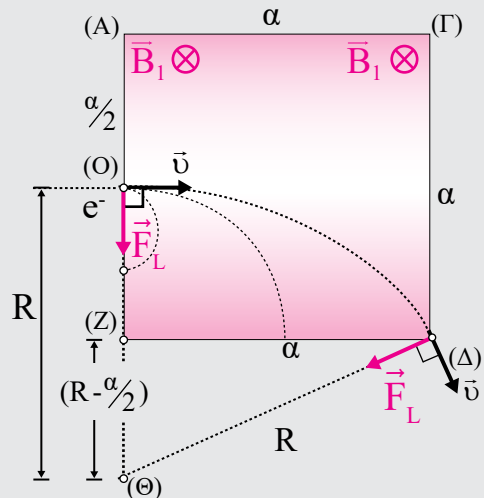
Ακολουθώντας τα φωτοηλεκτρόνια εισέρχονται στο ομογενές μαγνητικό πεδίο διαγράφοντας ένα ημικύκλιο με διάμετρο $(OH) = 2R_{\min}$, οπότε:

$$R_{\min} = \frac{m_e v_{\min}}{Be} \Rightarrow R_{\min} = \frac{m_e}{Be} \cdot \sqrt{\frac{2eV}{m_e}}$$

$$R_{\min} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_e V}{e}} \Rightarrow R_{\min} = 17,07 \cdot 10^{-3} m$$

Συνεπώς, η ελάχιστη απόσταση από το σημείο Ο που εξέρχονται τα φωτοηλεκτρόνια από το μαγνητικό πεδίο είναι:

$$(OH) = 2R_{\min} \Rightarrow (OH) = 34,14 \cdot 10^{-3} m$$



Γ3. Τα φωτοηλεκτρόνια που εξέρχονται από το σημείο (Δ), δέχονται δύναμη Lorentz F_L σε κάθε σημείο της τροχιάς τους εντός του μαγνητικού πεδίου, άρα και στα σημεία εισόδου (Ο) και εξόδου (Δ). Δεδομένου ότι η F_L είναι κάθετη στην ταχύτητα v , συμπεραίνουμε ότι το κέντρο (Θ) της κυκλικής τροχιάς που διαγράφουν τα φωτοηλεκτρόνια, είναι το σημείο τομής των διευθύνσεων των δυνάμεων αυτών. Από το τρίγωνο $Z\Delta\Theta$ έχουμε:

$$(\Theta\Delta)^2 = (Z\Theta)^2 + \alpha^2 \Rightarrow$$

$$R^2 = \left(R - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \alpha^2 \Rightarrow R = \frac{5\alpha}{4} = 0,1\text{m}$$

Το μέτρο της ταχύτητας v του φωτοηλεκτρονίου στο σημείο (O) υπολογίζεται ως εξής:

$$R = \frac{m_e v}{Be} \Rightarrow v = \frac{BeR}{m_e} = 0,44 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Η κινητική ενέργεια K_O κάθε φωτοηλεκτρονίου στο σημείο (O), δηλαδή η κινητική ενέργεια εξόδου από τον επιταχυντή είναι:

$$K_O = \frac{1}{2} m_e v^2 = 0,88 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

και επειδή $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, η κινητική ενέργεια K_O κάθε φωτοηλεκτρονίου είναι $K_O = 5500\text{eV}$.

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης ενέργειας τα φωτοηλεκτρόνια που εξάγονται από τη μεταλλική επιφάνεια έχουν κινητική ενέργεια K_φ , που υπολογίζεται ως εξής:

$$K_O = K_\varphi + eV \Rightarrow K_\varphi = K_O - eV = 5340\text{eV}$$

Συνεπώς, σύμφωνα με τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein (1) έχουμε:

$$K_\varphi = hf - \varphi \Rightarrow K_\varphi = h \frac{c}{\lambda} - \varphi \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{hc}{K_\varphi + \varphi} \Rightarrow \lambda = \frac{1200\text{eV} \cdot \text{nm}}{5352\text{eV}} \Rightarrow$$

$$\lambda = 0,22\text{nm}$$

Άρα το μήκος κύματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας είναι $0,22\text{nm}$ και βρίσκεται στην περιοχή των **ακτίνων X**.

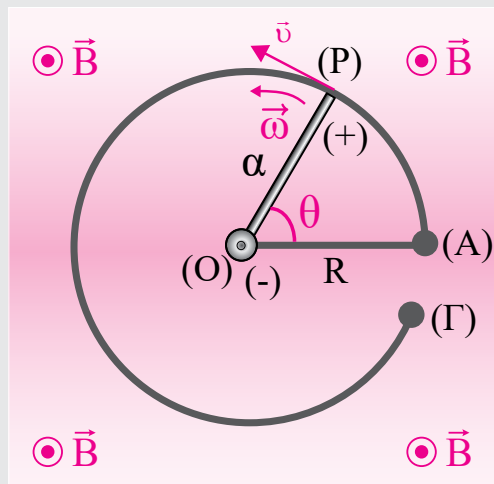
ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του άκρου (P) της ράβδου δίνεται από τη σχέση:

$$v = \omega(OP) = \omega \cdot \alpha \Rightarrow v = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η επαγωγική ΗΕΔ στα άκρα της περιστρεφόμενης ράβδου έχει μέτρο:

$$E_{\text{επ}} = \frac{B\omega\alpha^2}{2} \Rightarrow E_{\text{επ}} = 0,125\text{V}$$



Η πολικότητα της επαγωγικής ΗΕΔ προκύπτει με τον κανόνα του δεξιού χεριού και απεικονίζεται στο παραπάνω σχήμα.

Δ2. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,25\text{s}$ ο αγωγός έχει διαγράψει γωνία:

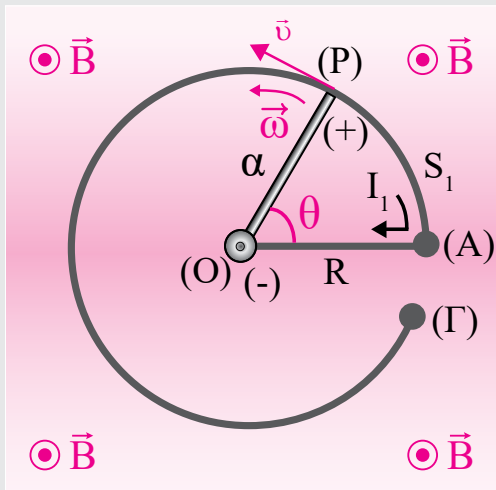
$$\theta_1 = \omega t_1 = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,25\text{s} = 0,5\text{rad}$$

Το τόξο AP έχει μήκος:

$$(AP) = \alpha\theta_1 = 0,5 \cdot 0,5\text{m} = 0,25\text{m}.$$

Ο αγωγίμος βρόχος POAP έχει μήκος:

$$d_1 = (AP) + \alpha + R = 0,25\text{m} + 0,5\text{m} + 0,5\text{m} = 1,25\text{m}$$



Η αντίσταση του βρόχου τη χρονική στιγμή t_1 είναι $R_1 = R \cdot d_1 = 5 \frac{\Omega}{m} 1,25m = 6,25\Omega$. Το ρεύμα που διαρρέει τον βρόχο είναι:

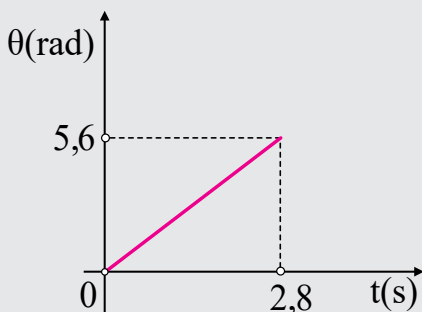
$$I_1 = \frac{E_{\text{επ}}}{R_1} \Rightarrow I_1 = 0,02A$$

Δ3. Η ράβδος εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση, οπότε η επίκεντρη γωνία που διαγράφει δίνεται από τη σχέση:

$$\theta = \omega t \Rightarrow \theta = 2t \text{ (S.I.)}$$

Για να φτάσει το άκρο P της ράβδου στο σημείο Γ χρειάζεται χρόνο $t_{\text{ολ}} = \frac{s_{A\Gamma}}{v} = \frac{2,8}{1} s = 2,8s$.

Για τη γραφική παράσταση της γραμμικής σχέσης χρειαζόμαστε δύο σημεία. Για $t = 0$, ισχύει $\theta = 0$. Για $t = 2,8s$ προκύπτει ότι $\theta = 2 \cdot 2,8 \text{ rad} = 5,6 \text{ rad}$. Η γραφική παράσταση $\theta = f(t)$ είναι η επόμενη.

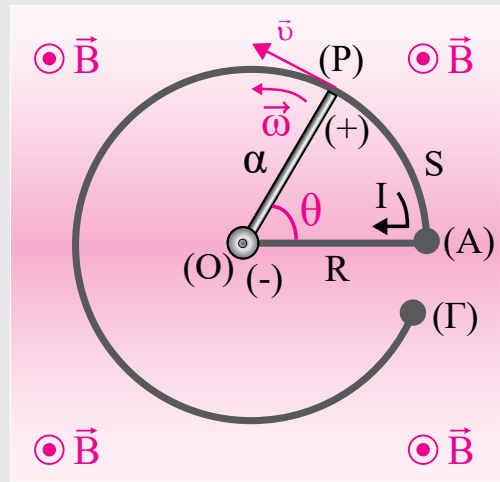


Δ4. Έστω ότι η ράβδος, τη χρονική στιγμή t , έχει περιστραφεί κατά επίκεντρη γωνία θ . Το τόξο AP έχει μήκος $(AP) = vt = t$.

Ο αγωγίμος βρόχος POAP έχει μήκος $d = (AP) + \alpha + R = (t+1)m$.

Η αντίσταση του βρόχου τη χρονική στιγμή t είναι $R = R^* d = 5(t+1)$ στο (S.I.). Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm, η ένταση του ρεύματος στον βρόχο θα είναι:

$$I = \frac{E_{\text{επ}}}{R} = \frac{0,125}{5(t+1)} \Rightarrow I = \frac{0,025}{t+1} \text{ S.I., } 0 \leq t \leq 2,8s$$



Η ελάχιστη τιμή της έντασης του ρεύματος θα διαρρέει τον βρόχο όταν το άκρο (P) φτάσει στο σημείο (Γ). Η τιμή είναι:

$$I_{\min} = \frac{0,025}{2,8+1} \Rightarrow I_{\min} = \frac{1}{152} A$$

26ο Διαγώνισμα (Δ26)

ΘΕΜΑ Α

A1. γ), A2. α), A3. β), A4. δ)
A5. α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Εφαρμόζουμε για το σύστημα των σωμάτων πριν και μετά την κρούση την αρχή διατήρησης της ενέργειας, συμβολίζοντας με Q , τη θερμική ενέργεια που παράχθηκε στο σύστημα:

$$\begin{aligned} K_{\beta\lambda}^{\text{αρχ}} &= K_{\beta\lambda}^{\text{τελ}} + K_{\kappa\beta}^{\text{τελ}} + Q \Rightarrow \\ K_{\kappa\beta}^{\text{τελ}} &= K_{\beta\lambda}^{\text{αρχ}} - K_{\beta\lambda}^{\text{τελ}} - Q = |\Delta K_{\beta\lambda}| - Q = 180 \text{ J} - \\ 100 \text{ J} &\Rightarrow K_{\kappa\beta}^{\text{τελ}} = 80 \text{ J} \end{aligned}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Ο τροχός κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει:

$$v_{\text{CM}} = \omega \cdot R$$

Για το σημείο Α ισχύει:

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{v}_{\gamma\beta, A} \Rightarrow v_A = v_{\text{CM}} + \omega \cdot \frac{R}{2} \Rightarrow \\ v_A &= v_{\text{CM}} + \frac{v_{\text{CM}}}{2} \Rightarrow v_A = 3 \cdot \frac{v_{\text{CM}}}{2} \end{aligned}$$

Για το σημείο Β ισχύει:

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{v}_{\gamma\beta, B} \Rightarrow v_B = v_{\text{CM}} - \omega \cdot \frac{R}{2} \Rightarrow \\ v_B &= v_{\text{CM}} - \frac{v_{\text{CM}}}{2} \Rightarrow v_B = \frac{v_{\text{CM}}}{2} \end{aligned}$$

Συνεπώς προκύπτει:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{3 \cdot \frac{v_{\text{CM}}}{2}}{\frac{v_{\text{CM}}}{2}} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = 3$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η α).

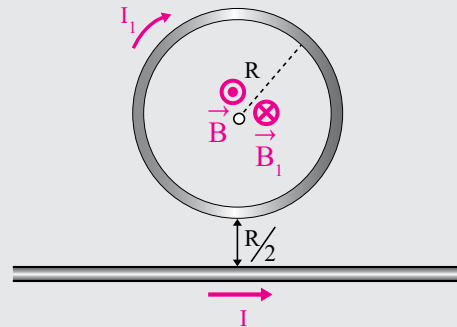
Δικαιολόγηση

Το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ που δημιουργεί ο ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός στο κέντρο του κυκλικού αγωγού έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζει ο κυκλικός αγωγός και φορά από την σελίδα προς τον αναγνώστη. Αυτό το σημείο απέχει από τον ευθύγραμμο

αγωγό απόσταση $r = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$ και το μέτρο του μαγνητικού πεδίου στο σημείο αυτό είναι:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{\frac{3R}{2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4I}{3R}$$

Για να είναι το συνολικό μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του κυκλικού αγωγού ίσο με μηδέν, θα πρέπει το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_1$ που δημιουργεί ο κυκλικός αγωγός να έχει κατεύθυνση αντίθετη από αυτήν του $\vec{B}$. Από τον κανόνα του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι θα πρέπει να διαρρέεται από ρεύμα δεξιόστροφης φοράς, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ο κυκλικός ρευματοφόρος αγωγός στο κέντρο του έχει μέτρο:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I_1}{R}$$

Θέλουμε στο κέντρο το συνολικό μαγνητικό πεδίο να έχει ένταση μηδέν, οπότε:

$$\vec{B}_{\text{ολικό}} = 0 \Rightarrow B = B_1 \Rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4I}{3R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I_1}{R} \Rightarrow I_1 = \frac{2I}{3\pi}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η γενική μορφή της εξίσωσης ταλάντωσης της πηγής είναι:

$$y = A \sin \omega t, \text{ άρα } \omega = 10\pi \text{ rad/s.}$$

Από το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει ότι το πλάτος του κύματος είναι: $A = 0,2 \text{ cm}$.

Επίσης ισχύει ότι: $\Delta x = \frac{3\lambda}{4} = 0,75 \text{ m} \Rightarrow \lambda = 1 \text{ m}$
Η περίοδος της ταλάντωσης της πηγής και του κύματος είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 1/5 \text{ s.}$$

Το μέτρο της ταχύτητας διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_{\delta} = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_{\delta} = 5 \text{ m/s}$$

Γ2. Από το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει ότι:

$$x_B = \frac{5\lambda}{4} \text{ και } x_{\Gamma} = \frac{12\lambda}{4}.$$

Τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $x_1 = 3,5\lambda$, επομένως:

$$x_1 = 3,5\lambda \Rightarrow v_{\delta} \cdot t_1 = 3,5\lambda \Rightarrow t_1 = 0,7 \text{ s}$$

Το σημείο Γ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_{Γ} . Ισχύει:

$$x_{\Gamma} = v_{\delta} \cdot t_{\Gamma} \Rightarrow t_{\Gamma} = \frac{3\lambda}{v_{\delta}} \Rightarrow t_{\Gamma} = 0,6 \text{ s} < t_1$$

Έχουμε:

$$\Delta\phi = \phi_B - \phi_{\Gamma} \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t_{\Gamma}}{T} - \frac{x_{\Gamma}}{\lambda}\right) \\ \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi\left(\frac{x_{\Gamma} - x_B}{\lambda}\right) \Rightarrow \Delta\phi = \frac{7\pi}{2} \text{ rad}$$

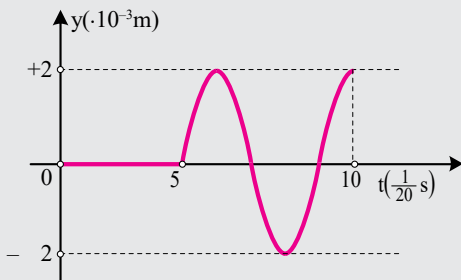
Μετά τη χρονική στιγμή t_{Γ} , κατά την οποία αρχίζει να ταλαντώνεται το σημείο Γ, η διαφορά φάσης των σημείων Β και Γ δεν εξαρτάται από τη χρονική στιγμή υπολογισμού της.

Γ3. Το σημείο Β αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_B . Προκύπτει:

$$x_B = v_{\delta} \cdot t_B \Rightarrow t_B = \frac{5\lambda}{v_{\delta}} \Rightarrow t_B = \frac{5}{20} \text{ s}$$

Εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Β:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right) \Rightarrow \\ y = 2 \cdot 10^{-3} \eta\mu 2\pi\left(5t - \frac{5}{4}\right) \text{ (S.I.)}, t \geq \frac{5}{20} \text{ s}$$



Γ4. Από το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος προκύπτει ότι:

$$2A = 0,4 \text{ cm} \Rightarrow A = 0,2 \text{ cm.}$$

Επίσης, το σημείο Ο του γραμμικού ελαστικού μέσου είναι κοιλία, το σημείο Δ είναι δεσμός και το μήκος του γραμμικού ελαστικού μέσου είναι: $L = \frac{13\lambda}{4}$.

Επειδή το γραμμικό ελαστικό μέσο είναι όμοιο με το προηγούμενο, η ταχύτητα διάδοσης των αρμονικών κυμάτων θα είναι ίδια, επομένως:

$$v_{\delta} = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{v_{\delta}}{f} \Rightarrow \lambda = 1 \text{ m}$$

Επομένως:

$$L = \frac{13}{4} \text{ m}$$

Ισχύει:

$$T = \frac{1}{f} = 0,2 \text{ s}$$

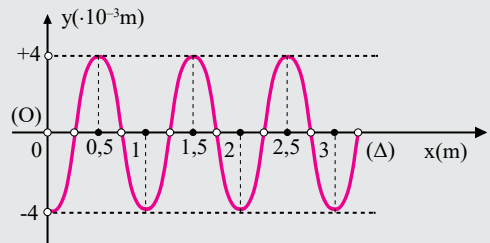
Εξίσωση στάσιμου κύματος:

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow \\ y = 4 \cdot 10^{-3} \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi x) \cdot \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.) για} \\ 0 \leq x \leq \frac{13}{4} \text{ m}$$

Το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_3 - t_2$ είναι:

$$\Delta t = 0,1 \text{ s} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2}.$$

Τη χρονική στιγμή t_3 κάθε σημείο που ταλαντώνεται θα βρεθεί σε ακραία θέση αντίθετη εκείνης που βρισκόταν τη χρονική στιγμή t_2 . Το ζητούμενο στιγμιότυπο είναι:



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η ένταση του φωτός είναι: $0,280 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ενώ το εμβαδόν της επιφάνειας είναι:

$40,0 \text{ cm}^2 = 40,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. Αυτό σημαίνει πως η συνολική ισχύς στην επιφάνεια θα είναι:

$$P_{\text{ολ}} = 0,280 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 40,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \Rightarrow$$

$$P_{\text{ολ}} = 1,12 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

Δ2. Κατά μέσο όρο σε κάθε ηλεκτρόνιο αντιστοιχεί εμβαδόν ίσο με:

$$(2,30 \cdot 10^{-10} \text{ m}) \cdot (2,30 \cdot 10^{-10} \text{ m}) = 5,29 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$$

Το πλήθος των ηλεκτρονίων στην επιφάνεια θα είναι:

$$\frac{\text{Εμβαδόν}}{5,29 \times 10^{-20} \text{ m}^2} = \frac{40,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2}{5,29 \times 10^{-20} \text{ m}^2} = 7,56 \cdot 10^{16} \text{ ηλεκτρόνια}$$

Κατά μέσο όρο σε κάθε ηλεκτρόνιο θα αντιστοιχεί ισχύς:

$$P = \frac{1,12 \times 10^{-3} \text{ W}}{7,56 \times 10^{16} \text{ ηλεκτρόνια}} \Rightarrow P = 1,48 \cdot 10^{-20} \text{ W}$$

Δ3. Για να εκπεμφθεί ένα ηλεκτρόνιο, θα πρέπει να απορροφήσει ενέργεια τουλάχιστον ίση με το έργο εξαγωγής. Με βάση την κυματική θεωρία το φως εκπέμπεται και απορροφάται κατά συνεχή τρόπο. Υποθέτοντας πως τα ηλεκτρόνια απορροφούν κατά μέσο όρο ενέργεια με τον ρυθμό που υπολογίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα η εκπομπή θα γίνεται σε χρονικό διάστημα Δt για το οποίο ισχύει:

$$7,52 \cdot 10^{-19} \text{ J} = (1,48 \cdot 10^{-20} \text{ W}) \cdot \Delta t \Rightarrow$$

$$\Delta t = 50,8 \text{ s}$$

Το διάστημα αυτό σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να θεωρηθεί ακαριαίο.

Δ4. Με βάση τη σωματιδιακή θεωρία του φωτός, το φως ούτε εκπέμπεται ούτε απορροφάται συνεχώς, αλλά σε πακέτα ενέργειας που ονομάζονται φωτόνια. Για να εκπεμφθεί ένα ηλεκτρόνιο δεν χρειάζεται να συγκεντρώσει σταδιακά την απαιτούμενη ενέργεια (έργο εξαγωγής), άρα δεν απαιτείται να περάσει μεγάλο χρονικό διάστημα. Αρκεί να απορροφήσει ένα μόνο φωτόνιο (κατάλληλης ενέργειας). Κάποια ηλεκτρόνια θα απορροφήσουν τα πρώτα φωτόνια που θα πέσουν στην επιφάνεια και θα εκπεμφθούν άμεσα.

27ο Διαγώνισμα (Δ27)

ΘΕΜΑ Α

A1. δ), A2. γ), A3. β), A4. δ)
A5. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η β).

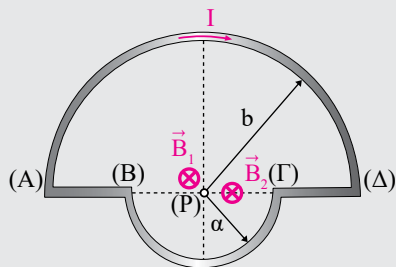
Δικαιολόγηση

Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το ημικύκλιο ακτίνας b στο σημείο P είναι κάθετο στο επίπεδο του βρόχου και σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού έχει φορά από τον αναγνώστη προς την σελίδα. Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του ημικυκλίου είναι το μισό από αυτό που δημιουργεί κυκλικός αγωγός ίδιας ακτίνας και έντασης ρεύματος. Επομένως:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2b} = \frac{\mu_0 I}{4b}$$

Ομοίως το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το ημικύκλιο ακτίνας a στο σημείο P είναι κάθετο στο επίπεδο του βρόχου, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού έχει φορά από τον αναγνώστη προς την σελίδα και μέτρο:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4a}$$



Όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα, αυτά τα δύο μαγνητικά πεδία είναι ομόρροπα στο σημείο P, οπότε το συνολικό μαγνητικό πεδίο που δημιουργούν έχει μέτρο:

$$B_p = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{4b} + \frac{\mu_0 I}{4a} = \frac{\mu_0 I}{8a} + \frac{\mu_0 I}{4a} \Rightarrow B_p = \frac{3\mu_0 I}{8a}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Όταν το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A , έχοντας ενέργεια ταλάντωσης 10 J , ισχύει:

$$E_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} DA^2 = 10 \text{ J} \quad (1)$$

Όταν ασκούμε στιγμιαία μία δύναμη τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση της ταλάντωσης, με αποτέλεσμα τον διπλασιασμό του πλάτους της ταλάντωσης, θα έχουμε σύμφωνα με τη σχέση (1):

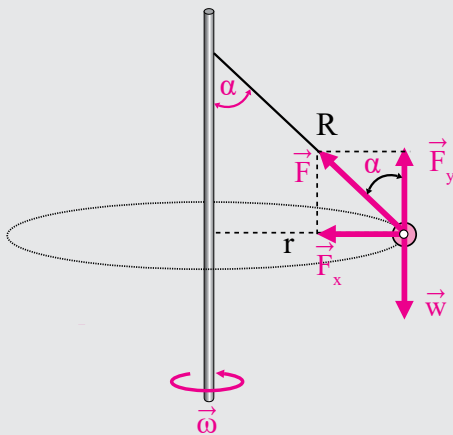
$$E_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} D(2A)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} DA^2 = 40 \text{ J} \quad (2)$$

Συνεπώς, το έργο W , που προσφέραμε στο ταλαντούμενο σύστημα μέσω αυτής της στιγμιαίας δύναμης, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (1) και (2), είναι:

$$W = E_{\text{τελ}} - E_{\text{αρχ}} \Rightarrow W = 30 \text{ J}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η **α**).

Δικαιολόγηση



Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα μάζας m είναι: Η δύναμη $\vec{F}$ από τη ράβδο στην άκρη της οποίας έχει στερεωθεί και το βάρος της $\vec{w}$. Αναλύουμε την δύναμη $\vec{F}$ στις συνιστώσες της. Η $\vec{F}_x$ παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Έτσι για το μέτρο της θα έχουμε:

$$F_x = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

Από τη σχέση $\eta\mu\alpha = \frac{r}{R}$ καταλήγουμε στην έκφραση:

$$F_x = m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \eta\mu\alpha$$

Στον κατακόρυφο άξονα έχουμε ισορροπία οπότε: $F_y = w = F_{\text{συνα}}$

Επίσης:

$$\epsilon\phi\alpha = \frac{F_x}{F_y} \Rightarrow \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \eta\mu\alpha}{m \cdot g}$$

Τελικά:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{g}{\omega^2 R}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Το αρμονικό κύμα που διαδίδεται στο ελαστικό μέσο έχει εξίσωση: $y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$. Όταν το σημείο Σ διεγερθεί από το κύμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση:

$$y_{\Sigma} = A \cdot \eta\mu\phi_{\Sigma}$$

όπου $\phi_{\Sigma} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{\Sigma}}{\lambda} \right)$ είναι η φάση του σημείου Σ .

Έστω t_{Σ} η χρονική στιγμή διέγερσης του σημείου Σ από το κύμα. Από $t_0 = 0$ έως t_{Σ} η φάση του σημείου Σ είναι μηδέν γιατί παραμένει ακίνητο στη θέση ισορροπίας του. Σύμφωνα με το διάγραμμα $\phi_{\Sigma} - t$, το σημείο Σ διεγείρεται τη χρονική στιγμή $t_{\Sigma} = 2\text{ s}$.

Το κύμα διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα στο γραμμικό ελαστικό μέσο επομένως:

$$x_{\Sigma} = v_{\kappa} \cdot t_{\Sigma} \Rightarrow v_{\kappa} = 4 \text{ m/s}$$

Η κλίση της γραφικής παράστασης $\phi_{\Sigma} - t$ είναι ίση με τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του σημείου Σ και του αρμονικού κύματος.

Ισχύει:

$$\omega = \frac{\Delta\phi_{\Sigma}}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \left(\frac{4\pi}{2} \right) \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega = 2\pi \text{ rad/s}$$

$$\text{Όμως: } \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 1 \text{ s}$$

Σύμφωνα με τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής: $v_{\kappa} = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = 4 \text{ m}$

Γ2. Η γενική μορφή της εξίσωσης ταλάντωσης της πηγής είναι: $y = A \cdot \eta\mu\omega t$, επομένως το πλάτος του κύματος είναι: $A = 0,5 \text{ m}$.

Σύμφωνα με τους παραπάνω υπολογισμούς, η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι:

$$y = 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{4} \right) \quad (\text{S.I.})$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2,5 \text{ s}$ το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $x_1 = v_{\kappa} \cdot t_1 \Rightarrow x_1 = 10 \text{ m}$.

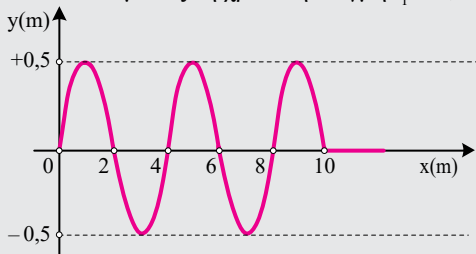
Εξίσωση του στιγμιότυπου του κύματος τη χρονική t_1 :

$$y = 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(2,5 - \frac{x}{4} \right) \quad (\text{S.I.}), 0 \leq x \leq 10 \text{ m}$$

Καταγράφουμε τις τιμές των x, y στον παρακάτω πίνακα:

$x(\text{m})$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y(\text{m})$	0	+0,5	0	-0,5	0	+0,5	0	-0,5	0	+0,5	0

Στο ακόλουθο διάγραμμα φαίνεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2,5 \text{ s}$.



Γ3. Η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Σ δίνεται από την εξίσωση:

$$v_{\Sigma} = \omega \cdot A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{\Sigma}}{\lambda} \right)$$

Τη χρονική στιγμή t_1 , έχουμε:

$$v_{\Sigma} = 2\pi \cdot 0,5 \cdot \sin 2\pi \left(\frac{2,5}{1} - \frac{8}{4} \right) \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$v_{\Sigma} = -\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Γ4. Τα κύματα που συμβάλουν για να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα έχουν ίδιο πλάτος, ίδια συχνότητα και διαδίδονται με αντίθετη φορά στο ίδιο ελαστικό μέσο. Το ένα αρμονικό κύμα έχει εξίσωση:

$$y = 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t - \frac{x}{4} \right) \text{ (S.I.)}$$

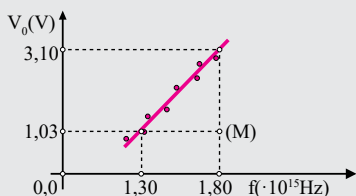
Επομένως, το άλλο αρμονικό κύμα θα έχει εξίσωση:

$$y = 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(t + \frac{x}{4} \right) \text{ (S.I.)}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η γενική μορφή της εξίσωσης της τάσης αποκοπής V_0 σε συνάρτηση με τη συχνότητα της ακτινοβολίας f είναι:

$$V_0 = \alpha \cdot f + \beta \quad (1)$$



Από τις τιμές που φαίνονται στο διάγραμμα υπολογίζουμε την κλίση της ευθείας:

$$\alpha = \frac{\Delta V_0}{\Delta f} = \frac{(\text{ΜΑ})}{(\text{ΚΜ})} = \frac{3,10 - 1,03}{(1,80 - 1,30) \cdot 10^{15} \text{ Hz}} \Rightarrow$$

$$\alpha = 4,14 \cdot 10^{-15} \text{ V/Hz}$$

Για $f = 1,30 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ είναι $V_0 = 1,03 \text{ V}$, άρα από τη σχέση (1) έχουμε:

$$1,03 = 4,14 \cdot 10^{-15} \cdot 1,30 \cdot 10^{15} + \beta \Rightarrow$$

$$\beta = -4,35 \text{ V}$$

Συνεπώς προκύπτει:

$$V_0 = 4,14 \cdot 10^{-15} \cdot f - 4,35 \text{ (S.I.)} \quad (2)$$

Από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση έχουμε:

$$K = hf - \phi \quad (3)$$

Εφαρμόζοντας ΘΜΚΕ για την κίνηση ενός φωτοηλεκτρονίου από την κάθοδο στην άνοδο και θέτοντας όπου $K_{\text{αν}} = 0$ και $K_{\text{καθ}} = K = eV_0$, έχουμε:

$$|q_e|V_0 = hf - \phi \Rightarrow V_0 = \frac{h}{|q_e|} \cdot f - \frac{\phi}{|q_e|} \quad (4)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (2) και (4) υπολογίζουμε την τιμή της σταθεράς του Planck:

$$\frac{h}{|q_e|} = 4,14 \cdot 10^{-15} \cdot \frac{\text{J} \cdot \text{s}}{\text{C}} \Rightarrow$$

$$h = 4,14 \cdot 10^{-15} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot \text{s} \Rightarrow$$

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Δ2. Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (2) και (4) υπολογίζουμε το έργο εξαγωγής του μετάλλου της επιστροφής της επιφάνειας της καθόδου:

$$\frac{\phi}{|q_e|} = 4,35 \frac{\text{J}}{\text{C}} \Rightarrow \phi = 4,35 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \Rightarrow$$

$$\phi = 6,96 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Η συχνότητα κατωφλίου f_0 δίνεται από τη σχέση:

$$f_0 = \frac{\phi}{h} \Rightarrow f_0 = 1,05 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

Δ3.

Αν λ' είναι το μήκος κύματος των σκεδαζόμενων φωτονίων, τότε σύμφωνα με την εξίσωση Compton έχουμε:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e \cdot c} (1 - \sin \phi) \Rightarrow$$

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e \cdot c} (1 - \sin 120^\circ) \Rightarrow$$

$$\lambda' = \lambda + \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{m_e \cdot c} \quad (5)$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση για την κατά 20% μεταβολή του μήκους κύματος έχουμε:

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} \cdot 100\% = 20\% \Rightarrow \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = 0,2 \Rightarrow \lambda' = 1,2\lambda \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) βρίσκουμε:

$$1,2\lambda = \lambda + \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{m_e \cdot c} \Rightarrow \frac{\lambda}{5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{m_e \cdot c} \Rightarrow \lambda = \frac{15}{2} \cdot \frac{h}{m_e \cdot c} \Rightarrow \lambda = 1,84 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Δ4. Κατά τη σκέδαση ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας. Αν E_φ είναι η ενέργεια του προσπίπτοντος φωτονίου, E'_φ είναι η ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου και K_e είναι η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά τη σκέδαση, τότε:

$$E_\varphi = E'_\varphi + K_e \Rightarrow \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + K_e \Rightarrow K_e = hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) \quad (7)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (6), η εξίσωση (7) γίνεται:

$$K_e = \frac{hc}{6\lambda} \Rightarrow K_e = 1,80 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

28ο Διαγώνισμα (Δ28)

ΘΕΜΑ Α

A1. δ), A2. δ), A3. β), A4. δ)
A5. α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **γ**).

Δικαιολόγηση

Η απόσταση $\Pi_2 B$ διανύεται από το κύμα σε χρόνο τεσσάρων ταλαντώσεων δηλαδή σε χρόνο $4T$, άρα είναι: $\Pi_2 B = vt = v4T = 4\lambda$ (1)

Η απόσταση $\Pi_1 B$ διανύεται σε χρόνο $t_2 = 4T + \frac{3T}{2} = \frac{11T}{2}$, άρα είναι: $\Pi_1 B = \frac{11\lambda}{2}$ (2) επειδή σε χρόνο

T το κύμα διαδίδεται κατά ένα μήκος κύματος λ . Οπότε από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\Pi_1 B - \Pi_2 B = \frac{11\lambda}{2} - 4\lambda = \frac{3\lambda}{2}$$

δηλαδή περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος, κατά συνέπεια το σημείο Σ παραμένει διαρκώς ακίνητο (σημείο απόσβε-

σης). Άρα, το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Σ θα είναι μηδέν.

B2. Σωστή απάντηση είναι η **β**).

Δικαιολόγηση

Σύμφωνα με τον ορισμό της γωνιακής επιτάχυνσης:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} dt$$

Το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης γωνιακής επιτάχυνσης-χρόνου ($\alpha_{\gamma\omega\nu} - t$) και του άξονα t , είναι ίσο με την αντίστοιχη μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου. Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο δίσκος είναι αρχικά ακίνητος, ισχύει ότι $\omega_0 = 0$. Η μεταβολή, $\Delta\omega$, της γωνιακής ταχύτητας από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\Delta\omega = \left[\frac{5+10}{2} \cdot (+10) + \frac{5}{2} \cdot (-10) \right] \text{ rad/s}$$

Επομένως:

$$\omega_1 - \omega_0 = (75 - 25) \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega_1 = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η **β**).

Δικαιολόγηση

Για τις ταχύτητες των δύο σφαιρών μετά την κεντρική ελαστική κρούση μεταξύ τους, με τη σφαίρα μάζας m_1 αρχικά ακίνητη ισχύουν οι σχέσεις:

$$v'_1 = \frac{2 \cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}, \quad v'_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

Για να κινούνται μετά την κρούση οι δύο σφαίρες με αντίθετες κατευθύνσεις, πρέπει η αρχικά κινούμενη σφαίρα μάζας m_2 να αντιστρέψει τη φορά της κίνησής της. Δηλαδή οι ταχύτητες $\vec{v}_2, \vec{v}'_2$ να είναι αντίρροπες, άρα οι αλγεβρικές τους τιμές v_2, v'_2 να είναι ετερόσημες. Αυτό γίνεται εάν ισχύει:

$$\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} < 0 \Rightarrow m_2 < m_1$$

Κατά την ελαστική κεντρική κρούση της σφαίρας μάζας m_1 με τον τοίχο, η ταχύτητά της γίνεται αντίθετη αυτής που είχε πριν την κρούση της μαζί του. Δηλαδή ισχύει:

$$v''_1 = -v'_1 = -\frac{2 \cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

Για να συγκρουστούν οι δύο σφαίρες ξανά πρέπει να ισχύει:

$$|v_1''| > |v_2'| \Rightarrow \left| -\frac{2 \cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \right| > \left| \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \right| \Rightarrow$$

$$\frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot |v_2| > \left| \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right| \cdot |v_2|$$

και επειδή ισχύει $m_2 - m_1 < 0$ πρέπει:

$$\frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} > \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow 2 \cdot m_2 > m_1 - m_2 \Rightarrow$$

$$3 \cdot m_2 > m_1$$

και τελικά: $3 \cdot m_2 > m_1 > m_2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η εξίσωση ταχύτητας του απλού αρμονικού ταλαντωτή $v = 4\pi \sin(10\pi t)$ αντιστοιχεί στην γενική μορφή $v = v_{\max} \sin(\omega t)$. Με αντιστοίχιση των σχέσεων προκύπτει ότι $v_{\max} = 4\pi \text{ m/s}$ και $\omega = 10\pi \text{ rad/s}$. Το πλάτος ταλάντωσης είναι:

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{\max}}{\omega} \Rightarrow A = 0,4 \text{ m}$$

Αντίστοιχα, η περίοδος ταλάντωσης είναι:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T_0 = 0,2 \text{ s}$$

Γ2. Η εξίσωση επιτάχυνσης έχει γενική μορφή $a = -a_{\max} \sin(\omega t)$. Η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης έχει μέτρο:

$$a_{\max} = \omega^2 A \Rightarrow a_{\max} = 400 \text{ m/s}^2$$

Αντικαθιστώντας στην γενική μορφή της εξίσωσης επιτάχυνσης προκύπτει ότι:

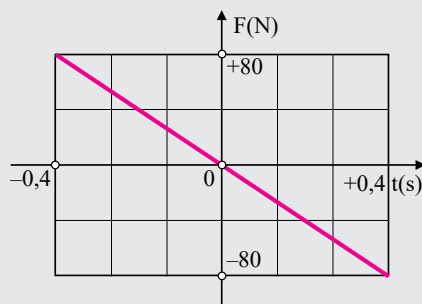
$$a = -400\pi(10\pi t) \text{ (S.I.)}$$

Γ3. Η σχέση που συνδέει την δύναμη επαναφοράς με την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας σε μία απλή αρμονική ταλάντωση έχει μορφή $F = -Dx$, όπου D είναι η σταθερά επαναφοράς. Η τιμή της είναι:

$$D = m\omega^2 \Rightarrow D = 200 \text{ N/m}$$

Επομένως, η συνάρτηση δύναμης επαναφοράς-απομάκρυνσης είναι $F = -200x$, με $-0,4 \leq x \leq +0,4$. Η σχέση αυτών των δύο μεγεθών είναι γραμμική και για τον σχεδιασμό της γραφικής της παράστασης σχεδιάζουμε έναν πίνακα τιμών.

Απομάκρυνση $x(\text{m})$	-0,4	0	+0,4
Δύναμη επαναφοράς $F(\text{N})$	+80	0	-80



Γ4. Στην περίπτωση που στο ταλαντούμενο σύστημα επεμβαίνει περιοδικά ένα εξωτερικό αίτιο (διεγέρτης) προσφέροντας ενέργεια μέσω της δύναμης που ασκεί, το σύστημα ταλαντώνεται με την συχνότητα του διεγέρτη και όχι με την ιδιοσυχνότητά του. Ο διεγέρτης έχει κυκλική συχνότητα $\omega_\delta = 20\pi \text{ rad/s}$, οπότε η περίοδος ταλάντωσης του συστήματος είναι:

$$T_\delta = \frac{2\pi}{\omega_\delta} \Rightarrow T_\delta = 0,1 \text{ s}$$

Η συχνότητα του διεγέρτη είναι $f_\delta = \frac{1}{T_\delta} = 10 \text{ Hz}$, ενώ η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του συστήματος είναι $f_0 = \frac{1}{T_0} = 5 \text{ Hz}$. Επειδή αυτές οι δύο συχνότητες δεν είναι ίσες, **το σύστημα δεν βρίσκεται σε συντονισμό.**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η τάση αποκοπής του φωτορεύματος δίνεται:

$$V_0 = \frac{hf}{e} - \frac{\phi}{e} \Rightarrow V_0 = 40 \text{ V}$$

Δ2. Για την διαφορά δυναμικού V , που επιταχύνει τα ηλεκτρόνια που εξέρχονται από την κάθοδο, ισχύει:

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow K_2 - K_1 = W_{F_\phi} \Rightarrow$$

$$101 \cdot K_1 - K_1 = e \cdot V \Rightarrow 100 \cdot K_1 = e \cdot V \Rightarrow$$

$$100 \cdot \frac{1}{2} m_e v_1^2 = e \cdot V \quad (1)$$

Όμως, για την έξοδο του κάθε ηλεκτρονίου από την κάθοδο, ισχύει:

$$\frac{1}{2} m_e v_1^2 = hf - \phi \quad (2)$$

Από (1) και (2):

$$100 \cdot (hf - \phi) = e \cdot V \Rightarrow V = \frac{100 \cdot (hf - \phi)}{e} \Rightarrow V = 4000 \text{ V}$$

Δ3. Για την περίοδο T της κυκλικής κίνησης των ηλεκτρονίων όταν εισέρχονται στο μαγνητικό πεδίο, ισχύει:

$$T = \frac{2\pi m_e}{Bq} \quad (3)$$

Για την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που εκτελούν:

$$R = \frac{m_e v_2}{Bq} \quad (4)$$

Διαιρώντας κατά μέλη:

$$\frac{(4)}{(3)} \Rightarrow \frac{R}{T} = \frac{\frac{m_e v_2}{Bq}}{\frac{2\pi m_e}{Bq}} = \frac{m_e v_2}{2\pi m_e} = \frac{v_2}{2\pi} \Rightarrow R = \frac{v_2}{2\pi} T \quad (5)$$

Όμως:

$$\begin{aligned} K_2 &= 101 \cdot K_1 \Rightarrow \frac{1}{2} m_e v_2^2 = 101 \cdot \frac{1}{2} m_e v_1^2 \Rightarrow \\ \frac{1}{2} m_e v_2^2 &= 101 \cdot (hf - \phi) \Rightarrow \\ v_2 &= \sqrt{\frac{2 \cdot 101 \cdot (hf - \phi)}{m_e}} \Rightarrow \\ v_2 &= 37,7 \cdot 10^6 \text{ m/s} \quad (6) \end{aligned}$$

Η (5) λόγω της (6) γίνεται:

$$R = \frac{v_2}{2\pi} T \Rightarrow R = 0,6 \text{ m}$$

Δ4. Για να κινηθούν τα ηλεκτρόνια ευθύγραμμα και ομαλά, θα πρέπει να εφαρμόσουμε κατάλληλο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, ώστε:

$\vec{F}_{\eta\lambda} = -\vec{F}_L \Rightarrow \mathcal{E} \cdot q = B \cdot v_2 \cdot q \Rightarrow \mathcal{E} = B \cdot v_2$ (7)
Από την (3) βρίσκουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi m_e}{Bq} \Rightarrow B = \frac{2\pi m_e}{Tq} \Rightarrow \\ B &= 35,71 \cdot 10^{-5} \text{ T} \quad (8) \end{aligned}$$

Άρα:

$$\mathcal{E} = B \cdot v_2 \Rightarrow \mathcal{E} = 13462,67 \text{ V/m}$$

29ο Διαγώνισμα (Δ29)

ΘΕΜΑ Α

A1. γ), A2. γ), A3. γ), A4. α)

A5. α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Η διαφορά φάσης για δύο σημεία A και B, την ίδια χρονική στιγμή, δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \phi_A - \phi_B = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda} \right) - 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda} \right) = \\ &= 2\pi \frac{x_B - x_A}{\lambda} \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \quad (1) \end{aligned}$$

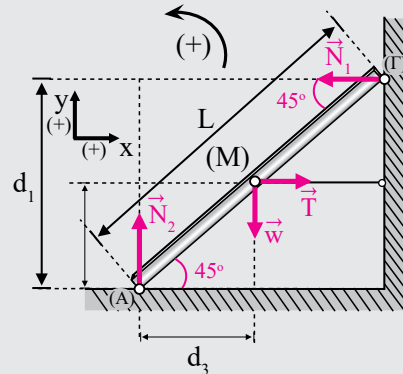
$$\text{όπου: } \lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = 1,5 \text{ m} \quad (2)$$

αντικαθιστούμε στην (1): $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$

B2. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Η ράβδος (ΑΓ), στηρίζεται στο άκρο της A στον κατακόρυφο τοίχο και επειδή είναι λείος, δέχεται από αυτόν κάθετη δύναμη στήριξης $\vec{N}_1$, αφού δεν δημιουργείται τριβή. Επειδή η ράβδος είναι ομογενής και ισοπαχής, το κέντρο μάζας της είναι στο μέσον της M, όπου ασκείται σε αυτήν η έλξη της Γης, δηλαδή το βάρος της $\vec{w}$. Στο μέσον M επίσης η ράβδος δέχεται από το νήμα οριζόντια δύναμη $\vec{T}$ (τάση νήματος), με κατεύθυνση, από τη ράβδο προς το νήμα. Η ράβδος στηρίζεται στο οριζόντιο δάπεδο, στο άκρο της Γ και επειδή είναι λείο, δέχεται από αυτό κατακόρυφη δύναμη στήριξης $\vec{N}_2$, αφού δεν υπάρχει τριβή. Δηλαδή η ράβδος ισορροπεί ακίνητη με την επίδραση των οριζόντιων και κατακόρυφων δυνάμεων που φαίνονται στο σχήμα.



Με δηλωμένες θετικές φορές στο σχήμα, εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων κατά άξονες και έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T - N_1 = 0 \Rightarrow T = N_1 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 - w = 0 \Rightarrow N_2 = w \quad (2)$$

Με θετική φορά των ροπών που τείνουν να περιστρέψουν τη ράβδο αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, όπως δηλώνεται και στο σχήμα, εφαρμόζουμε ισορροπία ροπών ως προς νοητό άξονα στο άκρο Γ της ράβδου:

$$\Sigma \tau_r = 0 \Rightarrow N_1 \cdot d_1 - T \cdot d_2 - w \cdot d_3 = 0 \quad (3)$$

Με τη βοήθεια της τριγωνομετρίας στα ορθογώνια τρίγωνα του σχήματος, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$d_1 = 1 \cdot \eta\mu 45^\circ, \quad d_2 = \frac{1}{2} \cdot \eta\mu 45^\circ, \quad d_3 = \frac{1}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην εξίσωση (3), έχουμε:

$$N_1 \cdot 1 \cdot \eta\mu 45^\circ = T \cdot \frac{1}{2} \cdot \eta\mu 45^\circ + w \cdot \frac{1}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ$$

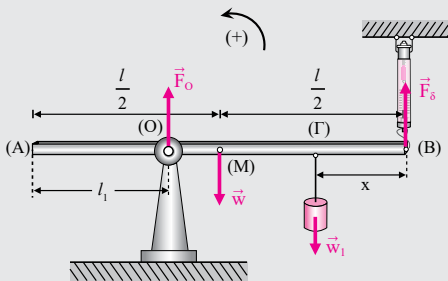
Επειδή ισχύει $\eta\mu 45^\circ = \sigma\upsilon\nu 45^\circ$, από την προηγούμενη εξίσωση, προκύπτει:

$$N_1 = \frac{T}{2} + \frac{w}{2}, \quad \text{η οποία, λόγω της (1), δίνει την}$$

$$T - \frac{T}{2} = \frac{w}{2} \quad \text{και τελικά: } T = w$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση



Η ένδειξη του δυναμόμετρου είναι ίση με το μέτρο της δύναμης που ασκεί στη ράβδο, $F_\delta = 10 \text{ N}$. Η ράβδος ισορροπεί, άρα η συνισταμένη ροπή ως προς τον άξονα z' είναι μηδέν. Θεωρώντας θετική τη φορά που φαίνεται στο σχήμα, έχουμε:

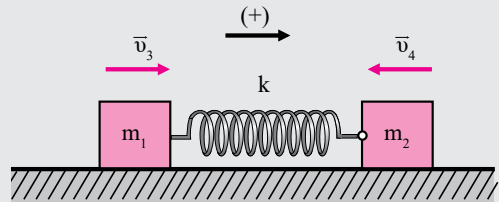
$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow \tau_{F_\delta} + \tau_{w_1} + \tau_w + \tau_{F_O} = 0 \Rightarrow$$

$$F_\delta (1 - l_1) - w_1 (1 - l_1 - x) - w(l/2 - l_1) + 0 = 0$$

Επομένως, $x = 0,1 \text{ m}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Κατά την διάρκεια της κρούσης το σύστημα των δύο σωμάτων είναι μονωμένο και κατά συνέπεια η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής θεωρώντας ως αρχική θέση την στιγμή που το m_1 ακουμπά το ελατήριο και ως τελική όταν θα έχει ταχύτητα $v_3 = 5 \text{ m/s}$. Θεωρούμε θετική φορά προς τα δεξιά.



$$\vec{P}_{\text{αρχ}} = \vec{P}_{\text{τελ}} \Rightarrow m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v_3 - m_2 v_4 \Rightarrow$$

$$v_4 = \frac{m_1 (v_3 - v_1) + m_2 v_2}{m_2} \Rightarrow v_4 = \frac{5}{3} \text{ m/s}$$

Γ2. Επειδή η δύναμη του ελατηρίου είναι διατηρητική, η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο μαζών είναι ίδια πριν την επαφή και μετά το χάσιμο της επαφής του m_1 με το ελατήριο. Συνεπώς η κρούση μπορεί να θεωρηθεί ελαστική και οι τελικές ταχύτητες των σωμάτων είναι:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \Rightarrow v_1' = -8 \text{ m/s}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \Rightarrow v_2' = 7 \text{ m/s}$$

Γ3. Το κλάσμα της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας m_1 εξαιτίας της αλληλεπίδρασής του με το ελατήριο είναι:

$$\frac{\Delta K_{1, \text{αρχ}}}{K_{1, \text{αρχ}}} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \left(\frac{v_1'}{v_1} \right)^2 - 1 = -0,36$$

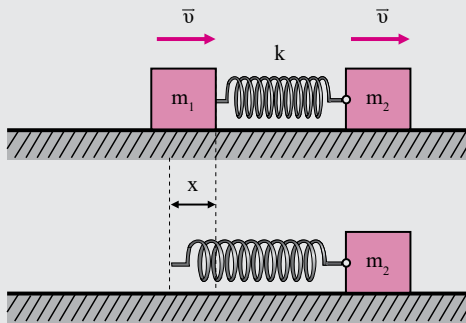
Το αντίστοιχο ποσοστό μεταβολής είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{\Delta K_1}{K_{1, \text{αρχ}}} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = -36\%$$

Γ4. Το ελατήριο θα υποστεί την μέγιστη συσπίρωση όταν οι δύο μάζες θα αποκτήσουν ίδια ταχύτητα. Μέχρι αυτό το σημείο η απόσταση των μαζών μειώνεται, ενώ μετά από αυτό το σημείο η μεταξύ τους απόσταση αρχίζει να μεγαλώνει. Εφαρμόζοντας Α.Δ.Ο. θεωρώντας ως αρχική θέση την στιγμή που το m_1 ακουμπά το ελατήριο και ως τελική την θέση που οι μάζες αποκτούν ίδια ταχύτητα έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{\text{αρχ}} &= \vec{P}_{\text{τελ}} \Rightarrow m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v + m_2 v \Rightarrow \\ v &= \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 1 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος των δύο μαζών και του ελατηρίου κατά την διάρκεια της κρούσης παραμένει σταθερή.



Εφαρμόζουμε Α.Δ.Μ.Ε. για τις θέσεις που εφαρμόσαμε την Α.Δ.Ο. και έχουμε:

$$\begin{aligned} K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} &= K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \Rightarrow \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + 0 &= \\ = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow \\ x &= \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) v^2}{k}} \Rightarrow \\ x &= 0,3\sqrt{7,5} \text{ m} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

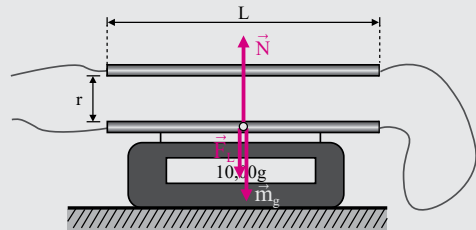
Δ1. Η ένδειξη θα αυξηθεί.

Οι δύο αγωγοί ανήκουν στο ίδιο κύκλωμα και διαρρέονται από ρεύμα ίσης έντασης, αλλά αντίθετης φοράς (αν το ρεύμα έχει φορά δεξιά

στον επάνω αγωγό, συνεχίζοντας στο κύκλωμα, θα έχει φορά προς τα αριστερά στον κάτω αγωγό, ή το αντίθετο).

Ως αποτέλεσμα της αντίθετης φοράς του ρεύματος, οι ράβδοι απωθούνται, επομένως η κάτω ράβδος ασκεί στον ζυγό δύναμη αυξημένη σε σχέση με το βάρος της και η ένδειξη του ζυγού θα αυξηθεί.

Δ2.



Η κάθετη αντίδραση στην κάτω ράβδο προκύπτει από την ισορροπία της:

$$N = F_L + mg$$

Ο ζυγός δείχνει τιμή που προκύπτει από την αντίδραση $N' = N$ η οποία ασκείται από τη ράβδο στον ζυγό.

Η ένδειξη είναι αυτή της αντίστοιχης μάζας και σε γραμμάρια, οπότε (υποθέτοντας πως η μάζα είναι σε μονάδες S.I., δηλαδή kg):

$$\text{Ένδειξη} = \frac{N'}{g} 1000 \Rightarrow \text{Ένδειξη} = \frac{F_L + mg}{g} 1000$$

Δ3. Η δύναμη Laplace ανάμεσα στους δύο παράλληλους αγωγούς είναι:

$$F_L = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi r}$$

Άρα η ένδειξη είναι:

$$\begin{aligned} \text{Ένδειξη} &= \frac{F_L + mg}{g} 1000 = \frac{\frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi r} + mg}{g} 1000 = \\ &= \frac{\frac{4\pi 10^{-7} (0,1 + 0,1t)^2 0,5}{2\pi 0,01} + 0,010 \times 10}{10} 1000 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Ένδειξη} = 10^{-3} (0,1 + 0,1t)^2 + 10 \text{ (ο χρόνος σε s, η ένδειξη σε g)}$$

Δ4. Η αρχική ένδειξη είναι 10 g.

Πρέπει:

$$\text{Ένδειξη} = 110 \% \times 10 \text{ g} \Rightarrow$$

$$10^{-3} (0,1 + 0,1t)^2 + 10 = 11 \Rightarrow t \cong 315 \text{ s}$$

Δεν είναι ρεαλιστικό ενδεχόμενο, γιατί θα απαιτούσε ένταση του ρεύματος $I = 0,1 + 0,1t = 0,1 + 0,1 \times 315 = 31,6 \text{ A}$. Αυτή είναι τιμή υπερβολικά μεγάλη για σχολικό εργαστήριο, τόσο για λόγους αντοχής των στοιχείων του κυκλώματος, όσο και, κυρίως, για λόγους ασφαλείας.

30ό Διαγώνισμα (Δ30)

ΘΕΜΑ Α

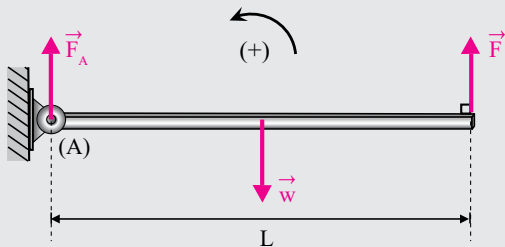
A1. β), A2. γ), A3. β), A4. β)
A5. α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στην ράβδο. Η δύναμη από τον άξονα $\vec{F}_A$, το βάρος της ράβδου $\vec{w}$ και η εξωτερική δύναμη $\vec{F}$.



Επειδή έχουμε ισορροπία θα έχουμε για την συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς τον άξονα που διέρχεται από το Α:

Ορίζουμε θετική φορά περιστροφής αντίθετη με εκείνη της φοράς των δεικτών του ρολογιού.

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow \tau_F + \tau_w + \tau_{F_A} = 0 \Rightarrow$$

$$F \cdot L - w \cdot \frac{L}{2} + 0 = 0 \Rightarrow F = \frac{w}{2} \Rightarrow F = \frac{mg}{2}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Σύμφωνα με το διάγραμμα η μεταβολή της μαγνητικής ροής τόσο στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_1$ όσο και στην $t_2 \rightarrow t_3$, είναι γραμμική και άρα οι κλίσεις των ευθειών που εκφράζουν την επαγωγική τάση είναι σταθερές:

$$E_{\epsilon\pi_1} = - \frac{\Delta \Phi_1}{\Delta t_1} = - \frac{\Phi_1 - 0}{t_1 - 0} = - \frac{\Phi_1}{t_1}$$

και

$$E_{\epsilon\pi_2} = - \frac{\Delta \Phi_2}{\Delta t_2} = - \frac{0 - \Phi_1}{t_3 - t_2} = \frac{\Phi_1}{t_3 - t_2}$$

Παρατηρούμε ότι η πολικότητα της επαγωγικής τάσης είναι αντίθετη. Από τον νόμο του Ohm προκύπτει ότι οι εντάσεις του ρεύματος στις δύο περιπτώσεις θα είναι:

$$I_1 = \frac{E_{\epsilon\pi_1}}{R} = - \frac{\Phi_1}{R t_1}$$

και

$$I_2 = \frac{E_{\epsilon\pi_2}}{R} = \frac{\Phi_1}{R(t_3 - t_2)}$$

Δηλαδή σταθερής τιμής και στις δύο περιπτώσεις αλλά αντίθετης φοράς.

Κατά την διάρκεια $t_1 - t_2$ η μαγνητική ροή παραμένει σταθερή, η τάση από επαγωγή είναι μηδέν και άρα και η ένταση του ρεύματος θα είναι μηδενική.

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Για να βρούμε την σωστή απάντηση, πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε το μήκος κύματος των αρμονικών κυμάτων, τα οποία με την συμβολή τους στην χορδή δίνουν το στάσιμο κύμα. Το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το σημείο Α για να μεταβεί από την οριζόντια θέση στην θέση στιγμιαίου μηδενισμού της ταχύτητάς του για πρώτη φορά αντιστοιχεί στο $\frac{1}{4}$ της περιόδου ταλάντωσης των μορίων του μέσου. Συνεπώς, η περίοδος του κύματος είναι:

$$\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow T = 4 \cdot \Delta t \Rightarrow T = 2 \text{ s}$$

Στην συνέχεια, εφαρμόζοντας την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής θα βρούμε το μήκος κύματος.

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = v \cdot T \Rightarrow \lambda = 12 \text{ cm}$$

Τα σημεία Β, Δ και Ζ είναι διαδοχικοί δεσμοί. Δύο διαδοχικοί δεσμοί απέχουν μισό μήκος κύματος, επομένως η οριζόντια απόσταση των σημείων Β και Ζ είναι ένα μήκος κύματος, δηλαδή $\Delta x_{BZ} = \lambda = 12 \text{ cm}$. Τα σημεία Γ και Ε είναι διαδοχικές κοιλίες. Η απόσταση των θέσεων ισορροπίας τους είναι μισό μήκος κύματος, δηλαδή $\Delta x_{TE} = \frac{\lambda}{2} = 6 \text{ cm}$. Συνεπώς οι προτάσεις (α) και (β) δεν είναι σωστές. Χρησιμοποιώντας το σχήμα, το μήκος της χορδής είναι:

$$d = 2\lambda \Rightarrow d = 24 \text{ cm}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για να εμποδίσουμε τα φωτοηλεκτρόνια που εξέρχονται από το μέταλλο με κινητική ενέργεια K_1 να φτάσουν στο απέναντι ηλεκτρόδιο πρέπει να εφαρμόσουμε τάση αποκοπής V_1 τέτοια ώστε:

$$K_1 = e \cdot V_1 \Rightarrow K_1 = 0,75 \text{ eV}$$

Σύμφωνα με τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein:

$$K_1 = h \cdot f_1 - \phi \Rightarrow \phi = h \cdot f_1 - K_1 \Rightarrow \phi = h \cdot \frac{c}{\lambda_1} - K_1$$

όπου ϕ το έργο εξαγωγής του μετάλλου, επομένως:

$$\phi = \left(\frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{331,5 \cdot 10^{-9} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} - 0,75 \right) \text{ eV} \Rightarrow \phi = 3 \text{ eV}$$

Γ2. Η συχνότητα κατωφλίου f_0 είναι:

$$f_0 = \frac{\phi}{h} \Rightarrow f_0 = 72,4 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$$

Η συχνότητα f_2 του φωτός μήκους κύματος λ_2 θα είναι:

$$c = \lambda_2 f_2 \Rightarrow f_2 = \frac{c}{\lambda_2} \Rightarrow f_2 = 50 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$$

Παρατηρούμε ότι $f_2 < f_0$ άρα δεν θα εξέλθουν φωτοηλεκτρόνια από το μέταλλο.

Γ3. Οι ακτίνες Χ έχουν μήκος κύματος:

$$\lambda = \frac{\lambda_2}{3 \cdot 10^3} \Rightarrow \lambda = 20 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Αν λ' είναι το μήκος κύματος των σκεδαζόμενων φωτονίων, τότε:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e \cdot c} (1 - \sin \varphi) \Rightarrow \lambda' = \frac{\lambda + h}{m_e \cdot c} (1 - \sin \varphi)$$

Επειδή η γωνία σκέδασης $\varphi = 60^\circ$, έχουμε $\sin \varphi = \frac{1}{2}$, επομένως:

$$\lambda' = 20,12 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Γ4. Κατά τη σκέδαση ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας. Αν E_ϕ είναι η ενέργεια του προσπίπτοντος φωτονίου, E'_ϕ είναι η ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου και K_e είναι η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά τη σκέδαση, τότε:

$$E_\phi = E'_\phi + K_e \Rightarrow \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + K_e \Rightarrow K_e = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} \Rightarrow K_e = hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right)$$

Επομένως:

$$K_e = 59,3 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Αν p_e είναι το μέτρο της ορμής του ηλεκτρονίου ου μετά τη σκέδαση, τότε:

$$K_e = \frac{p_e^2}{2m_e} \Rightarrow p_e = \sqrt{2K_e m_e} \Rightarrow p_e = 32,7 \cdot 10^{-25} \text{ Kg m/s}$$

Όμως:

$$\lambda_e = \frac{h}{p_e} \Rightarrow \lambda_e = 2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Γνωρίζουμε ότι σε κάθε περίοδο T , η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης μηδενίζεται 2 φορές. Άρα το υλικό σημείο εκτελεί $N = \frac{20}{2} = 10$ ταλαντώσεις σε χρονικό διάστημα Δt . Επομένως, με βάση τον ορισμό της συχνότητας:

$$f = \frac{N}{\Delta t} \Rightarrow f = 2 \text{ Hz}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T = \frac{1}{f} = 0,5 \text{ s}$ ενώ η κυκλική συχνότητα $\omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi \text{ rad/s}$.

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε:

$$v = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = 1 \text{ m}$$

Το διάστημα που διανύει το υλικό σημείο Ο στη διάρκεια μιας περιόδου είναι ίσο με $s = 4 \text{ A}$, οπότε:

$$s = 4A \Rightarrow A = \frac{s}{4} \Rightarrow A = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Το εγκάρσιο κύμα που διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 5 \cdot 10^{-2} \eta \mu 2\pi (2t + x) \text{ (S.I.)}$$

Δ2. Το εγκάρσιο κύμα φτάνει στο σημείο Μ μετά από χρόνο:

$$t = \frac{|x_M|}{v} \Rightarrow t = 0,5 \text{ s}$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη εξίσωση του κύματος που βρήκαμε, για $t = \frac{13}{24} \text{ s}$ και $x_M = -1 \text{ m}$ έχουμε:

$$y_M = 5 \cdot 10^{-2} \eta \mu 2\pi \left(2 \cdot \frac{13}{24} - 1 \right) \Rightarrow y_M = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Δ3. Η εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση:

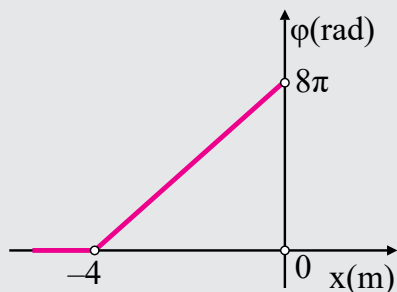
$$y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 5 \cdot 10^{-2} \eta \mu 2\pi (2t + x) \text{ (S.I.)}$$

Η φάση του κύματος τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ είναι:

$$\varphi = 2\pi(4 + x) \text{ (S.I.)}$$

Το διάγραμμα της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με τη συντεταγμένη της θέσης (φ - x) φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Δ4. Για τα σημεία τα οποία τη χρονική στιγμή $t = 1 \text{ s}$, έχουν απομάκρυνση $y = -5 \text{ cm}$ έχουμε:

$$-5 \cdot 10^{-2} = 5 \cdot 10^{-2} \eta \mu 2\pi (2 + x) \Rightarrow$$

$$\eta \mu 2\pi (2 + x) = -1 \Rightarrow$$

$$2\pi(2 + x) = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = k - \frac{5}{4}$$

Για $k = 0$, $x = -1,25 \text{ m}$ (δεκτή), για $k = 1$, $x = -0,25 \text{ m}$ (δεκτή), για $k = 2$, $x = 0,75 \text{ m}$

(απορρίπτεται), για $k = 3$, $x = 1,75 \text{ m}$ (απορρίπτεται), για $k = -1$, $x = -2,25 \text{ m}$ (απορρίπτεται), όπως απορρίπτονται και όλες οι υπόλοιπες. Συνεπώς, οι συντεταγμένες θέσης των σημείων της χορδής, τα οποία βρίσκονται σε απόσταση μικρότερη από 2 m από την αρχή των αξόνων O και στον αρνητικό ημιάξονα, είναι:

$$x_1 = -1,25 \text{ m}, \quad x_2 = -0,25 \text{ m}$$

31ο Διαγώνισμα (Δ31)

ΘΕΜΑ Α

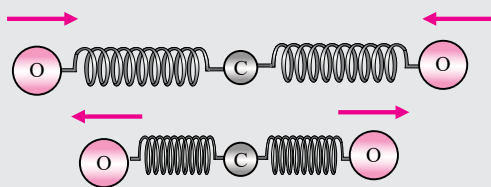
Α1. γ), Α2. γ), Α3. β), Α4. β)
Α5. α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **β**).

Δικαιολόγηση

Σε αυτόν τον τρόπο ταλάντωσης των ατόμων οξυγόνου ως προς το κεντρικό άτομο άνθρακα στο μόριο του διοξειδίου του άνθρακα, οι ομοιοπολικοί δεσμοί C-O και τα άτομα οξυγόνου συμπεριφέρονται ως απλοί αρμονικοί ταλαντωτές.



Η συχνότητα ταλάντωσης των ατόμων του οξυγόνου δίνεται από την σχέση:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Η σταθερά του ελατηρίου είναι:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = 4\pi^2 m \cdot f^2 \Rightarrow k = 847 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η **γ**).

Δικαιολόγηση

Για το μήκος κύματος των ηχητικών κυμάτων

ισχύει η θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής:

$$v_{\eta\chi} = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v_{\eta\chi}}{f}$$

Το μέσο διάδοσης είναι το ίδιο και για τα δύο ηχητικά κύματα-αέρας του δωματίου-, συνεπώς, αυτά θα διαδίδονται με ταχύτητες ίσων μέτρων. Για τον λόγο των μηκών κύματος των δύο ηχητικών κυμάτων ισχύει:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_{\eta\chi}}{f_1} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{f_2}{f_1} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{20000 \text{ Hz}}{20 \text{ Hz}} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1000$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Οι δύο τύποι κύματος διανύουν την ίδια απόσταση από την εστία μέχρι τον σειсмоγράφο, κινούμενοι με διαφορετικές ταχύτητες και επί διαφορετικά χρονικά διαστήματα.

Αν συμβολίσουμε με t τη χρονική διάρκεια κίνησης των κυμάτων τύπου P, ισχύει: $x = v_p t$. Αντίστοιχα, για τα κύματα τύπου S έχουμε: $x = v_s (t + 540)$, αφού η χρονική διάρκεια κίνησής τους είναι μεγαλύτερη κατά $9 \text{ min} = 540 \text{ s}$. Από τον συνδυασμό των παραπάνω εξισώσεων ων βρίσκουμε ότι: $x = 4,05 \cdot 10^3 \text{ km}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Συγκρίνοντας τη δοθείσα εξίσωση ταλάντωσης με την $y = A \eta\mu\omega t$ προκύπτουν:

$$A = 0,2 \text{ m και } f = \frac{\omega}{2\pi} = 2,5 \text{ Hz}$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε:

$$v = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = 2,5 \text{ Hz}$$

Η εξίσωση του κύματος είναι τότε:

$$y = A \eta\mu\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$y = 0,2 \eta\mu(5\pi t - 1,25\pi x) \text{ (S.I.)}$$

Γ2. Το κύμα του προηγούμενου ερωτήματος διαδίδεται από το K στο Λ. Στο Λ ανακλάται, οπότε δημιουργείται κύμα της μορφής $y = A \eta\mu\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ το οποίο διαδίδεται από το Λ προς το K. Η υπέρθεση των δύο κυμά-

των δημιουργεί στάσιμο κύμα με δεσμό στο σημείο Λ και κοιλία στο σημείο K, εφόσον το μήκος κύματος έχει κατάλληλη τιμή. Με δεδομένο πως η απόσταση διαδοχικών κοιλίας-δεσμού είναι $\frac{\lambda}{4}$ και η απόσταση δύο διαδοχικών δεσμών είναι $\frac{\lambda}{2}$, το μήκος του σχοινιού πρέπει να είναι:

$$\frac{\lambda}{4} + \frac{\kappa\lambda}{2} = \frac{1,6}{4} + \frac{\kappa 1,6}{2} = 0,4 + 0,8\kappa \text{ m}$$

όπου κ είναι ακέραιος.

Το μήκος του σχοινιού είναι 5,2 m που ικανοποιεί τη συνθήκη για $\kappa = 6$. Πράγματι:

$$0,4 + 0,8\kappa = 5,2 \Rightarrow \kappa = 6$$

Συνεπώς, στο συγκεκριμένο σχοινί θα δημιουργηθεί πραγματικά στάσιμο κύμα.

Γ3. Κάθε σημείο του σχοινιού θα εκτελεί ταλάντωση πλάτους:

$$A' = \left| 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = |0,4 \sin 1,25\pi x| \text{ (S.I.)}$$

Το μέγιστο από τα πλάτη θα έχουν τα σημεία στα οποία υπάρχουν κοιλίες, όπου:

$$A' = 2A = 0,4 \text{ m}$$

Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης σε αυτά τα σημεία θα είναι:

$$v_{\max} = \omega A' \Rightarrow v_{\max} = 2\pi \text{ m/s}$$

Γ4. Αλλάζοντας τη συχνότητα δεν επηρεάζεται η ταχύτητα των κυμάτων (η οποία εξαρτάται από τις ιδιότητες του σχοινιού). Ο υποδιπλασιασμός της συχνότητας συνεπάγεται διπλασιασμό του μήκους κύματος σε $\lambda' = 3,2 \text{ m}$, μέσω της θεμελιώδους εξίσωσης της κυματικής (για σταθερή ταχύτητα τα λ, f είναι αντιστρόφως ανάλογα).

Θα πρέπει το μήκος του σχοινιού να ικανοποιεί πάλι την:

$$L = 5,2 = \frac{\lambda'}{4} + \frac{\kappa'\lambda'}{2} = 0,8 + 0 = 1,6\kappa' \text{ για κάποιον ακέραιο } \kappa'$$

Όμως, από τη συγκεκριμένη συνθήκη προκύπτει $\kappa' = \frac{4,4}{1,6}$, τιμή η οποία δεν είναι ακέραια, άρα **δε σχηματίζεται στάσιμο κύμα στο σχοινί.**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Γ για την κίνηση του σώματος Σ_2 , έχουμε:

$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \Rightarrow 0 + m_2 g d = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gd} \Rightarrow v_2 = 4 \text{ m/s}$$

Για την ταχύτητα του σώματος Σ_1 στην κεντρική ελαστική κρούση του με το σώμα Σ_2 έχουμε:

$$v'_1 = \frac{2m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 2 \text{ m/s}$$

Όμως η ταχύτητα v'_1 είναι η μέγιστη ταχύτητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης του σώματος Σ_1 , αφού βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, άρα:

$$v'_1 = \omega A_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \cdot A_1 \Rightarrow k = \frac{m_1 \cdot v'^2_1}{A^2_1} \Rightarrow k = 300 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Δ2. Για την ταχύτητα του σώματος Σ_2 στην κεντρική ελαστική κρούση του με το σώμα Σ_1 έχουμε:

$$v'_2 = \frac{m_2 - m_1 v_2}{m_1 + m_2} = -2 \text{ m/s}$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του Σ_2 αμέσως μετά την κρούση του μέχρι το μέγιστο ύψος h που θα φτάσει και έχουμε:

$$K_{2A} + U_{2A} = K'_2 + U'_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 + 0 = 0 + m_2 g h \Rightarrow h = \frac{v'^2_2}{2g} \Rightarrow h = 0,2 \text{ m}$$

Δ3. Στη θέση που το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά το ήμισυ της μέγιστης συσπειρώσής του, δηλαδή $\Delta l = \frac{A_1}{2} = 0,1 \text{ m}$ και το σώμα κινείται προς τα δεξιά έχουμε: $x = -\frac{A_1}{2} = -0,1 \text{ m}$, η δύναμη του ελατηρίου είναι προς τα δεξιά, καθώς και η ταχύτητα του σώματος, επομένως το σώμα κινείται προς τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, πράγμα που σημαίνει ότι η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μειώνεται, έτσι ο ρυθμός μεταβολής της είναι αρνητικός, άρα:

$$\frac{dU_{\text{ελ.}}}{dt} = \frac{-dW_{F_{\text{ελ.}}}}{dt} = \frac{-F_{\text{ελ.}} \cdot dx}{dt} = -F_{\text{ελ.}} \cdot v = -k\Delta l \cdot v \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης ενέργειας στην ταλάντωση (ΑΔΕΤ), οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA_1^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m_1} \cdot (A_1^2 - x^2)} = \sqrt{3} \text{ m/s}$$

οπότε από τη σχέση (1) βρίσκουμε:

$$\frac{dU_{\text{ελ.}}}{dt} = -30\sqrt{3} \text{ J/s}$$

Δ4. Η στροφορμή $\vec{L}_2$ του σώματος Σ_2 ως προς τον άξονα z' που περνά από το σημείο Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς του Σ_2 έχει φορέα τον άξονα z' , με φορά από τον αναγνώστη προς την σελίδα και μέτρο:

$$L_2 = m_2 v_2 d \Rightarrow L_2 = 3,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

32ο Διαγώνισμα (Δ32)

ΘΕΜΑ Α

A1. β), A2. α), A3. β), A4. γ)
A5. α) Λ, β) Λ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **α).**

Δικαιολόγηση

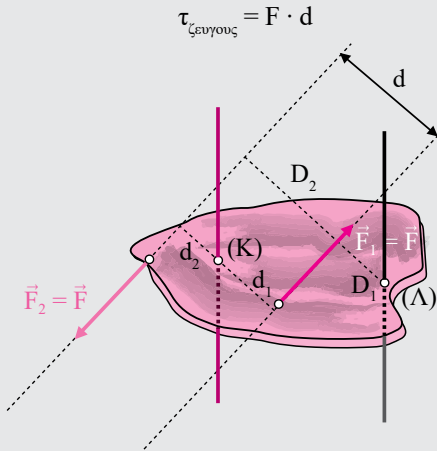
Σύμφωνα με την κβαντική θεωρία κάθε μέταλλο έχει συγκεκριμένο έργο εξαγωγής ϕ που είναι ίσο με $\phi = hf_0$. Όταν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία συχνότητας f προσπίπτει στο μέταλλο της καθόδου, κάθε φωτόνιο της δίνει την ενέργειά του σε μόνο ένα από τα ηλεκτρόνια του μετάλλου. Αν η ενέργεια του φωτονίου, $E = hf$, είναι μικρότερη από το έργο εξαγωγής ϕ , το ηλεκτρόνιο δεν μπορεί να εγκαταλείψει το μέταλλο. Απεναντίας, αν η ενέργεια του φωτονίου είναι μεγαλύτερη ή ίση με το έργο εξαγωγής το ηλεκτρόνιο εγκαταλείπει το μέταλλο με (μέγιστη) κινητική ενέργεια K που υπολογίζεται από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein: $K = E - \phi \Rightarrow K = hf - hf_0 \Rightarrow K = h(f - f_0) \quad (1)$

Σύμφωνα με τη σχέση (1), η (μέγιστη) κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων που βγαίνουν από την κάθοδο είναι γραμμική συνάρτηση της συχνότητας f της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που προσπίπτει στο μέταλλο της καθόδου και για $f \geq f_0$ η κλίση της γραφικής παράστασης κινητικής ενέργειας – συχνότητας $(K - f)$ είναι ίση με τη σταθερά του Planck, h .

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Σύμφωνα με τα δεδομένα της εκφώνησης, έχουμε ζεύγος δυνάμεων σε στερεό σώμα. Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι η ίδια ως προς κάθε άξονα περιστροφής ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζουν οι φορείς των δυνάμεων και ισούται με το γινόμενο του μέτρου της μίας εκ των δυνάμεων ($F_1 = F_2 = F$) επί την απόσταση των φορέων των δύο δυνάμεων, d :



Στο σχήμα φαίνεται στερεό σώμα, το οποίο μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το τυχαίο σημείο K. Στο στερεό ασκούνται οι δυνάμεις $F_1 = F_2 = F$, οι φορείς των οποίων απέχουν αποστάσεις d_1 και d_2 , αντίστοιχα, από τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο K. Για την συνολική ροπή των δυνάμεων στο στερεό, με θετική φορά την αντίθετη των δεικτών του ρολογιού (αριστερόστροφη), ισχύει:

$$\Sigma \vec{\tau}_K = \vec{\tau}_{F_1}^{(K)} + \vec{\tau}_{F_2}^{(K)} \Rightarrow$$

$$\Sigma \tau_K = \tau_{F_1}^{(K)} + \tau_{F_2}^{(K)} = F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 = F \cdot (d_1 + d_2) \Rightarrow$$

$$\Sigma \tau_K = \tau_{\text{ζεύγους}} = F \cdot d$$

Για άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο Λ, με την ίδια θετική φορά περιστροφής, θα είναι:

$$\Sigma \vec{\tau}_\Lambda = \vec{\tau}_{F_1}^{(\Lambda)} + \vec{\tau}_{F_2}^{(\Lambda)} \Rightarrow$$

$$\Sigma \tau_\Lambda = -\tau_{F_1}^{(\Lambda)} + \tau_{F_2}^{(\Lambda)} = -F_1 \cdot D_1 + F_2 \cdot D_2 = F \cdot (D_2 - D_1) \Rightarrow$$

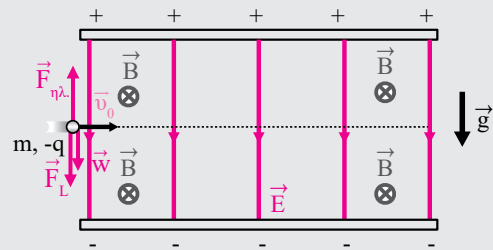
$$\Sigma \tau_\Lambda = \tau_{\text{ζεύγους}} = F \cdot d$$

Άρα η συνολική ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι η ίδια για κάθε άξονα περιστροφής.

B3. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σωματίδιο, όπως φαίνονται στο σχήμα, είναι:



Για τα μέτρα τους ισχύει:

$$F_L = B v_0 q \Rightarrow F_L = 2 \text{ N}$$

$$F_{\eta\lambda} = E |q| \Rightarrow F_{\eta\lambda} = 1 \text{ N}$$

$$w = mg \Rightarrow w = 1 \text{ N}$$

Παρατηρούμε ότι το βάρος και η δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο είναι πάντοτε αντίθετες, άρα έχουν συνισταμένη μηδέν. Δηλαδή, η μόνη δύναμη που επιδρά στην κίνηση του σωματίου είναι η $\vec{F}_L$, η οποία, κατά τα γνωστά, παίζει τον ρόλο κεντρομόλου δύναμης. Κατά συνέπεια, η κίνηση είναι ομαλή κυκλική.

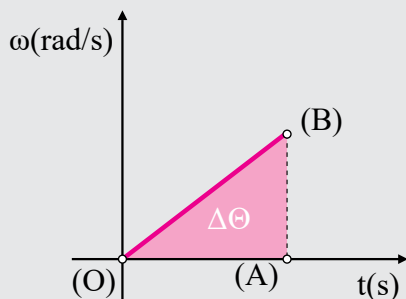
ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η τροχαλία, υπό την επίδραση της ροπής της δύναμης $\vec{F}$ εκτελεί στροφική ομαλά επιτα-

χυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική γωνιακή ταχύτητα. Για την κίνησή της ισχύει:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} \quad \omega_0 = 0, t_0 = 0 \Rightarrow \omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t \quad (1)$$

Η γραφική παράσταση γωνιακής ταχύτητας-χρόνου είναι η ακόλουθη:



Το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τριγώνου είναι αριθμητικά ίσο με την επίκεντρη γωνία που διαγράφει οποιαδήποτε επιβατική ακτίνα της τροχαλίας. Άρα:

$$\Delta\theta = (\text{ΟΑΒ}) = \frac{1}{2} \text{βάση} \cdot \text{ύψος} = \frac{1}{2} \omega t = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \quad (2)$$

Όταν η τροχαλία έχει διαγράψει $N = \frac{4}{\pi}$ περιστροφές, τότε η επιβατική ακτίνα κάθε σημείου της έχει διαγράψει επίκεντρη γωνία ίση με:

$$\Delta\theta = 2\pi N = 8 \text{ rad}$$

Θα κάνουμε απαλοιφή του χρόνου από τις σχέσεις (1) και (2) για να υπολογίσουμε την γωνιακή επιτάχυνση. Λύνουμε την σχέση (1) ως προς τον χρόνο, δηλαδή $t = \frac{\omega}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}$ και αντικαθιστούμε στην σχέση (2). Έχουμε:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \left(\frac{\omega}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} \right)^2 \Rightarrow \Delta\theta = \frac{\omega^2}{2\alpha_{\gamma\omega\nu}} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 4 \text{ rad/s}^2$$

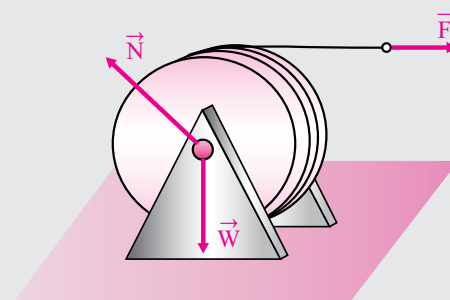
Γ2. Την χρονική στιγμή $t_1 = 3 \text{ s}$ η γωνιακή ταχύτητα κάθε σημείου της τροχαλίας δίνεται από την σχέση (1) και είναι:

$$\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t_1 \Rightarrow \omega_1 = 12 \text{ rad/s}$$

Η γραμμική ταχύτητα στο ανώτερο σημείο της τροχαλίας έχει την ίδια διεύθυνση με το νήμα, φορά προς τα δεξιά και μέτρο:

$$v_1 = \omega_1 \cdot R \Rightarrow v_1 = 3,6 \text{ m/s}$$

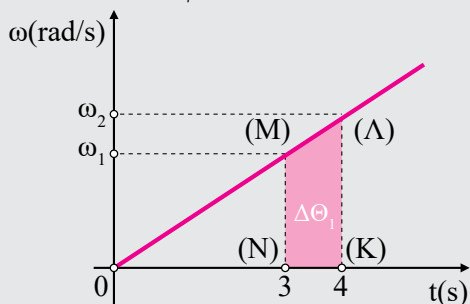
Γ3. Η τροχαλία δέχεται τρεις δυνάμεις, το βάρος της $\vec{W}$, τη δύναμη $\vec{F}$ και τη δύναμη στήριξης $\vec{N}$ από τον άξονα. Το βάρος $\vec{W}$ και η δύναμη $\vec{N}$ δεν ασκούν ροπή ως προς τον άξονα της τροχαλίας γιατί ο φορέας τους τέμνει τον άξονα περιστροφής (ο μοχλοβραχίονας είναι μηδέν).



Ορίζοντας ως θετική φορά την φορά περιστροφής της τροχαλίας, η συνολική ροπή ως προς τον άξονα είναι:

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{\tau}_F + \vec{\tau}_W + \vec{\tau}_N \Rightarrow \Sigma \tau = F \cdot R + 0 + 0 \Rightarrow \Sigma \tau = 6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Γ4. Η επίκεντρη γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα κάθε σημείου της τροχαλίας από την χρονική στιγμή $t_1 = 3 \text{ s}$ ως την χρονική στιγμή $t_2 = 4 \text{ s}$ (το 4ο δευτερόλεπτο) μπορεί να υπολογιστεί από τη γραφική παράσταση γωνιακής ταχύτητας-χρόνου, μέσω του εμβαδού. Όπως φαίνεται από το επόμενο σχήμα, είναι αριθμητικά ίση με το εμβαδό του τραpezίου ΚΛΜΝ, με $\omega_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2 = 4 \text{ rad/s}$.



$$\Delta\theta_1 = (\text{ΚΛΜΝ}) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \Delta t = 14 \text{ rad}$$

Το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται είναι

ίσο με το μήκος τόξου της περιφέρειας της τροχαλίας που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $\Delta\theta_1$, δηλαδή:

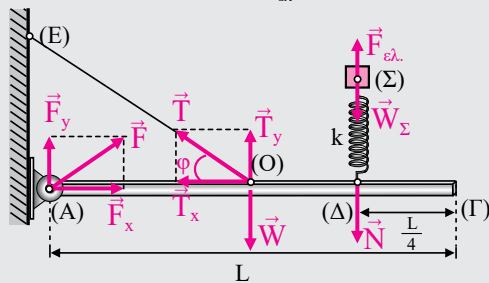
$$s = R \cdot \Delta\theta_1 \Rightarrow s = 4,2 \text{ m}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αρχικά το σώμα Σ ισορροπεί πάνω στο ελατήριο υπό την επίδραση των δυνάμεων του βάρους του $\vec{W}_\Sigma$ και της δύναμης του ελατηρίου $\vec{F}_{ελ}$, οπότε αν Δl , η παραμόρφωση του ελατηρίου θα ισχύει:

$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} = W_\Sigma \Rightarrow k\Delta l = m_\Sigma g \Rightarrow \Delta l = 0,1 \text{ m}$
Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα Σ βρίσκεται στη θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, συνεπώς βρίσκεται στην θετική ακραία θέση της ταλάντωσης που θα εκτελέσει (σύμφωνα με την θετική φορά προς τα πάνω για την ταλάντωση). Συνεπώς το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα Σ είναι: $A = \Delta l \Rightarrow A = 0,1 \text{ m}$.

Δ2. Στη ράβδο ασκούνται οι δυνάμεις: το βάρος της $\vec{W}$ που ασκείται στο μέσο της (η ράβδος είναι ομογενής), η δύναμη $\vec{T}$ (τάση του νήματος), η δύναμη $\vec{F}$ (από την άρθρωση) και η δύναμη $\vec{N}$, που ασκεί το ελατήριο στη ράβδο και που το μέτρο της είναι ίσο με το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου $\vec{F}_{ελ}$.



Έστω ότι το σώμα Σ βρίσκεται σε μια τυχαία θέση πάνω από τη θέση ισορροπίας του όπου η απομάκρυνση της ταλάντωσης του είναι x (απόσταση από την θέση ισορροπίας του). Εφόσον το σώμα Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πρέπει:

$$\Sigma F = -Dx \Rightarrow F_{ελ} - W_\Sigma = -kx \Rightarrow F_{ελ} = m_\Sigma g - kx \Rightarrow$$

$$F_{ελ} = 10 - 100x \text{ (S.I.) (1)}$$

όπου $-0,1 \leq x \leq +0,1$.

Για να ισορροπεί η ράβδος πρέπει:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow \tau_F + \tau_W + \tau_N + \tau_T = 0 \Rightarrow$$

$$0 - W \cdot \frac{L}{2} - N \cdot \left(L - \frac{L}{4}\right) + T_y \cdot \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$T_{\eta\mu\phi} \cdot \frac{L}{2} = mg \cdot \frac{L}{2} + F_{ελ} \cdot \frac{3L}{4} \Rightarrow$$

$$T = 120 + 3F_{ελ} \text{ (S.I.) (2)}$$

Αν λάβουμε υπόψη τις σχέσεις (1) και (2) καταλήγουμε:

$$T = 150 - 300x \text{ (S.I.) (3)}$$

όπου $-0,1 \leq x \leq +0,1$.

Η μέγιστη τιμή του μέτρου της τάσης του νήματος εξαιτίας της ταλάντωσης του σώματος Σ προκύπτει όταν το σώμα Σ βρεθεί στην κάτω ακραία του θέση ($x = -A$). Συνεπώς:

$$T_{\max} = 180 \text{ N}$$

Δ3. Η ελάχιστη τιμή του μέτρου της τάσης του νήματος εξαιτίας της ταλάντωσης του σώματος Σ προκύπτει όταν το σώμα Σ βρεθεί στην πάνω ακραία του θέση ($x = +A$), δηλαδή λόγω της σχέσης (3) έχουμε:

$$T = T_{\min} = 120 \text{ N}$$

Εφόσον ισορροπεί η ράβδος πρέπει $\Sigma F = 0 \Rightarrow \Sigma F_x = 0$ και $\Sigma F_y = 0$.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = T_x \Rightarrow F_x = T \sin \phi \Rightarrow F_x = 60\sqrt{3} \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y + T_y = W + N \Rightarrow$$

$$F_y = W + F_{ελ} - T_{\eta\mu\phi} \Rightarrow F_y = 0$$

Επομένως το μέτρο της δύναμης F , που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση είναι:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = 60\sqrt{3} \text{ N}$$

Δ4. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του σώματος Σ δίνεται από τη σχέση

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_\Sigma}} = 10 \text{ rad/s.}$$

Η σχέση της απομάκρυνσης με τον χρόνο στην απλή αρμονική ταλάντωση του σώματος Σ είναι της μορφής: $x = A \sin(\omega t + \phi_0)$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, το σώμα Σ ξεκινά την ταλάντωση από την θετική ακραία του θέση, οπότε:

$$+A = A \sin \phi_0 \Rightarrow \sin \phi_0 = 1 \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

Αρα η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώμα-

τος Σ σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$x = 0,1\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.}) \quad (4)$$

Για τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{60}$ s βρίσκουμε:
 $x = 0,05\sqrt{3}$ m.

Εφαρμόζοντας αρχή διατήρησης ενέργειας στην ταλάντωση (ΑΔΕΤ) έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} kA^2 = K + \frac{1}{2} kx^2 \Rightarrow K = 0,125 \text{ J}$$

33ο Διαγώνισμα (Δ33)

ΘΕΜΑ Α

A1. γ), A2. δ), A3. γ), A4. γ)
 A5. α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

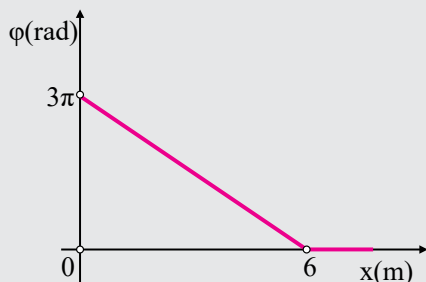
B1. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Η συνάρτηση της φάσης του κύματος συναρτήσει της απόστασης x από την πηγή του την χρονική στιγμή $t_1 = 0,15$ s είναι της μορφής:

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{0,15}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Από το διάγραμμα:



προκύπτει ότι για: $x = 0$, $\varphi = 3\pi$ rad

$$3\pi = 2\pi\left(\frac{0,15}{T} - \frac{0}{\lambda}\right) \Rightarrow T = 0,1 \text{ s}$$

Επίσης, για: $x = 6$ m, $\varphi = 0$

$$0 = 2\pi\left(\frac{0,15}{0,1} - \frac{6}{\lambda}\right) \Rightarrow \lambda = 4 \text{ m}$$

Αν θέσουμε στην εξίσωση κύματος τα παραπάνω αποτελέσματα και τη χρονική στιγμή

$t_2 = 0,025$ s, προκύπτει για την πηγή ($x = 0$):

$$y = A\eta\mu\frac{\pi}{2} = A$$

Άλλωστε, προφανώς η απάντηση (α) είναι λάθος επειδή βρήκαμε $\lambda = 4$ m και η (γ) επίσης, αφού:

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v = 40 \text{ m/s}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Η σχέση:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m \cdot c} \cdot (1 - \cos\varphi) \text{ γράφεται ως:}$$

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m \cdot c} \cdot (1 - \cos\varphi).$$

Η ποσότητα $\frac{h}{m \cdot c}$ έχει διαστάσεις μήκους κύματος, συμβολίζεται με λ_c και ονομάζεται μήκος κύματος Compton.

Έτσι έχουμε ότι:

$$\Delta\lambda = \lambda_c \cdot (1 - \cos\varphi) \quad (1).$$

Για τις ενέργειες ισχύει:

$$E' = \frac{90}{100} \cdot E,$$

Συνεπώς:

$$\frac{h \cdot c}{\lambda'} = \frac{9}{10} \cdot \frac{h \cdot c}{\lambda} \Rightarrow \lambda' = \frac{10}{9} \cdot \lambda$$

Με αντικατάσταση στην (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= \lambda_c \cdot (1 - \cos 90^\circ) \Rightarrow \frac{10}{9} \cdot \lambda - \lambda = \\ &= \lambda_c \cdot (1 - \cos 90^\circ) \Rightarrow \\ \frac{1}{9} \cdot \lambda &= \lambda_c \Rightarrow \lambda = 9 \cdot \lambda_c \end{aligned}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Έστω v_{cm} , το μέτρο της μεταφορικής ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου. Τη στιγμή που η διάμετρος AB είναι κατακόρυφη, το σημείο που πατάει στο δάπεδο, έχει ταχύτητα μέτρου v_{cm} στην κατεύθυνση κίνησης, εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης του δίσκου και γραμμική ταχύτητα κυκλικής κίνησης μέτρου $v_{\pi\rho}$, εξαιτίας της περιστροφικής κίνησης του δίσκου γύρω από το κέντρο του. Η ταχύτητα όμως του κατώτατου σημείου είναι ίση με του δαπέδου, δηλαδή μηδέν. Άρα ισχύει:

$$\begin{aligned} v_{κατωτατου} &= v_{cm} - v_{\pi\rho} = 0 \Rightarrow v_{\pi\rho} = v_{cm} \\ \Rightarrow \omega \cdot R &= v_{cm} \Rightarrow \omega = \frac{v_{cm}}{R} \quad (1) \end{aligned}$$

Τα σημεία A και B συμμετέχουν στην μεταφο-

ρική κίνηση του δίσκου και έχουν και τα δύο μεταφορική ταχύτητα μέτρου v_{cm} , με κατεύθυνση της κίνησης του κέντρου μάζας, αλλά έχουν και τα δύο γραμμική ταχύτητα ίδιου μέτρου $v'_{gp} = \omega \cdot r$, εκτελώντας κυκλική κίνηση της ίδιας ακτίνας, εξαιτίας της περιστροφικής κίνησης του δίσκου. Η γραμμική ταχύτητα και των δύο αυτών υλικών σημείων είναι οριζόντια, αλλά του Α είναι προς τα εμπρός ενώ του Β προς τα πίσω σε σχέση με την κίνηση του κέντρου του δίσκου. Έτσι για τις ταχύτητες των δύο σημείων ισχύουν:

$$v_A = v_{cm} + \omega \cdot r \Rightarrow v_A = v_{cm} + v_{cm} \cdot \frac{r}{R}$$

$$v_B = v_{cm} - \omega \cdot r \Rightarrow v_B = v_{cm} - v_{cm} \cdot \frac{r}{R}$$

Μας έχει δοθεί ότι ισχύει η σχέση: $v_A = 2 \cdot v_B$

$$\text{Οπότε: } v_{cm} \cdot \left(1 + \frac{r}{R}\right) = 2 \cdot v_{cm} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

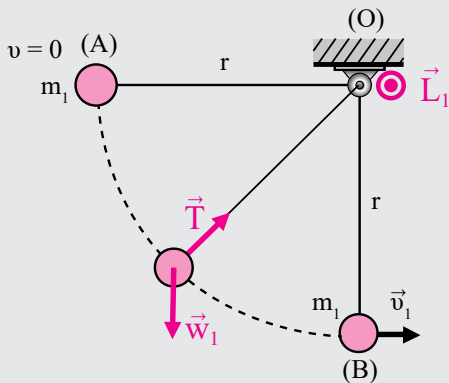
$$\Rightarrow 1 + \frac{r}{R} = 2 - 2 \cdot \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{3 \cdot r}{R} = 1 \Rightarrow r = \frac{R}{3}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ για την κίνηση του Σ_1 από το Α στο Β.

$$\Delta K = W_{w_1} + W_T \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 = m_1 g r \Rightarrow$$

$$v_1 = 4 \text{ m/s}$$



Η στροφορμή $\vec{L}_1$ του Σ_1 ως προς τον άξονα $z'z$ που περνά από το σημείο Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς του Σ_1 έχει φορά τον άξονα $z'z$, φορά προς τον αναγνώστη και, τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατα-

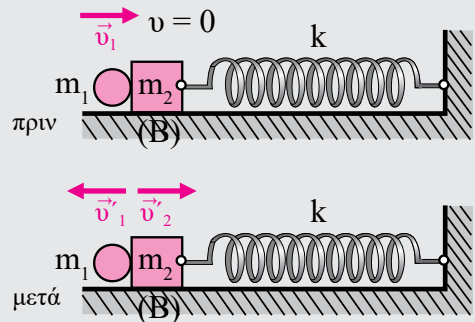
κόρυφο, μέτρο:

$$L_1 = m_1 v_1 r_1 \Rightarrow L_1 = 0,32 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

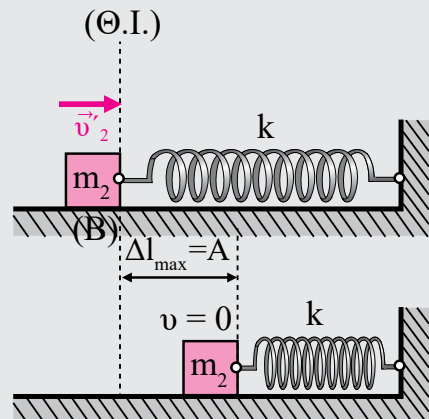
Γ2. Η κρούση είναι μετωπική και ελαστική, επομένως:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v_1' = -3 \text{ m/s}$$

$$\text{και } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v_2' = +1 \text{ m/s}$$



Γ3. Μετά την κρούση το Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, σταθερά $D = k$ και πλάτος ίσο με τη μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου, επομένως:



$$k = m_2 \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} \text{ s}$$

$$v_2' = v_{\max} \Rightarrow v_2' = \omega \cdot A \Rightarrow A = \Delta l_{\max} \Rightarrow \Delta l_{\max} = 0,1 \text{ m}$$

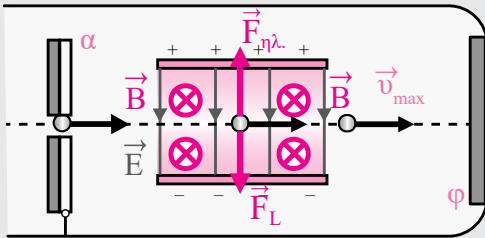
Η κίνηση του Σ_2 από τη Θ.Ι. μέχρι την ακραία

θέση, όπου η ταχύτητά του μηδενίζεται, διαρκεί:

$$\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{20} \text{ s}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



Τα ηλεκτρόνια που περνούν ανεπηρέαστα από το φίλτρο ταχυτήτων αφήνοντας στίγμα στο φωτογραφικό φιλμ, ακριβώς απέναντι από την οπή της ανόδου, είναι εκείνα που δέχονται αντίθετες δυνάμεις από το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, καθώς περνούν από το χώρο ανάμεσα στις δύο μεταλλικές φορτισμένες πλάκες, όπως φαίνεται και στο σχήμα. Δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$F_L = F_{\eta\lambda} \Rightarrow B \cdot v \cdot q = E \cdot q \Rightarrow v = \frac{E}{B} \quad (1)$$

Από τη σχέση (1), είναι φανερό, ότι η ελάχιστη ένταση μαγνητικού πεδίου για να συμβαίνει αυτό, δηλαδή για προκύπτει στίγμα στο φιλμ, ακριβώς απέναντι από την οπή της ανόδου, αντιστοιχεί στη μέγιστη ταχύτητα ηλεκτρονίων. Άρα ισχύει:

$$v_{\max} = \frac{E}{B_{\min}} \quad (2)$$

Άρα η μέγιστη κινητική ενέργεια ηλεκτρονίων που εξέρχονται από το μέταλλο της καθόδου είναι:

$$K_{\max} = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_{\max}^2 = \frac{1}{2} m_e \cdot \frac{E^2}{B_{\min}^2} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot \frac{3,2^2 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^{-6}} \text{ J} \quad (3)$$

Αλλά ισχύει η σχέση $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \Rightarrow$

$$1 \text{ J} = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} \quad (4)$$

Οπότε συνδυάζοντας την (3) και την (4), έχουμε:

$$K_{\max} = \frac{9 \cdot 10^{-31} \cdot 3,2 \cdot 3,2 \cdot 10^6}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-6} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} \Rightarrow K_{\max} = 3,2 \text{ eV}$$

Δ2. Η συχνότητα κατωφλίου, είναι η οριακή συχνότητα, για την οποία μόλις που καταφέρνουν να εξέρχονται ηλεκτρόνια από το μέταλλο της καθόδου. Δηλαδή η οριακή συχνότητα για την οποία εξέρχονται ηλεκτρόνια με μηδενική κινητική ενέργεια. Άρα η ενέργεια των φωτονίων με τη συχνότητα κατωφλίου είναι ίση με το έργο εξαγωγής ϕ του μετάλλου της καθόδου. Δηλαδή ισχύει $\phi = h \cdot f_0$ και εφαρμόζουμε την φωτοηλεκτρική εξίσωση Einstein για τη συχνότητα $f = 1,5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$:

$$h \cdot f = K_{\max} + \phi = K_{\max} + h \cdot f_0 \Rightarrow h \cdot (f - f_0) = K_{\max}$$

$$\text{οπότε: } h = \frac{K_{\max}}{f - f_0} = \frac{3,2}{1,5 \cdot 10^{15} - 7 \cdot 10^{14}} \text{ eV} \cdot \text{s} = \frac{3,2}{8 \cdot 10^{14}} \text{ eV} \cdot \text{s} = 4 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s} \Rightarrow$$

$$h = 4 \cdot 10^{-15} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot \text{s} \Rightarrow h = 6,4 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Δ3. Το έργο εξαγωγής ϕ του μετάλλου είναι ίσο με την ενέργεια κάθε φωτονίου της ακτινοβολίας με τη συχνότητα κατωφλίου:

$$\phi = h \cdot f_0 \Rightarrow \phi = 2,8 \text{ eV}$$

Δ4. Με την πρόσπτωση ακτινοβολίας συχνότητας $f = 1,5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$, διαπιστώσαμε ότι από το μέταλλο της καθόδου, εξέρχονται ηλεκτρόνια και η μέγιστη κινητική τους ενέργεια είναι $K_{\max} = 3,2 \text{ eV}$. Η τάση αποκοπής είναι η απαιτούμενη τάση αντεστραμμένου πεδίου, η οποία μόλις καταφέρνει να εμποδίσει τα ηλεκτρόνια με τη μέγιστη κινητική ενέργεια να φτάσουν στην άνοδο. Εφαρμόζοντας ενεργειακό θεώρημα:

$$\Delta K = W_{\eta\lambda} \Rightarrow K_{\max} = e \cdot V_{\text{αποκ.}} \Rightarrow V_{\text{αποκ.}} = \frac{K_{\max}}{e} = \frac{3,2 \text{ eV}}{e} \Rightarrow V_{\text{αποκ.}} = 3,2 \text{ V}$$

34ο Διαγώνισμα (Δ34)

ΘΕΜΑ Α

Α1. β), Α2. β), Α3. β), Α4. γ)
Α5. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Επειδή μετά την αύξηση της ενέργειας της προσπίπτουσας ακτινοβολίας η ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων αυξάνεται κατά 50%, συμπεραίνουμε ότι η κινητική τους ενέργεια στην περίπτωση αυτή είναι:

$$K' = K + \frac{50}{100} K = 1,5K \quad (1)$$

Επίσης, εάν για την αρχική ενέργεια των φωτονίων της ακτινοβολίας ισχύει ότι $E = hf$, σύμφωνα με τα δεδομένα θα είναι:

$$E' = E + \frac{25}{100} E = 1,25E \Rightarrow hf' = 1,25hf \quad (2)$$

Με εφαρμογή της φωτοηλεκτρικής εξίσωσης του Einstein έχουμε ότι:

$$K = hf - \phi \quad (3) \quad K' = hf' - \phi \quad (4)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (1), (2), (3) η σχέση (4) γίνεται:

$$1,5K = 1,25hf - \phi \Rightarrow 1,5K = 1,25(K + \phi) - \phi \Rightarrow \phi = K$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η β).

Για τον αρχικό κυκλικό αγωγό, η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του είναι:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I_1}{a} \quad (1)$$

όπου:

a είναι η ακτίνα του κυκλικού αγωγού για την οποία ισχύει: $L = 2\pi a \Rightarrow a = \frac{L}{2\pi}$,

$I_1 = \frac{E}{(R+r)}$ η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα,

R η αντίσταση του κυκλικού αγωγού και r η εσωτερική αντίσταση της πηγής.

Αντικαθιστούμε στην (1):

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I_1}{a} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi}{\frac{L}{2\pi}} \frac{E}{(R+r)} \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(2\pi)^2 E}{L(R+r)} \quad (2)$$

Στην περίπτωση του δεύτερου κυκλώματος με το πλαίσιο των N σπειρών, θα είναι:

$$B' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I_2}{\beta} N \quad (3)$$

όπου:

I_2 η ένταση του ρεύματος για την οποία ισχύει

$I_2 = I_1 = \frac{E}{(R+r)}$, αφού η αντίσταση του αγωγού ίδιου μήκους L δεν αλλάζει,

και β είναι η ακτίνα των νέων κυκλικών πλαισίων, για την οποία ισχύει:

$$L = 2\pi\beta N \Rightarrow \beta = \frac{L}{2\pi N}$$

Αντικαθιστούμε στην (3):

$$B' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I_2}{\beta} N = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi}{\frac{L}{2\pi N}} \frac{E}{(R+r)} N \Rightarrow B' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(2\pi)^2 E}{L(R+r)} N^2 \quad (4)$$

Διαιρούμε τις σχέσεις (2) και (4) κατά μέλη:

$$\frac{B}{B'} = \frac{\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(2\pi)^2 E}{L(R+r)}}{\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(2\pi)^2 E}{L(R+r)} N^2} \Rightarrow \frac{B}{B'} = \frac{1}{N^2} \Rightarrow B' = N^2 B$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Η κινητική ενέργεια που αποκτά το πρωτόνιο, λόγω της διαφοράς δυναμικού V , είναι:

$$\frac{1}{2} m_p v_p^2 = q_p \cdot V \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2q_p \cdot V}{m_p}} \quad (1)$$

Η ορμή του πρωτονίου είναι:

$$p_p = m_p v_p \stackrel{(1)}{\Rightarrow} p_p = \sqrt{2q_p \cdot m_p \cdot V} \quad (2)$$

Συνεπώς το μήκος κύματος de Broglie του πρωτονίου είναι:

$$\lambda_p = \frac{h}{p_p} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \lambda_p = \frac{h}{\sqrt{2q_p \cdot m_p \cdot V}} \quad (3)$$

Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε ότι το μήκος κύματος de Broglie του σωματιδίου άλφα είναι:

$$\lambda_\alpha = \frac{h}{\sqrt{2q_\alpha \cdot m_\alpha \cdot V}} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot 2q_p \cdot 4m_p \cdot V}} \Rightarrow \lambda_\alpha = \frac{h}{4\sqrt{q_p \cdot m_p \cdot V}} \quad (4)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4) παίρνουμε:

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_\alpha} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \lambda_\alpha = \frac{0,4 \text{ nm}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \lambda_\alpha = 0,1\sqrt{2} \text{ nm}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από τις εξισώσεις των δύο κυμάτων προκύπτει:

$$T = \left(\frac{1}{10}\right) \text{ s} \Rightarrow T = 0,1 \text{ s}, \lambda = \left(\frac{1}{5}\right) \text{ m} \Rightarrow$$

$$\lambda = 0,2 \text{ m},$$

$$A = 0,2 \text{ m}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι της μορφής:

$$y = 2A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{T} t \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \sin(10\pi x) \cdot \eta\mu(20\pi t) \text{ (S.I.)}$$

Γ2. Όλα τα σημεία που είναι κοιλίες ταλαντώνονται με πλάτος $A' = 2A = 0,4 \text{ m}$. Επομένως για την αρχή $O(x = 0)$ έχουμε:

$$A' = 2A \left| \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \right| = 0,4 \left| \sin(10\pi x) \right| \Rightarrow A'_O = 0,4 \text{ m}$$

Επομένως στο σημείο $O(x = 0)$ δημιουργείται κοιλία.

Γ3. Βρίσκουμε το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου B που έχει τετμημένη $x_B = 0,25 \text{ m}$. Έχουμε:

$$A'_B = 0,4 \left| \sin(10\pi \cdot 0,25) \right| \Rightarrow A'_B = 0$$

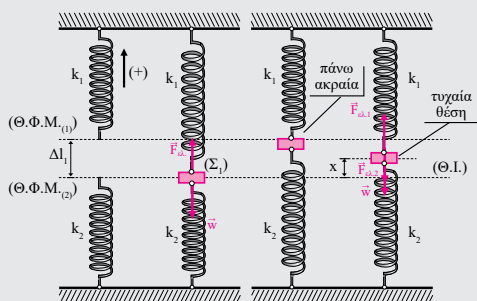
Συνεπώς στο σημείο B σχηματίζεται δεσμός.

Γ4. Το πλάτος της ταλάντωσης του υλικού σημείου M της χορδής υπολογίζεται από τον τύπο: $A'_M = 0,4 \left| \sin(10\pi \cdot 0,025) \right| \Rightarrow A'_B = 0,2\sqrt{2} \text{ m}$
Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου αυτού υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_{\max} = \omega A'_B = \frac{2\pi}{T} \cdot A'_B \Rightarrow v_{\max} = 4\pi\sqrt{2} \text{ m/s}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για να εκτελεί το σώμα απλή αρμονική ταλάντωση θα πρέπει στην τυχαία θέση να δέχεται συνισταμένη δύναμη ανάλογη και ετερόσημη της απομάκρυνσης x .



Στην θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 το ελατήριο k_1 είναι σε επιμήκυνση Δl_1 και το ελατήριο k_2 είναι στο φυσικό του μήκος. Ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ},1} - w = 0 \Rightarrow k_1 \cdot \Delta l_1 = m_1 g \quad (1)$$

Στην τυχαία θέση το ελατήριο k_1 είναι σε επιμήκυνση $(\Delta l_1 - x)$ και το ελατήριο k_2 σε επιμήκυνση x . Έχουμε:

$$\Sigma F = F_{\text{ελ},1} - w - F_{\text{ελ},2} \Rightarrow$$

$$\Sigma F = k_1 \cdot (\Delta l_1 - x) - m_1 g - k_2 \cdot x \Rightarrow$$

$$\Sigma F = -(k_1 + k_2) \cdot x \Rightarrow \Sigma F = -D \cdot x$$

Επομένως το σώμα Σ_1 εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά:

$$D = k_1 + k_2 \Rightarrow D = 100 \text{ N/m}$$

και περίοδο:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{D}} \Rightarrow T_1 = \frac{\pi}{5} \text{ s}$$

Δ2. Το σώμα εκτελεί ΑΑΤ με εξίσωση $x = A_1 \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0)$, $0 \leq \phi_0 < 2\pi \text{ rad}$
Στη θετική ακραία θέση της ταλάντωσης η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι ίση με το πλάτος A , δηλαδή:

$$A_1 = \Delta l_1 \xRightarrow{(1)} A_1 = \frac{m_1 g}{k_1} \Rightarrow A_1 = \frac{1}{4} \text{ m}$$

$$D = m_1 \cdot \omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m_1}} \Rightarrow \omega_1 = 10 \text{ rad/s}$$

Για $t_0 = 0$ το σώμα Σ_1 βρίσκεται σε απομάκρυνση $x = +A_1$ επομένως:

$$A_1 \cdot \eta\mu\phi_0 = A_1 \Rightarrow \eta\mu\phi_0 = 1 \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$



Σύμφωνα με τα παραπάνω:

$$x = \frac{1}{4} \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Δ3. Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην κάτω (αρνητική) ακραία θέση της ταλάντωσής του. Η απόσταση που διανύει το

σώμα Σ_2 από τη στιγμή που αφέθηκε ελεύθερο μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με:

$$d = h + 2A_1 \Rightarrow d = 0,8 \text{ m}$$

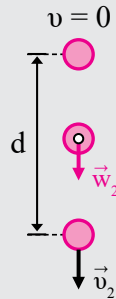
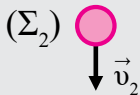
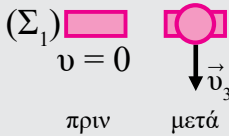
Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ για την κίνηση του Σ_2 πριν την κρούση.

Ισχύει:

$$\Delta K = W_{w_2} \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - 0 = m_2 g d$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2gd} \Rightarrow v_2 = 4 \text{ m/s}$$

Κατά τη διάρκεια της κρούσης το σύστημα θεωρείται μονωμένο.



Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Ορμής.

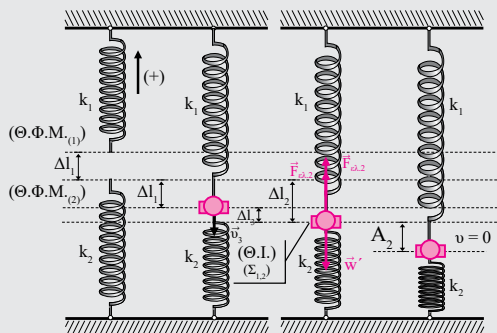
$$\vec{p}_{\piριν} = \vec{p}_{μετά} \Rightarrow m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_3 \Rightarrow$$

$$v_3 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2 \Rightarrow v_3 = 3 \text{ m/s}$$

Έστω Δl_2 η συσπίρωση του ελατηρίου k_2 στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος. Στη θέση αυτή το ελατήριο k_1 έχει επιμήκυνση $\Delta l_4 = \Delta l_1 + \Delta l_2$, επομένως:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow F_{ελ_1} + F_{ελ_2} - w' = 0 \Rightarrow$$

$$k_1 \cdot (\Delta l_1 + \Delta l_2) + k_2 \Delta l_2 = (m_1 + m_2)g \Rightarrow \Delta l_2 = 0,3 \text{ m}$$



Η απομάκρυνση του συσσωματώματος ακριβώς μετά την κρούση από τη θέση ισορροπίας του είναι: $\Delta l_3 = \Delta l_2 - \Delta l_1 \Rightarrow \Delta l_3 = 0,05 \text{ m}$

Το συσσωμάτωμα εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά:

$$D = k_1 + k_2 \Rightarrow D = 100 \text{ N/m}$$

Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης Ενέργειας της ταλάντωσης:

$$K + U = E_T \Rightarrow \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_3^2 + \frac{1}{2} D \cdot \Delta l_3^2 = \frac{1}{2} D \cdot A_2^2$$

$$\Rightarrow A_2 = 0,602 \text{ m}$$

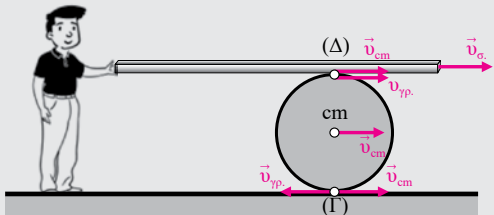
35ο Διαγώνισμα (Δ35)

ΘΕΜΑ Α

A1. γ), A2. γ), A3. γ), A4. α)
A5. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η β).
Δικαιολόγηση



Κάποια χρονική στιγμή καθώς το βαρέλι κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, το κέντρο μάζας του έχει ταχύτητα μέτρου v_{cm} . Την ίδια στιγμή τα σημεία της περιφέρειας του βαρελιού εξαιτίας της κυκλικής κίνησης που εκτελούν έχουν γραμμική ταχύτητα μέτρου $v_{\Gamma\pi}$. Το κατώτερο σημείο Γ ενός κατακόρυφου κύκλου της περιφέρειας του βαρελιού συμμετέχει στη μεταφορική κίνηση του βαρελιού και έχει εξαιτίας της οριζόντια ταχύτητα μέτρου v_{cm} με κατεύθυνση προς τα εμπρός και στην κυκλική κίνηση της περιφέρειας και έχει εξαιτίας της ταχύτητα γραμμική μέτρου $v_{\Gamma\pi}$ με κατεύθυνση προς τα πίσω. Η ταχύτητα του σημείου Γ είναι ίση με την ταχύτητα του παπέρου, δηλαδή μηδέν αφού δεν παρατηρείται ολίσθηση:

$$v_{\Gamma} = v_{cm} - v_{\gamma p} = 0 \Rightarrow v_{cm} = v_{\gamma p} \quad (1)$$

Το ανώτατο σημείο Δ του ίδιου κατακόρυφου κύκλου της περιφέρειας συμμετέχει επίσης στη μεταφορική κίνηση του βαρελιού αλλά και στην κυκλική κίνηση της περιφέρειας και πρέπει η ταχύτητά του τελικά να είναι ίση με την ταχύτητα της σανίδας εκείνη τη στιγμή, αφού δεν παρατηρείται ολίσθηση:

$$v_{\Delta} = v_{cm} + v_{\gamma p} = v_{\sigma} \quad (2)$$

Από τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει ότι κάθε στιγμή για τα μέτρα των ταχυτήτων της σανίδας και του κέντρου του βαρελιού ισχύει η σχέση:

$$v_{\sigma} = 2 \cdot v_{cm} \Rightarrow \frac{dx_{\sigma}}{dt} = 2 \cdot \frac{dx_{cm}}{dt} \Rightarrow dx_{\sigma} = 2 \cdot dx_{cm}$$

$$\Delta x_{\sigma} = \sum dx_{\sigma} = \sum 2 \cdot dx_{cm} = 2 \cdot \sum dx_{cm} = 2 \cdot \Delta x_{cm}$$

$$\text{Τελικά: } \Delta x_{cm} = \frac{\Delta x_{\sigma}}{2} \Rightarrow \Delta x_{cm} = 60 \text{ cm}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

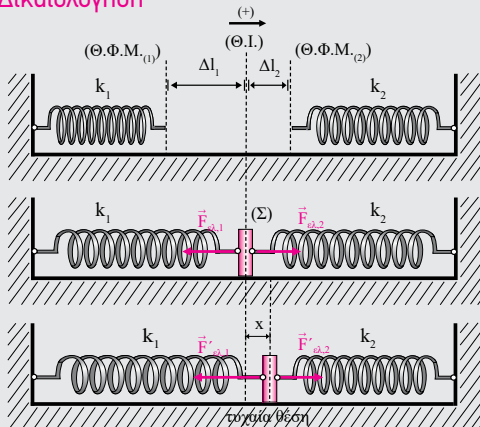
Από τον νόμο μετατόπισης του Wien, ο οποίος ισχύει για ένα μέλαν σώμα, ξέρουμε ότι το γινόμενο της απόλυτης θερμοκρασίας του Τ επί το μήκος κύματος $\lambda_{\max}$ στο οποίο παρατηρείται η μέγιστη εκπομπή ακτινοβολίας (μήκος κύματος «αιχμής») είναι σταθερό, δηλαδή:

$$\lambda_{\max} \cdot T = \text{σταθ.} \Rightarrow \lambda_{1\max} \cdot T_1 = \lambda_{2\max} \cdot T \Rightarrow$$

$$\lambda_{\max} = \frac{\lambda_{1\max} \cdot T_1}{T} = \frac{2000 \text{ nm} \cdot 1450 \text{ K}}{2,7 \text{ K}} \Rightarrow \lambda_{\max} \cong 1,1 \text{ mm}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση



Έστω θετική η φορά προς τα δεξιά.

Στη θέση ισορροπίας οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα από τα δύο ελατήρια έχουν αντίθετες κατευθύνσεις και μέτρα $F_{\epsilon\lambda,1} = k_1 \cdot \Delta l_1$ και $F_{\epsilon\lambda,2} = k_2 \cdot \Delta l_2$ αντίστοιχα.

Το σώμα Σ ισορροπεί, επομένως:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow F_{\epsilon\lambda,2} - F_{\epsilon\lambda,1} = 0 \Rightarrow k_2 \cdot \Delta l_2 - k_1 \cdot \Delta l_1 = 0 \quad (1)$$

Εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του, προς τα δεξιά και το αφήνουμε ελεύθερο. Όταν το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση x το ελατήριο k_1 έχει επιμήκυνση:

$$\Delta l'_1 = \Delta l_1 + x$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι και το ελατήριο k_2 έχει επιμήκυνση, οπότε:

$$\Delta l'_2 = \Delta l_2 - x$$

Στη θέση αυτή η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι ίση με:

$$\Sigma F = -F'_{\epsilon\lambda,1} + F'_{\epsilon\lambda,2} \Rightarrow \Sigma F = -k_1 \cdot \Delta l'_1 + k_2 \cdot \Delta l'_2 \Rightarrow \Sigma F = -k_1 \cdot (\Delta l_1 + x) + k_2 \cdot (\Delta l_2 - x) \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\Sigma F = -(k_1 + k_2) \cdot x \Rightarrow \Sigma F = -D \cdot x, D = k_1 + k_2$$

Επομένως, η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι ανάλογη και ετερόσημη της απομάκρυνσης x. Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για την κάθοδο του σώματος Σ_1 εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για να βρούμε την ταχύτητά του λίγο πριν την κρούση με το σώμα Σ_2 :

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 = m_1 g l \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{2gl} \Rightarrow v_1 = 4 \text{ m/s}$$

Για την ελαστική κρούση ανάμεσα στα σώματα Σ_1 και Σ_2 ισχύει:

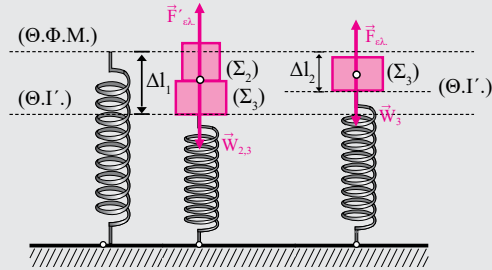
$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v'_1 = -0,8 \text{ m/s}$$

(η κατεύθυνση του Σ_1 προς τα αριστερά)

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v'_2 = 3,2 \text{ m/s}$$

(η κατεύθυνση του Σ_2 προς τα δεξιά)

Γ2.



Στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του σώματος Σ_3 το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά Δl_2 , οπότε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{el} = W_3 \Rightarrow k\Delta l_2 = m_3 g \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{m_3 g}{k} = 0,1 \text{ m}$$

Στην αρχική ισορροπία των δύο σωμάτων (ακραία θέση της ταλάντωσης εφόσον τα σώματα είναι ακίνητα), το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά Δl_1 , οπότε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F'_{el} = W_{2,3} \Rightarrow k\Delta l_1 = (m_2 + m_3)g \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{(m_2 + m_3)g}{k} = 0,4 \text{ m}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι:

$$A = \Delta l_1 - \Delta l_2 \Rightarrow A = 0,3 \text{ m}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης θα είναι:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_3}{k}} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} \text{ s}$$

Γ3. Η σχέση της απομάκρυνσης με τον χρόνο στην απλή αρμονική ταλάντωση του σώματος Σ_3 είναι της μορφής: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$.

Η γωνιακή συχνότητα δίνεται από τη σχέση: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 10 \text{ rad/s}$.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα Σ_3 ξεκινά την ταλάντωση από την θέση $x = +A$ (θετική φορά προς τα κάτω), οπότε έχουμε:

$$+A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = +1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad (αρ-χική φάση)}$$

Συνεπώς, η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ_3 σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$x = 0,3\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ S.I.}$$

Για τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{4} \text{ s}$ βρίσκουμε $x = 0$ (Θ.Ι. ταλάντωσης του σώματος Σ_3), οπότε το σώμα Σ_3 έχει τη μέγιστη ταχύτητα $v = v_{\max} = A\omega = 3 \text{ m/s}$. Άρα η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_3 είναι:

$$K = \frac{1}{2} m_3 v^2 \Rightarrow K = 4,5 \text{ J}$$

Γ4. Τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{10} \text{ s} = \frac{T}{2}$ το σώμα Σ_3 θα βρεθεί στην άλλη ακραία του θέση ($x = -A$). Συνεπώς, η παραμόρφωση (επιμήκυνση) του ελατηρίου θα είναι: $\Delta l = A - \Delta l_2 = 0,2 \text{ m}$.

Άρα το μέτρο της δύναμης ελατηρίου είναι:

$$F_{el} = k\Delta l \Rightarrow F_{el} = 20 \text{ N}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Όπως παρατηρούμε από το σχήμα, το μήκος της χορδής αντιστοιχεί σε δύο μήκη κύματος, οπότε:

$$L = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{L}{2} \Rightarrow \lambda = 0,8 \text{ m}$$

Το ελάχιστο χρονικό διάστημα που χρειάζεται το σημείο X για να μεταβεί από την μία ακραία θέση ταλάντωσης στην άλλη είναι μισή περίοδος, οπότε:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2 \cdot \Delta t = 0,2 \text{ s}$$

Με χρήση της θεμελιώδους εξίσωσης της κυματικής βρίσκουμε ότι η ταχύτητα διάδοσης των αρμονικών κυμάτων στην χορδή είναι:

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v = 4 \text{ m/s}$$

Δ2. Η συχνότητα της γεννήτριας που δημιουργεί το στάσιμο κύμα του σχήματος (συνολικά 5 δεσμοί με τα άκρα της χορδής) είναι $f = \frac{1}{T} = 5 \text{ Hz}$.

Όταν μεταβάλλουμε την συχνότητα της γεννήτριας και σχηματιστεί ένας ακόμη δεσμός (συνολικά 6 δεσμοί με τα άκρα της χορδής), τότε το μήκος της χορδής θα είναι 2,5 μήκη κύματος, δηλαδή:

$$L = 2,5\lambda' \Rightarrow \lambda' = \frac{L}{2,5} = 0,64 \text{ m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος δεν αλλάζει, οπότε η νέα συχνότητα της γεννήτριας θα γίνει:

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = 6,25 \text{ Hz}$$

Συνεπώς, η συχνότητα πρέπει να αυξηθεί κατά:

$$\Delta f = f' - f = 6,25 \text{ Hz} - 5 \text{ Hz} \Rightarrow \Delta f = 1,25 \text{ Hz}$$

Α3. Το πλάτος ταλάντωσης των σημείων που βρίσκονται στις κοιλίες του στάσιμου κύματος είναι διπλάσιο από το πλάτος των αρμονικών κυμάτων. Επομένως, τα αρμονικά κύματα έχουν πλάτος:

$$|A'| = 2A \Rightarrow A = \frac{|A'|}{2} = 2 \text{ cm}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος στην χορδή (στην θέση Ψ με $x = 0$ υπάρχει κοιλία) στο διάστημα $-0,6 \text{ m} \leq x \leq +1 \text{ m}$ είναι:

$$y = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \Rightarrow$$

$$y = 0,04 \sin(2,5\pi x) \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.)}$$

Η εξίσωση επιτάχυνσης ταλάντωσης για τα μόρια της χορδής είναι:

$$a = -\omega^2 y = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 y \Rightarrow$$

$$a = -40 \sin(2,5\pi x) \eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I.)}$$

Α4. Τα σημεία που βρίσκονται στις κοιλίες εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση, οπότε για την κίνησή τους εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας. Ισχύει:

$$K + U = E \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_{\tau}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 (2A)^2 \Rightarrow$$

$$v_{\tau} = 0,3\pi \text{ m/s}$$

36ο Διαγώνισμα (Α36)

ΘΕΜΑ Α

A1. δ), A2. β), A3. β), A4. γ)
A5. α) Λ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **α**).

Δικαιολόγηση

Πείραμα (1): Έστω φ_1 το έργο εξαγωγής ηλεκτρονίου από την επιφάνεια του μετάλλου (1) που χρησιμοποιείται ως κάθοδος στη λυχνία (1). Η συχνότητα κατωφλίου δίνεται $f_{0,1}$ και ισχύει η σχέση:

$$h \cdot f_{0,1} - \varphi_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = h \cdot f_{0,1} \quad (1)$$

Όταν προσπίπτει στην κάθοδο φως με συχνότητα $f_1 = 4 \cdot f_{0,1}$, εξέρχονται ηλεκτρόνια και η μέγιστη κινητική ενέργεια εξερχόμενου ηλεκτρονίου είναι:

$$K_1^{\max} = h \cdot f_1 - \varphi_1 \xRightarrow{(1)} K_1^{\max} = h \cdot 4 \cdot f_{0,1} - h \cdot f_{0,1} =$$

$$= 3 \cdot h \cdot f_{0,1} \quad (2)$$

Πείραμα (2): Έστω φ_2 το έργο εξαγωγής ηλεκτρονίου από την επιφάνεια του μετάλλου (2) που χρησιμοποιείται ως κάθοδος στη λυχνία (2). Η συχνότητα κατωφλίου δίνεται $f_{0,2} = 1,5 \cdot f_{0,1}$ και ισχύει η σχέση:

$$h \cdot f_{0,2} - \varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_2 = h \cdot f_{0,2} = 1,5 \cdot h \cdot f_{0,1} \quad (3)$$

Όταν προσπίπτει στην κάθοδο φως με συχνότητα $f_1 = 4 \cdot f_{0,1}$, εξέρχονται ηλεκτρόνια και η μέγιστη κινητική ενέργεια εξερχόμενου ηλεκτρονίου είναι:

$$K_2^{\max} = h \cdot f_1 - \varphi_2 \xRightarrow{(3)}$$

$$K_2^{\max} = h \cdot 4 \cdot f_{0,1} - 1,5 \cdot h \cdot f_{0,1} = 2,5 \cdot h \cdot f_{0,1} \quad (4)$$

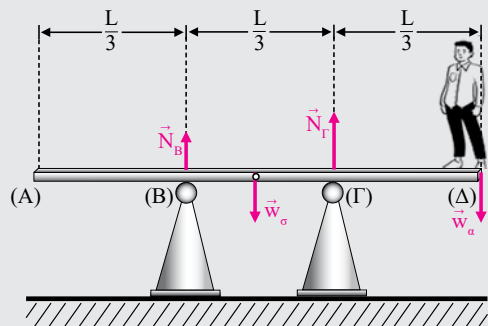
Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (3) και (4), προκύπτει:

$$\frac{K_1^{\max}}{K_2^{\max}} = \frac{3 \cdot h \cdot f_{0,1}}{2,5 \cdot h \cdot f_{0,1}} \Rightarrow \frac{K_1^{\max}}{K_2^{\max}} = 1,2$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η **β**).

Δικαιολόγηση

Για να μπορεί να πατήσει ο άνθρωπος από το ένα άκρο μέχρι το άλλο, χωρίς να ανατρέπεται η σανίδα, αρκεί να μπορεί να πατήσει στο άκρο της, για παράδειγμα στο Δ και να μην ανατρέπεται η σανίδα, περιστρεφόμενη γύρω από το στήριγμα στο σημείο Γ. Αυτό εξασφαλίζεται αν και σε αυτή τη θέση, εξακολουθεί η ράβδος να ασκεί δύναμη στο στήριγμα στο σημείο Β και να δέχεται δύναμη από αυτό (σχήμα).



Δηλαδή η συνθήκη είναι $N_B \geq 0$, όταν ο άνθρωπος πατάει στο άκρο Δ.

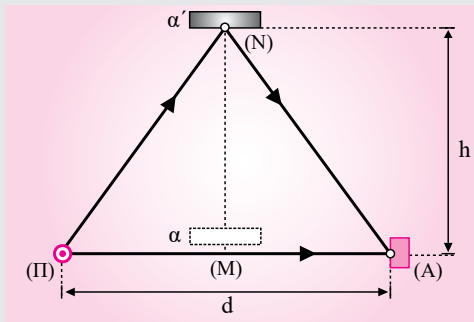
Ισορροπία ροπών ως προς Γ:

$$\begin{aligned}\Sigma \tau_{\Gamma} &= w_{\Sigma} \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3}\right) - w_a \cdot \frac{L}{3} - N_B \cdot \frac{L}{3} = 0 \Rightarrow \\ N_B \cdot \frac{L}{3} &= w_{\Sigma} \cdot \frac{L}{6} - w_a \cdot \frac{L}{3} \\ \Rightarrow N_B \cdot \frac{L}{3} &= \frac{L}{3} \cdot \left(\frac{M}{2} - m\right) \cdot g \Rightarrow \\ N_B &= \left(\frac{M}{2} - m\right) \cdot g \geq 0 \Rightarrow M \geq 2m\end{aligned}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Καθώς μετακινούμε τον ανακλαστήρα α, πάνω στην μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΠΑ, στον ανιχνευτή Α φτάνουν δύο κύματα, τα οποία ξεκινούν από την πηγή Π και διατρέχουν διαφορετικές αποστάσεις μέχρι να φτάσουν σε αυτόν.



Ανιχνεύουμε ταλάντωση μέγιστου πλάτους στον ανιχνευτή, για τέταρτη φορά από τότε που αρχίσαμε να μετακινούμε τον ανακλαστήρα α, όταν για τις αποστάσεις αυτές, ισχύει η σχέση:

$$\begin{aligned}r_1 - r_2 &= 4 \cdot \lambda \Rightarrow (\Pi N) + (N A) - (\Pi A) = 4 \cdot \lambda \Rightarrow \\ 2 \cdot (\Pi N) - (\Pi A) &= 4 \cdot \lambda \Rightarrow \\ 2 \cdot (\Pi N) &= d + 4 \cdot \lambda = 6 \cdot \lambda + 4 \cdot \lambda = 10 \cdot \lambda \Rightarrow \\ (\Pi N) &= 5 \cdot \lambda\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΠΜΝ:

$$\begin{aligned}(\Pi N)^2 &= (\Pi M)^2 + (M N)^2 \Rightarrow (5 \cdot \lambda)^2 = \\ &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = (5 \cdot \lambda)^2 - (3 \cdot \lambda)^2 = 16 \cdot \lambda^2\end{aligned}$$

$$\text{Άρα: } h = 4 \cdot \lambda = 4 \cdot \frac{v_{\delta}}{f}$$

$$\text{Τελικά: } v_{\delta} = \frac{h \cdot f}{4}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για τη θέση ισορροπίας του σώματος μάζας m_1 ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow k \cdot \Delta l_1 - m_1 \cdot g = 0 \Rightarrow$$

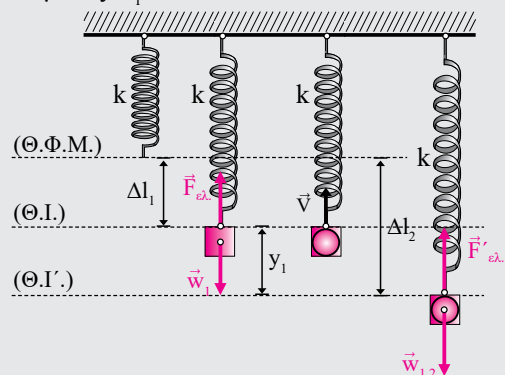
$$\Delta l_1 = \frac{m_1 \cdot g}{k} \Rightarrow \Delta l_1 = 0,1 \text{ m}$$

Γ2. Θεωρούμε θετική τη φορά προς τα πάνω και για το μονωμένο σύστημα των δύο σωμάτων εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο για την πλαστική κρούση:

$$\vec{p}_{ολ,αρχ} = \vec{p}_{ολ,τελ} \Rightarrow m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v \Rightarrow$$

$$v = \frac{m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow v = 1 \text{ m/s}$$

Γ3. Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται έχει διαφορετική θέση ισορροπίας από εκείνη του σώματος m_1 .



Για τη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow k \cdot \Delta l_2 - (m_1 + m_2) \cdot g = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta l_2 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot g}{k} \Rightarrow \Delta l_2 = 0,2 \text{ m}$$

Γ4. Η ταλάντωση του συσσωματώματος αρχίζει όταν αυτό βρίσκεται σε απομάκρυνση y_1 από τη θέση ισορροπίας του.

Για την απομάκρυνση είναι:

$$y_1 = \Delta l_2 - \Delta l_1 \Rightarrow y_1 = 0,1 \text{ m}$$

Η ενέργεια της ταλάντωσης διατηρείται:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot y_1^2 \Rightarrow$$

$$k \cdot A^2 = (m_1 + m_2) \cdot v^2 + k \cdot y_1^2 \Rightarrow A = 0,1 \cdot \sqrt{3} \text{ m}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από το δεδομένο διάγραμμα απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας του-χρόνου, για την ταλάντωση που εκτελεί το σημείο Σ, όταν φτάνει σε αυτό το κύμα της πηγής Π₁, υπολογίζουμε την περίοδο ταλάντωσης του Σ, αλλά και των δύο σύγχρονων πηγών.

$$T = (0,6 - 0,4) \text{ s} = 0,2 \text{ s}$$

Έτσι μπορούμε να γνωρίζουμε και τη συχνότητα των ταλαντώσεων, αλλά και το μήκος κύματος των κυμάτων που διαδίδονται από τις δύο πηγές, στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού:

$$f = \frac{1}{T} = 5 \text{ Hz}, \quad \lambda = \frac{v_\delta}{f} \Rightarrow \lambda = 1,6 \text{ m}$$

Δ2. Το κύμα της πηγής Π₁, φτάνει στο σημείο Σ τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,4 \text{ s}$, κατά την οποία αρχίζουν οι ταλαντώσεις του, όπως φαίνεται από το διάγραμμα. Άρα:

$$r_1 = v_\delta \cdot t_1 \Rightarrow r_1 = 3,2 \text{ m}$$

Το κύμα της πηγής Π₂, φτάνει στο Σ, τη χρονική στιγμή $t_2 = 0,8 \text{ s}$, (ενώ το σημείο έχει ήδη εκτελέσει δύο πλήρεις ταλαντώσεις εξ αιτίας του κύματος από την Π₁) και το εξαναγκάζει σε ταλάντωση, με συμφωνία φάσης με την ταλάντωση που ήδη εκτελεί, μετατρέποντας το, σε σημείο ενισχυτικής συμβολής. Προφανώς η απόσταση r_2 , είναι μεγαλύτερη κατά δύο μήκη κύματος σε σχέση με τη r_1 . Ή πιο απλά:

$$r_2 = v_\delta \cdot t_2 \Rightarrow r_2 = 6,4 \text{ m}$$

Δ3. Το σημείο Γ και το σημείο Σ, απέχουν από τις δύο πηγές διαφορετικές αποστάσεις, με την ίδια όμως διαφορά και, για τον λόγο αυτό, ανήκουν στην ίδια ενισχυτική υπερβολή. Δηλαδή ισχύει:

$$\begin{aligned} (Π_2 Γ) - (Π_1 Γ) &= r_2 - r_1 = 3,2 \text{ m} \\ \Rightarrow [(Π_2 Μ) + (ΓΜ)] - [(Π_1 Μ) - (ΓΜ)] &= 3,2 \text{ m} \\ \Rightarrow 2 \cdot (ΓΜ) &= 3,2 \text{ m} \Rightarrow (ΓΜ) = 1,6 \text{ m} \end{aligned}$$

Δ4. Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο Π₁ΣΠ₂, θέτοντας d την απόσταση μεταξύ των δύο πηγών:

$$\begin{aligned} (Π_1 Π_2)^2 &= r_1^2 + r_2^2 \Rightarrow \\ (Π_1 Π_2) &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = (\sqrt{3,2^2 + 6,4^2}) \text{ m} = \\ &= 3,2 \cdot \sqrt{5} \text{ m} = d \end{aligned}$$

Έστω ένα σημείο Ε, ενισχυτικής συμβολής του Π₁ Π₂, το οποίο απέχει x από την πηγή Π₁ και $d - x$ από την Π₂. Θα ισχύει:

$$\begin{aligned} x - (d - x) &= N \cdot \lambda, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \Rightarrow 2 \cdot x &= N \cdot \lambda + d \Rightarrow x = N \cdot \frac{\lambda}{2} + \frac{d}{2} \end{aligned}$$

Για την απόσταση x , ισχύει:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq d &\Rightarrow 0 \leq N \cdot \frac{\lambda}{2} + \frac{d}{2} \leq d \Rightarrow \\ -\frac{d}{2} \leq N \cdot \frac{\lambda}{2} &\leq \frac{d}{2} \Rightarrow -d \leq N \cdot \lambda \leq d \Rightarrow \\ \frac{-3,2 \cdot \sqrt{5}}{1,6} \leq N &\leq \frac{3,2 \cdot \sqrt{5}}{1,6} \Rightarrow -2 \cdot \sqrt{5} \leq N \leq 2 \cdot \sqrt{5} \end{aligned}$$

που σημαίνει:

$$-4 \leq N \leq 4 \Rightarrow N = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

Δηλαδή **9 σημεία**.

37ο Διαγώνισμα (Δ37)

ΘΕΜΑ Α

A1. γ), A2. δ), A3. γ), A4. α)
A5. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **β**).

Δικαιολόγηση

Από τη χρονική στιγμή μηδέν μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 το σύστημα έχει εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση, άρα $t_1 = T = 2 \text{ s}$, όπου T η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης. Η περίοδος T παραμένει σταθερή ανεξάρτητη του πλάτους, επομένως $t_5 = 5T$.

Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο, επομένως ισχύει:

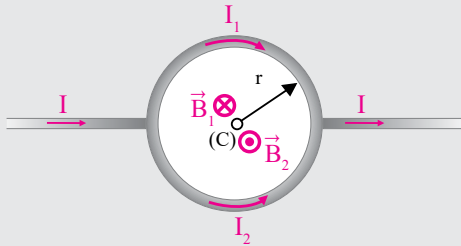
$$A_1 = A_0 \cdot e^{-\Lambda t_1} \text{ και } A_5 = A_0 \cdot e^{-\Lambda t_5}$$

Διαιρώντας τις δύο σχέσεις κατά μέλη, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{A_5} &= \frac{A_0 \cdot e^{-\Lambda t_1}}{A_0 \cdot e^{-\Lambda t_5}} \Rightarrow 4 = e^{\Lambda 4T} \Rightarrow \Lambda 4T = 2 \ln 2 \Rightarrow \\ \frac{\ln 2}{8\Lambda} &= 2 \ln 2 \Rightarrow \Lambda = \frac{\ln 2}{4} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η **γ**).

Δικαιολόγηση



Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το πάνω ημικύκλιο στο σημείο C είναι κάθετο στο επίπεδο του βρόχου και σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού έχει φορά προς τα μέσα. Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του ημικυκλίου είναι το μισό από αυτό που δημιουργεί κυκλικός αγωγός ίδιας ακτίνας και έντασης ρεύματος. Επομένως ισχύει:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2} = \frac{\mu_0 I_1}{4r} = \frac{\mu_0 I}{8r}$$

Αντίστοιχα το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το κάτω ημικύκλιο στο C είναι κάθετο στο επίπεδο του βρόχου, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού έχει φορά προς τα έξω (προς τον αναγνώστη) και μέτρο:

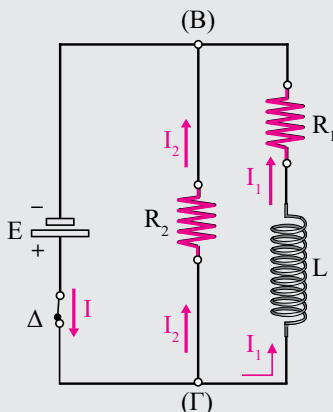
$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4r} = \frac{\mu_0 I}{8r}$$

Επειδή αυτά τα δύο μαγνητικά πεδία είναι αντίθετα στο σημείο C, το συνολικό μαγνητικό πεδίο που δημιουργούν έχει μέτρο:

$$B_C = B_1 - B_2 \Rightarrow B_C = \frac{\mu_0 I}{8r} - \frac{\mu_0 I}{8r} \Rightarrow B_C = 0$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β).

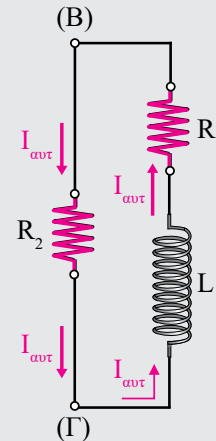
Δικαιολόγηση



Με τον διακόπτη κλειστό, οι φορές των ρευμάτων στους κλάδους του κυκλώματος είναι αυτές που εικονίζονται στο σχήμα.

Γνωρίζουμε ότι οι τιμές των εντάσεων έχουν σταθεροποιηθεί. Συνεπώς, στο πηνίο έχει δημιουργηθεί μαγνητικό πεδίο και έχει αποθηκευτεί ενέργεια.

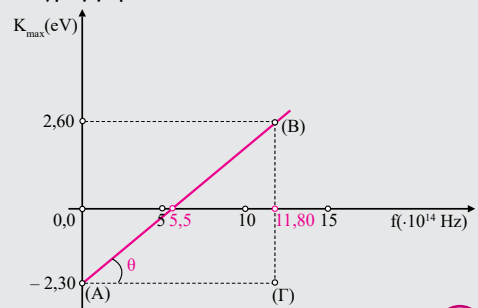
Το άνοιγμα του διακόπτη ισοδυναμεί με αφαίρεση του κλάδου της πηγής από το κύκλωμα. Άρα, το ρεύμα I_1 , που διέρχεται από το πηνίο, τείνει να μειωθεί. Εις βάρος της αποθηκευμένης ενέργειας, το πηνίο προσπαθεί να συντηρήσει το ρεύμα αυτό. Δηλαδή, το αυτεπαγωγικό ρεύμα θα διαρρέει το πηνίο με φορά από το Γ προς το Β.



Συνεπώς, θα διέρχεται από την R_2 με φορά από το Β προς το Γ.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η γραφική παράσταση της $K_{\max}$ ως συνάρτηση της συχνότητας f είναι ακόλουθη ευθεία γραμμή.



Η σταθερά του Planck h θα υπολογιστεί από την κλίση της ευθείας.

Γράφουμε την φωτοηλεκτρική εξίσωση:

$$K_{\max} = h \cdot f - \Phi$$

Εάν $K_{1\max}$ και $K_{2\max}$ δύο τιμές της μέγιστης κινητικής ενέργειας που αντιστοιχούν στις συχνότητες f_1 και f_2 , η κλίση της ευθείας θα είναι:

$$h = \frac{K_{2\max} - K_{1\max}}{f_2 - f_1}$$

Επιλέγοντας τις συντεταγμένες $K_{1\max}$ και f_1 του σημείου Α της ευθείας και τις συντεταγμένες $K_{2\max}$ και f_2 ενός άλλου σημείου όπως του Β, τότε ο λόγος:

$$\frac{K_{2\max} - K_{1\max}}{f_2 - f_1}$$

είναι η κλίση της ευθείας.

Υπολογίζεται ότι:

$$\begin{aligned} \text{Κλίση} &= \frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{(2,60 + 2,30) \cdot \text{eV}}{(11,80 - 0) \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = \frac{4,90 \text{ eV}}{11,80 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} \\ \text{Άρα } h &= \frac{4,90 \text{ eV}}{11,80 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = \frac{4,90 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ V} \cdot \text{C}}{11,80 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = \frac{7,84 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{11,80 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} \Rightarrow h = 6,60 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

Γ2. Σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\begin{aligned} K_{\max} &= h \cdot f - \Phi \text{ αν θέσουμε } f = 0 \text{ θα έχουμε:} \\ K_{\max} &= -\Phi \text{ μελετώντας την τιμή της γραφικής παράστασης βλέπουμε ότι:} \\ K_{\max} &= -2,30 \text{ eV επομένως το έργο εξαγωγής του νατρίου είναι:} \\ \Phi &= 2,30 \text{ eV} = 2,30 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ (C} \cdot \text{V)} \Rightarrow \\ \Phi &= 3,70 \cdot 10^{-19} \text{ J} \end{aligned}$$

Γ3. Το σημείο τομής της ευθείας με τον οριζόντιο άξονα στο γράφημα μας δίνει τη συχνότητα κατωφλίου f_0 :

$$f_0 = 5,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

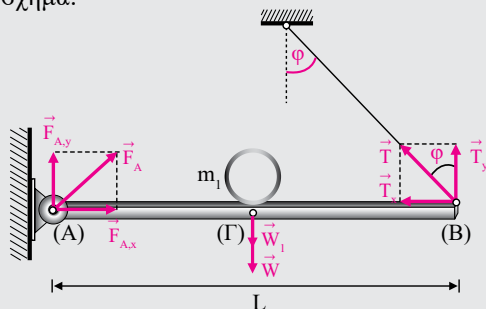
Γ4. Το φως στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο συμπεριφέρεται και σαν κύμα με μήκος κύματος λ_0 . Έτσι μπορούμε να γράψουμε:

$$c = \lambda \cdot f_0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{c}{f_0} \Rightarrow \lambda_0 = 545 \text{ nm}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Τοποθετούμε την στεφάνη μάζας m_1

ακίνητη στο σημείο Γ έτσι ώστε η ράβδος να ισορροπεί. Τότε οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι σχεδιασμένες στο παρακάτω σχήμα:



Εφόσον η ράβδος ισορροπεί θα ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}, \Sigma \vec{\tau} = \vec{0}.$$

Επιλέγουμε την ισορροπία των ροπών των δυνάμεων ως προς το σημείο Α, με θετική φορά την αριστερόστροφη:

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{\tau}_A = \vec{0} &\Rightarrow \vec{\tau}_W + \vec{\tau}_{W_1} + \vec{\tau}_{F_A} + \vec{\tau}_T = \vec{0} \Rightarrow \\ -W \cdot \frac{L}{2} - W_1 \cdot (A\Gamma) + 0 + T \cdot \text{συνφ} \cdot L &= 0 \Rightarrow \\ T \cdot L \cdot \text{συνφ} &= W \cdot \frac{L}{2} + W_1 \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow \\ T \cdot \frac{L}{2} &= m \cdot g \cdot \frac{L}{2} + m_1 \cdot g \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow T = 10 \text{ N} \end{aligned}$$

Δ2. Έστω d η απόσταση από το Β, στην οποία αν μετακινήσουμε την στεφάνη, οριακά δεν θα σπάσει το νήμα. Για την νέα οριακή ισορροπία και πάλι ως προς το σημείο Α, θα είναι:

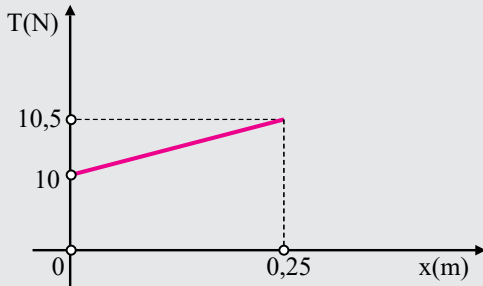
$$\begin{aligned} \Sigma \vec{\tau}'_A = \vec{0} &\Rightarrow \vec{\tau}'_W + \vec{\tau}'_{W_1} + \vec{\tau}'_{F_A} + \vec{\tau}'_T = \vec{0} \Rightarrow \\ -W \cdot \frac{L}{2} - W_1 \cdot (L - d) + 0 + T_{\theta\phi} \cdot \text{συνφ} \cdot L &= 0 \Rightarrow \\ W_1 \cdot (L - d) &= T_{\theta\phi} \cdot \text{συνφ} \cdot L - W \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow d = 0,25 \text{ m} \end{aligned}$$

Άρα η στεφάνη μπορεί να πλησιάσει σε απόσταση $d = 25 \text{ cm}$ από το σημείο Β χωρίς να σπάσει το νήμα.

Δ3. Για την ζητούμενη γραφική παράσταση της μεταβολής της τάσης του νήματος ως προς την απόσταση του σώματος m_1 από το σημείο Γ, πρέπει να προσδιορίσουμε την συνάρτηση $T = f(x)$.

Για μια τυχαία θέση x του σώματος m_1 μεταξύ των θέσεων Γ ($x = 0$) και θραύσης του νήματος ($x = 0,25 \text{ m}$), ισχύει:

$$\begin{aligned}\Sigma \vec{\tau}''_A = \vec{0} &\Rightarrow \vec{\tau}_W + \vec{\tau}''_{W_1} + \vec{\tau}_{F_A} + \vec{\tau}_T = \vec{0} \Rightarrow \\ -W \frac{L}{2} - W_1 \left(\frac{L}{2} + x \right) + 0 + T \cdot L \cdot \sin \varphi &= 0 \Rightarrow \\ T \cdot L \cdot \sin \varphi &= W \frac{L}{2} + W_1 \left(\frac{L}{2} + x \right) \Rightarrow \\ T \cdot 0,5 &= 9 \cdot 1/2 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + x \right) \Rightarrow \\ T &= 10 + 2 \cdot x \quad \text{για } 0 \leq x \leq 0,25 \text{ m (S.I.)} \\ \text{Άρα η γραφική παράσταση θα είναι:}\end{aligned}$$



Δ4. Ο αριθμός των περιστροφών που εκτέλεσε η στεφάνη είναι:

$$N = \frac{\theta_1}{2\pi} \quad (1)$$

όπου θ_1 η γωνία στροφής μέχρι να ακινητοποιηθεί.

Αλλά:

$$\theta_1 = \omega_0 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t^2 \quad (2)$$

Για την αρχική ταχύτητα ω_0 , ισχύει:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t \Rightarrow 0 = \omega_0 - \frac{\alpha_{cm}}{R} \cdot \Delta t \Rightarrow \\ \omega_0 &= 2,5 \text{ rad/s} \quad (3)\end{aligned}$$

Η (2) λόγω της (3), γίνεται:

$$\theta_1 = \omega_0 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t^2 \Rightarrow \theta_1 = 1,25 \text{ rad}$$

και αντικαθιστώντας στην (1):

$$N = \frac{\theta_1}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{0,625}{\pi} \text{ περιστροφές}$$

38ο Διαγώνισμα (Δ38)

ΘΕΜΑ Α

A1. α), A2. β), A3. β), A4. γ)
A5. α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **α**).

Δικαιολόγηση

Γνωρίζουμε ότι η εκθετική μείωση ενός μεγέθους εκφράζεται από συνάρτηση της μορφής:

$$I = I_0 e^{-\Lambda t}$$

όπου Λ , κατάλληλη σταθερά. Εφαρμόζουμε την σχέση αυτή για τις χρονικές στιγμές t_1 :

$$\frac{I_0}{2} = I_0 e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow 2 = e^{\Lambda t_1} \Rightarrow \ln 2 = \Lambda t_1$$

και t_2 :

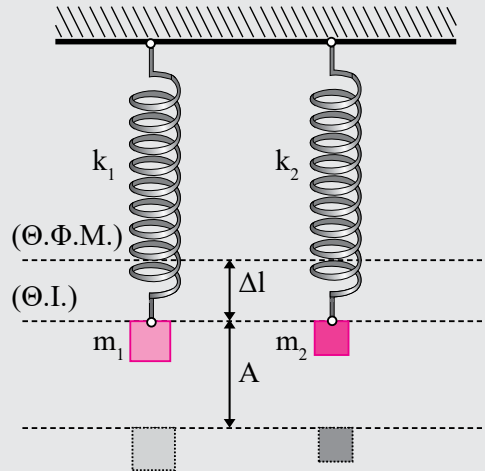
$$\begin{aligned}\frac{I_0}{8} &= I_0 e^{-\Lambda t_2} \Rightarrow \frac{1}{8} = e^{-\Lambda t_2} \Rightarrow 8 = e^{\Lambda t_2} \Rightarrow \ln 8 = \Lambda t_2 \\ &\Rightarrow 3 \ln 2 = \Lambda t_2\end{aligned}$$

Με διαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{1}{3} = \frac{t_1}{t_2} \Rightarrow t_2 = 3t_1$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η **γ**).

Δικαιολόγηση



Στην θέση ισορροπίας των δύο ελατηρίων, υπολογίζουμε την επιμήκυνσή τους Δl_1 και Δl_2 , για τις οποίες είναι $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l$:

Ισχύει για το σώμα 1:

$$\Sigma \vec{F}_1 = \vec{0} \Rightarrow m_1 g = k_1 \Delta l \quad (1)$$

Ομοίως για το σώμα 2:

$$\Sigma \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow m_2 g = k_2 \Delta l \quad (2)$$

Διαιρούμε τις δύο σχέσεις κατά μέλη και επειδή $m_1 > m_2$, θα είναι:

$$\frac{m_1 g}{m_2 g} = \frac{k_1 \Delta l}{k_2 \Delta l} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{k_1}{k_2} > 1 \quad (3)$$

Για τις ενέργειες ταλάντωσης των δύο ταλαντωτών, ισχύει:

$$E_1 = \frac{1}{2} k_1 \Delta l^2$$

και

$$E_2 = \frac{1}{2} k_2 \Delta l^2$$

με διαίρεση κατά μέλη:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2} k_1 \Delta l^2}{\frac{1}{2} k_2 \Delta l^2} = \frac{k_1}{k_2} > 1 \Rightarrow E_1 > E_2$$

Άρα η πρώτη πρόταση είναι λάθος.

Για τις συχνότητες ταλάντωσης θα είναι:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad \text{και} \quad f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}}{\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}} = \sqrt{\frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{m_2}{m_1}} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = 1 \Rightarrow f_1 = f_2$$

Άρα και η δεύτερη πρόταση είναι λάθος.

Για τις μέγιστες ταχύτητες των δύο ταλαντωτών που ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος A , ισχύει:

$$v_{\max_1} = \omega_1 \cdot A = 2\pi \cdot f_1 \cdot A$$

και

$$v_{\max_2} = \omega_2 \cdot A = 2\pi \cdot f_2 \cdot A$$

οπότε:

$$\frac{v_{\max_1}}{v_{\max_2}} = \frac{\omega_1 \cdot A}{\omega_2 \cdot A} = \frac{2\pi \cdot f_1 \cdot A}{2\pi \cdot f_2 \cdot A} = 1 \Rightarrow v_{\max_1} = v_{\max_2}$$

Άρα η πρόταση γ είναι σωστή.

B3. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Η διαφορά φάσης για δύο σημεία Α και Β, της ίδια χρονική στιγμή, δίνεται από την σχέση:

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda} \right) - 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda} \right) =$$

$$= 2\pi \frac{x_B - x_A}{\lambda} = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \quad (1)$$

όπου:

$$\lambda = \frac{v}{f} = 1,5 \text{ m} \quad (2)$$

αντικαθιστούμε στην (1):

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{0,75 \text{ m}}{1,5 \text{ m}} \Rightarrow \Delta\varphi = \pi \text{ rad}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η κρούση των δύο σωματιών είναι κεντρική ελαστική. Ο πυρήνας του πρώτιου έχει ένα πρωτόνιο άρα η μάζα του m_1 είναι ίση με τη μάζα του νετρονίου, $m_1 = m_n$. Τα σωματίδια ανταλλάσσουν ταχύτητες, δηλαδή:

$$v_1 = 4 \cdot 10^7 \text{ m/s} \quad \text{και} \quad v_n' = 0$$

Το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας του νετρονίου κατά την κρούση θα είναι:

$$\alpha_1 \% = \frac{\frac{1}{2} m_n v_n^2 - 0}{\frac{1}{2} m_n v_n^2} \cdot 100\% \Rightarrow \alpha_1 \% = 100\%$$

Γ2. Ο πυρήνας πρώτιου δέχεται από το μαγνητικό πεδίο δύναμη Lorentz που είναι κάθετη στην ταχύτητά του, δρα σαν κεντρομόλος και το αναγκάζει να εκτελέσει ομαλή κυκλική κίνηση με κέντρο Ο, ακτίνα R και περίοδο T. Ισχύει:

$$R = \frac{m_1 v_1}{Be} \Rightarrow R = 0,4175 \text{ m}$$

$$T = \frac{2\pi m_1}{Be} \Rightarrow T = 2,0875\pi \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Γ3. Το μέτρο της στροφορμής του πυρήνα πρώτιου ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο Ο της κυκλικής του τροχιάς και είναι κάθετος σε αυτήν ισούται με:

$$L = m_1 v_1 R \Rightarrow L = 2,7889 \cdot 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Γ4. Ο πυρήνας του τρίτιου έχει ένα πρωτόνιο και δύο νετρόνια άρα η μάζα του m_2 είναι τριπλάσια από τη μάζα του νετρονίου, $m_2 = 3m_n$. Η κεντρική ελαστική κρούση του νετρονίου γίνεται με ακίνητο πυρήνα τρίτιου. Το μέτρο v_n'' της ταχύτητας του νετρονίου μετά την κρούση θα είναι:

$$v_n'' = \frac{(m_n - m_2)v_n}{m_n + m_2} \Rightarrow v_n'' = \frac{-2m_n v_n}{4m_n} \Rightarrow v_n'' = -\frac{v_n}{2} \Rightarrow$$

$$v_n'' = -2 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

Το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας του νετρονίου κατά την κρούση θα είναι:

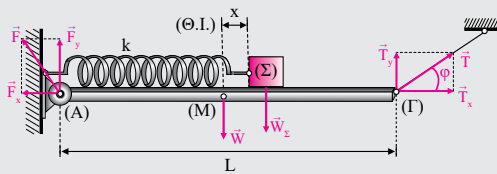
$$\alpha_2 \% = \frac{\frac{1}{2} m_n v_n^2 - \frac{1}{2} m_n \frac{v_n^2}{4}}{\frac{1}{2} m_n v_n^2} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\alpha_2 \% = \frac{3}{4} \cdot 100\% \Rightarrow \alpha_2 \% = 75\%$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα Σ βρίσκεται στη θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, συνεπώς βρίσκεται στην θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) της ταλάντωσης που θα εκτελέσει. Συνεπώς έχει τη μέγιστη ταχύτητα, δηλαδή, $v_0 = v_{\max} = A\omega \Rightarrow A = \frac{v_0}{\omega}$ (1) όπου ω , η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης που δίνεται από τη σχέση $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_s}} = 10 \text{ rad/s}$. Άρα από τη σχέση (1) βρίσκουμε το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα Σ, **$A = 1 \text{ m}$** .

Δ2.



Στη ράβδο ασκούνται οι δυνάμεις: το βάρος της $\vec{W}$ που ασκείται στο μέσο της (η ράβδος είναι ομογενής), η δύναμη $\vec{T}$ (τάση του νήματος), η δύναμη $\vec{F}$ (από την άρθρωση) και η δύναμη που ασκεί το σώμα Σ στη ράβδο που είναι ίση με το βάρος του $\vec{W}_\Sigma$.

Έστω ότι το σώμα Σ βρίσκεται στη θέση όπου η απομάκρυνση της ταλάντωσής του είναι x (θετική φορά επιλέγεται η φορά προς τα δεξιά). Για να ισορροπεί η ράβδος πρέπει:

$$\begin{aligned} \Sigma \tau_{(A)} = 0 &\Rightarrow \tau_F + \tau_W + \tau_{W_\Sigma} + \tau_T = 0 \Rightarrow \\ 0 - W \cdot \frac{L}{2} - W_\Sigma \cdot \left(\frac{L}{2} + x\right) + T_y \cdot L &= 0 \Rightarrow \\ -10(2+x) - 80 + 4T_{\eta\mu\phi} &= 0 \Rightarrow \\ T &= 50 + 5x \text{ (S.I.)} \quad (2) \end{aligned}$$

όπου $-1 \leq x \leq +1$.

Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του μέτρου της τάσης του νήματος εξαιτίας της ταλάντωσης του σώματος Σ προκύπτει από τις ακραίες θέσεις που θα βρεθεί το σώμα Σ ($x = +A$ και $x = -A$ αντίστοιχα). Συνεπώς:

$$T_{\max} = 55 \text{ N} \quad \text{και} \quad T_{\min} = 45 \text{ N}$$

Δ3. Η σχέση της απομάκρυνσης με τον χρόνο στην απλή αρμονική ταλάντωση του σώματος Σ είναι της μορφής: $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα Σ ξεκινά την ταλάντωση από την θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τα δεξιά (θεωρούμε θετική φορά τη φορά προς τα δεξιά), οπότε η αρχική του φάση είναι $\phi_0 = 0$. Άρα η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$x = \eta\mu 10t \quad (\text{S.I.}) \quad (3)$$

Για τη χρονική στιγμή $t = \frac{3\pi}{10} \text{ s}$ βρίσκουμε $x = 0$, οπότε από τη σχέση (2) προκύπτει: $T = 50 \text{ N}$. Εφόσον ισορροπεί η ράβδος πρέπει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow \Sigma F_x = 0 \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0.$$

Ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = T_x \Rightarrow F_x = T\sigma\upsilon\eta\phi \Rightarrow F_x = 25\sqrt{3} \text{ N}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow F_y + T_y = W + W_\Sigma \Rightarrow F_y = 50 - T\eta\mu\phi \\ &\Rightarrow F_y = 25 \text{ N} \end{aligned}$$

Επομένως το μέτρο της δύναμης F , που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση είναι:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = 50 \text{ N}$$

Δ4. Τη χρονική στιγμή που κόβεται το νήμα το σώμα Σ βρίσκεται σε απομάκρυνση x_1 , που υπολογίζεται από τη σχέση (2), δηλαδή:

$$T_{\theta\rho} = 50 + 5x_1 \Rightarrow x_1 = 0,5 \text{ m}$$

Εφαρμόζοντας αρχή διατήρησης ενέργειας στην ταλάντωση (ΑΔΕΤ) έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m_s v_1^2 + \frac{1}{2} kx_1^2 \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{k(A^2 - x_1^2)}{m_s}} \Rightarrow v_1 = 5\sqrt{3} \text{ m/s}$$

39ο Διαγώνισμα (Δ39)

ΘΕΜΑ Α

Α1. δ), Α2. γ), Α3. γ), Α4. δ)
Α5. α) Λ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η **β**).

Δικαιολόγηση

Μόλις κόβουμε το νήμα ξεκινά το σώμα m_1 να κινείται. Η κίνηση αυτή είναι Α.Α.Τ. διότι: Στη θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) είναι:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{ελ} + m_1 \vec{g} = \vec{0} \Rightarrow k \cdot \Delta l_1 = m_1 g$$

Στην τυχαία θέση που απέχει απόσταση x από την Θ.Ι. και θεωρώντας θετική φορά προς τα κάτω, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = m_1 \vec{g} + \vec{F}_{ελ} \Rightarrow \Sigma F = m_1 g - k(\Delta l_1 + x) = -kx$$

Οπότε δείξαμε ότι είναι της μορφής $\Sigma F = -Dx$, με $D = k$ και $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$.

Επειδή ξεκινά από την ακινησία, συμπεραίνουμε ότι βρίσκεται σε θέση πλάτους της ταλάντωσης και άρα η ταχύτητά του μηδενίζεται για πρώτη φορά στη θέση μέγιστης αρνητικής απομάκρυνσης, μετά από χρόνο:

$$t = \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2} \sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow t = \pi \sqrt{\frac{m_1}{k}}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Κατά την ελαστική μετωπική κρούση ενός κινούμενου σώματος μάζας m_1 και ταχύτητας v_1 με ένα ακίνητο σώμα μάζας m_2 , το μέτρο της ταχύτητας του αρχικά κινούμενου σώματος μετά την κρούση δίνεται από την σχέση:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1)$$

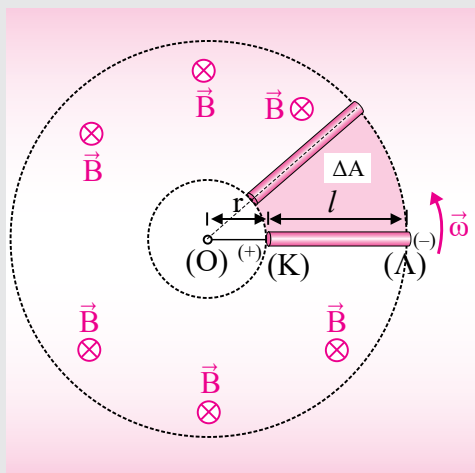
Αφού η σφαίρα μάζας m_1 ανακρούεται με ταχύτητα μέτρου $\frac{v_1}{5}$ ισχύει $v_1' = -\frac{v_1}{5}$. Αντικαθιστώντας στην σχέση (1) έχουμε:

$$-\frac{v_1}{5} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow m_1 + m_2 = -5(m_1 - m_2) \Rightarrow m_1 + m_2 = -5m_1 + 5m_2 \Rightarrow 6m_1 = 4m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{3}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Κατά την περιστροφή της ράβδου ΟΚΛ μέσα στο μαγνητικό πεδίο αναπτύσσεται επαγωγική τάση μόνο στο μεταλλικό τμήμα ΚΛ, στα ελεύθερα ηλεκτρόνια του οποίου ασκείται δύναμη Lorentz. Στο άκρο Λ συσσωρεύεται αρνητικό φορτίο και στο άκρο Κ θετικό, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σε χρονικό διάστημα Δt το τμήμα ΚΛ έχει σαρώσει το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν ΔA .

Η επαγωγική τάση που αναπτύσσεται στον αγωγό υπολογίζεται από τον νόμο του Faraday.

$$E_{επ} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \Rightarrow E_{επ} = \frac{B \cdot \Delta A}{\Delta t} \quad (1)$$

Σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου T το εμβαδόν που έχει σαρώσει ο αγωγός ΚΛ είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των κυκλικών δίσκων που έχουν κοινό κέντρο Ο και ακτίνες $(l+r)$ και r αντίστοιχα. Επομένως:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi(l+r)^2 - \pi r^2}{T} \Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi(l+r-r)(l+r+r)}{\frac{2\pi}{\omega}} \Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{l(1+2r)\omega}{2} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2) στη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$E_{επ} = \frac{Bl(1+2r)\omega}{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει ότι:

$$E_{απορ} \leq \frac{21}{100} E_{προσπ} \Rightarrow E_{απορ} \leq \frac{21}{100} \cdot 200 \text{ J} \Rightarrow E_{απορ} \leq 42 \text{ J}$$

Επομένως η μέγιστη απορροφούμενη ενέργεια για να μην πάθουμε έγκαιμα είναι η: $E_{απορ}(\max) = 42 \text{ J}$.

Η ακτινοβολία (φως) αποτελείται από μικρά πακέτα ενέργειας που ονομάζονται κβάντα φωτός ή φωτόνια. Η ενέργεια του κάθε φωτονίου της ακτινοβολίας είναι:

$$E = h \cdot f$$

Όπου f η συχνότητα της ακτινοβολίας και h η σταθερά του Planck.

Επίσης:

$$c = \lambda \cdot f$$

Προκύπτει για την ενέργεια του κάθε φωτονίου:

$$E = h \cdot \frac{c}{\lambda} \Rightarrow E = 3 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

Για να υπολογίσουμε τον αριθμό των φωτονίων γράφουμε:

$$E_{\text{απορ}} (\text{max}) = n \cdot E \Rightarrow n = 14 \cdot 10^{17} \text{ φωτόνια}$$

Γ2.

$$P = \frac{E_{\text{απορ}}}{\Delta t_1} = \frac{n \cdot E}{\Delta t_1} \Rightarrow P = 3 \cdot 10^{-2} \text{ J/s}$$

Δεδομένου ότι η ισχύς παραμένει η ίδια, για το δεύτερο χρονικό διάστημα έχουμε:

$$P = \frac{E'_{\text{απορ}}}{\Delta t_2} \Rightarrow E'_{\text{απορ}} = 3,6 \text{ J}$$

Γ3.

$$P = \frac{E}{t} \Rightarrow t = 1400 \text{ s}$$

Γ4.

Τα 4 J προκαλούν αύξηση της θερμοκρασίας κατά 2°C

Τα 42 J θα προκαλέσουν αύξηση της θερμοκρασίας κατά: $\Delta\theta = 2^\circ\text{C} \cdot \frac{42(\text{J})}{4(\text{J})} \Rightarrow \Delta\theta = 21^\circ\text{C}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Τα ελατήρια συμπιέζονται ώστε το σύστημα να φτάσει σε μια νέα θέση ισορροπίας, όπου το βάρος του ατόμου θα εξισορροπείται από την αύξηση των 4 δυνάμεων ελατηρίου (μία από κάθε ελατήριο):

$$mg = 4k \cdot \Delta l \Rightarrow k = 10800 \text{ N/m}$$

Δ2. Όταν το σύστημα ισορροπεί, το βάρος του συστήματος θα είναι ίσο με το άθροισμα των δυνάμεων από τα 4 ελατήρια, τα οποία σε σχέση με το φυσικό τους μήκος θα έχουν συσπειρωθεί κατά Δl :

$$Mg = 4k \cdot \Delta l$$

Εφόσον τα ελατήρια συσπειρωθούν επιπλέον κατά x η συνισταμένη δύναμη θα είναι προς

τα επάνω και θεωρώντας θετική φορά προς τα κάτω:

$$\Sigma F = -4k(\Delta l + x) + m = -4k \cdot \Delta l - 4kx + mg = -4kx$$

Συνεπώς, η σταθερά επαναφοράς θα είναι τετραπλάσια από τη σταθερά του καθενός ελατηρίου:

$$D = 4k \Rightarrow D = 43200 \text{ N/m}$$

Δ3. Το σύστημα αυτοκινήτου-ατόμου, εκτελεί ταλάντωση με την ιδιοσυχνότητά του:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m+M}} \Rightarrow f = \frac{3}{\pi} \text{ Hz}$$

Δ4. Με βάση την εκφώνηση, πραγματοποιείται ταλάντωση, ενώ στην απεριοδική κίνηση δεν πραγματοποιείται ταλάντωση αλλά το σύστημα επιστρέφει στη θέση ισορροπίας του. Η κίνηση γίνεται απεριοδική για μεγάλες τιμές της σταθεράς απόσβεσης. Αυτό σημαίνει πως, εφόσον στα παραπάνω ερωτήματα το σύστημα ταλαντώνεται, η σταθερά απόσβεσης των ταλαντώσεων έχει τιμή **μικρότερη** από $b = 14400 \text{ kg/s}$. Καθώς τα ελατήρια παλιώνουν, η τιμή του b θα μικρύνει περισσότερο, με αποτέλεσμα η απόσβεση να απαιτεί μεγαλύτερο χρονικό διάστημα και η κίνηση του οχήματος σε δρόμο με λακκούβες να γίνεται ολοένα και πιο δυσάρεστη για τους επιβάτες.

40ό Διαγώνισμα (Δ40)

ΘΕΜΑ Α

A1. δ), A2. γ), A3. γ), A4. β)
A5. α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **γ**).

Δικαιολόγηση

Το μέγιστο ρεύμα που μπορεί να διαρρεύσει το κύκλωμά μας αντιστοιχεί στην περίπτωση κατά την οποία κάθε φωτόνιο εξάγει ένα ηλεκτρόνιο που οδηγείται από την ανοδική τάση στην άνοδο. Για την ισχύ της δέσμης ισχύει:

$$P = \frac{W_{\text{ολ}}}{t} = \frac{N \cdot h \cdot f}{t} = \frac{N \cdot h \cdot \frac{c}{\lambda}}{t} \Rightarrow P = \frac{N \cdot h \cdot c}{\lambda \cdot t} \quad (1)$$

$$I_{\text{κόρου}} = \frac{Q_{\text{ολ}}}{t} = \frac{Ne}{t} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2):

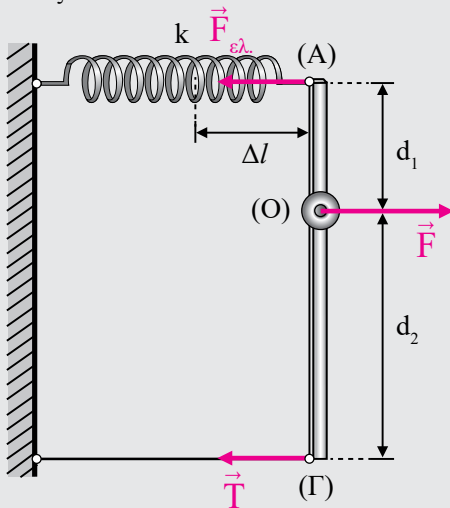
$$\frac{P}{I_{\text{κόρου}}} = \frac{\frac{N \cdot h \cdot c}{\lambda \cdot t}}{\frac{N \cdot e}{t}} \Rightarrow \frac{P}{I_{\text{κόρου}}} = \frac{h \cdot c}{\lambda \cdot e} \Rightarrow \frac{P}{I_{\text{κόρου}}} = \frac{P \cdot \lambda \cdot e}{h \cdot c}$$

από την οποία προκύπτει ότι η ένταση κόρου είναι ανάλογη της μεταφερόμενης ισχύος και του μήκους κύματος της ακτινοβολίας.

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας ροπών των δυνάμεων που δέχεται η ράβδος ως προς τον άξονα O.



Στη συνθήκη αυτή δεν θα αναφέρουμε τις κατακόρυφες δυνάμεις του βάρους της ράβδου και της κατακόρυφης δύναμης στήριξης από το δάπεδο, οι οποίες εξουδετερώνονται μεταξύ τους, αλλά και ως παράλληλες με τον άξονα, δεν δημιουργούν ροπές. Δηλαδή:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow k \cdot \Delta l \cdot d_1 = T \cdot d_2 \Rightarrow T = k \cdot \frac{\Delta l}{2}$$

Για τις τρεις οριζόντιες και παράλληλες δυνάμεις που δέχεται η ράβδος, εφαρμόζουμε και συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = k \cdot \Delta l + T = k \cdot \Delta l + \frac{k \cdot \Delta l}{2} \Rightarrow$$

$$F = \frac{3}{2} \cdot k \cdot \Delta l$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι η περίοδος ταλάντωσης είναι $T = 6$ s, άρα η συχνότητα του αρμονικού κύματος είναι $f = \frac{1}{6}$ Hz. Το μήκος κύματος δίνεται $\lambda = 18$ m. Υπολογίζουμε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος στο ελαστικό μέσο:

$$v = \lambda \cdot f = 3 \text{ m/s}$$

Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι το υλικό σημείο A, άρχισε να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_A = 4$ s, και αυτός είναι ο χρόνος που μεσολαβεί από τη στιγμή που άρχισε να ταλαντώνεται το άκρο του μέσου, μέχρι το κύμα να φτάσει στο σημείο A.

Άρα υπολογίζουμε $x_A = v \cdot t_A \Rightarrow x_A = 12$ m

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για να αρχίσει η ταλάντωση του σημείου Σ θα πρέπει να φτάσει σε αυτό η ενέργεια που μεταφέρει το κύμα. Επειδή το κύμα διαδίδεται σε ένα ελαστικό μέσο με σταθερή ταχύτητα, το χρονικό διάστημα που θα χρειαστεί για να διανύσει απόσταση 2,3m είναι:

$$\Delta t_1 = \frac{x_{\Sigma}}{v_1} \Rightarrow \Delta t_1 = 4,6 \text{ s}$$

Γ2. Η εξίσωση ταλάντωσης της πηγής των αρμονικών κυμάτων $y = 10\eta\mu 2\pi t$ (t σε s και y σε cm) αντιστοιχεί στην μορφή $y = A\eta\mu\omega t$. Συνεπώς η κυκλική συχνότητα ταλάντωσης των μορίων του μέσου είναι $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$ και το πλάτος ταλάντωσης είναι $A = 10$ cm. Το κύμα έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1$ s και μήκος κύματος $\lambda_1 = v \cdot T = 0,5$ m. Το χρονικό διάστημα που χρειάζεται για να φτάσει το σημείο Σ για πρώτη φορά σε ακραία θέση ταλάντωσης είναι το $\frac{1}{4}$ της περιόδου, οπότε μέχρι εκείνη την στιγμή η πηγή θα έχει ταλαντωθεί για χρονικό διάστημα $t_2 = \Delta t_1 + \frac{T}{4} = 4,85$ s. Εκείνη τη στιγμή, η φάση της πηγής θα είναι:

$$\varphi = 2\pi t_2 \Rightarrow \varphi = 9,7\pi \text{ rad}$$

Γ3. Στο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 4,6 \text{ s}$ το σημείο Σ είναι ακίνητο, οπότε $y_\Sigma = 0$.

Για $t \geq 4,6 \text{ s}$ η απομάκρυνση του σημείου Σ από την θέση ισορροπίας δίνεται από την σχέση:

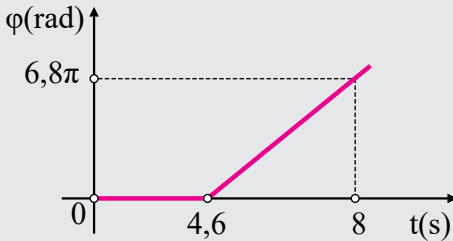
$$y_\Sigma = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Sigma}{\lambda} \right) = 0,1 \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{1} - \frac{2,3}{0,5} \right) \Rightarrow$$

$$y_\Sigma = 0,1 \eta \mu 2\pi (t - 4,6) \quad (\text{S.I.})$$

Γ4. Το σημείο Σ στο χρονικό διάστημα $t \leq 4,6 \text{ s}$ είναι ακίνητο, επομένως δεν έχει φάση ταλάντωσης. Για $t \geq 4,6 \text{ s}$ το σημείο Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η φάση του δίνεται από την σχέση:

$$\varphi_\Sigma = 2\pi(t - 4,6) \quad (\text{S.I.})$$

Η φάση μεταβάλλεται γραμμικά με τον χρόνο και αν θέσουμε $t = 8 \text{ s}$ βρίσκουμε ότι $\varphi_\Sigma = 6,8\pi \text{ rad}$. Η γραφική παράσταση απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



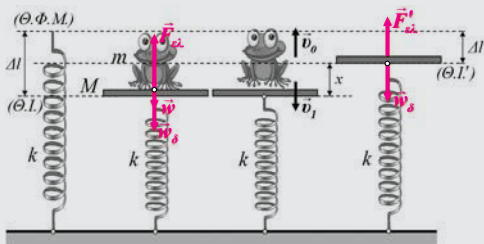
ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής στο σύστημα δίσκου-βάτραχος:

$$\vec{p}_{\text{συστ}}^{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{συστ}}^{\text{μετα}} \Rightarrow 0 = m \cdot v_0 - M \cdot v_1 \Rightarrow$$

$$M \cdot v_1 = m \cdot v_0 \Rightarrow$$

$$v_1 = \frac{m}{M} \cdot v_0 \Rightarrow v_1 = 0,4 \text{ m/s}$$



Δ2. Στην αρχική θέση ισορροπίας, το ελατήριο εμφανίζει συσπίρωση Δl , σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Δημιουργούμε ένα ελεύθερο διάγραμμα δυνάμεων και εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow (M + m) \cdot g - k \cdot \Delta l = 0 \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l = (M + m) \cdot g \Rightarrow \Delta l = 0,06 \text{ m}$$

Αφού εκτινάσσεται ο βάτραχος, απομένει στο πάνω άκρο του ελατηρίου μόνο ο δίσκος, με αποτέλεσμα να αλλάζει η θέση ισορροπίας του συστήματος (Θ.Ι'). Στη νέα θέση ισορροπίας το ελατήριο έχει συσπίρωση $\Delta l'$ και η θέση αυτή είναι πάνω από τη θέση ισορροπίας του συστήματος δίσκος-βάτραχος κατά x . Δημιουργούμε ένα ελεύθερο διάγραμμα δυνάμεων και εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow M \cdot g - k \cdot \Delta l' = 0 \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l' = M \cdot g \Rightarrow \Delta l' = 0,05 \text{ m}$$

$$\text{Οπότε: } x = \Delta l - \Delta l' = 0,01 \text{ m}$$

Η θέση του δίσκου ακριβώς μετά την εκτίναξη του βάρου είναι μια τυχαία θέση της απλής αρμονικής ταλάντωσης του δίσκου και μπορούμε να εφαρμόσουμε τη διατήρηση ενέργειας ταλάντωσης και να υπολογίσουμε το πλάτος της:

$$U_{\text{ταλ}}^{T,\theta} + K_{\text{ταλ}}^{T,\theta} = U_{\text{ταλ}}^{\text{max}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{x^2 + \frac{M}{k} \cdot v_1^2} \Rightarrow A = 0,03 \text{ m}$$

Δ3. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης του δίσκου είναι:

$$U_{\text{ταλ}}^{\text{max}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \Rightarrow U_{\text{ταλ}}^{\text{max}} = 0,09 \text{ J}$$

Δ4. Η μέγιστη παραμόρφωση ελατηρίου εμφανίζεται στην κάτω ακραία θέση ταλάντωσης και είναι:

$$\Delta l_{\text{max}} = \Delta l' + A = 0,08 \text{ m}$$

Έτσι η μέγιστη δυναμική ενέργεια παραμορφωμένου ελατηρίου στο σύστημα είναι:

$$U_{\text{ελ}}^{\text{max}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta l_{\text{max}}^2 \Rightarrow U_{\text{ελ}}^{\text{max}} = 0,64 \text{ J}$$

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

- Σελ. 82 **Πρόβλημα 3** «...και πλαστικά με σώμα Σ_2 , μάζας ...».
- Σελ. 285 3.87 **δ** : «...ίση με 15,75 J;»
- Σελ. 340 4.98: «...διάστημα $s = 0,04 \text{ m}$...»
- Σελ. 477 **ΔΙΑΓ-3, Δ2**: «...τη μέγιστη τιμή της μάζας m ...»
- Σελ. 482 **ΔΙΑΓ-4, B3**: «...από το άκρο της (A) απόσταση $\frac{L}{3}$...»
- Σελ. 556 **ΔΙΑΓ-7, A4: δ** «...είναι μικρότερο σε σχέση...»
- Σελ. 571 **ΔΙΑΓ-19, B1: α), β), γ)** $h \rightarrow \hbar$
- Σελ. 582 **ΔΙΑΓ-21, A1**: «...ίσες μάζες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά με...»
- Σελ. 610 **ΔΙΑΓ-24, Δ3**: $\omega = 100\sqrt{2} \text{ rad/s}$
- Σελ. 778 **Πρόβλημα 30: δ** $x = 0,2 \text{ }\mu\text{m}(t + \frac{\pi}{2})$ (S.I.)
- Σελ. 780 **Πρόβλημα 61: β** $\frac{F_{1,2}}{l} = 75 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}$
- Σελ. 781 **Πρόβλημα 84: β** $F_L = 4 \text{ N}$
- Σελ. 782 **Πρόβλημα 89: α)** $\Delta t = 0,02 \text{ s}$,
 β) $R = 0,04 \text{ }\Omega$, **γ)** $v = 0,08 \text{ }\mu\text{m50}\pi\text{t}$ (S.I.),
 δ) $t = 0,025 \text{ s}$
- Σελ. 788 3.78: **γ)** $\Delta\varphi = \frac{34\pi}{3} \text{ rad}$
- Σελ. 789 3.80: **γ)** $\Delta t' = \frac{\pi}{15} \text{ s}$ & 3.88:
 γ) $A_{\max} = 0,4 \text{ m}$
- Σελ. 792 4.85: **β)** $\alpha_\Sigma = -20 \text{ }\mu\text{m2}\pi(t - 1,25)$ (S.I.)
- Σελ. 801 **ΔΙΑΓ-3, Δ2**: $m_{\max} = 2 \text{ kg}$
- Σελ. 804 **ΔΙΑΓ-12, Δ2**: $\varphi = 1,875 \text{ eV}$
Δ3: $K_{\max} = 10^{-19} \text{ J}$ &
ΔΙΑΓ-13, Δ2: $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
- Σελ. 809 **ΔΙΑΓ-27, Γ2**: $y = 0,5 \text{ }\mu\text{m2}\pi(t - \frac{x}{4})$ (S.I.) & **ΔΙΑΓ-27, Δ1**: $V_0 = 4,14 \cdot 10^{-15} \text{ f-4,35}$ (S.I.)
- Σελ. 810 **ΔΙΑΓ- 29, Γ4**: $x = 0,3\sqrt{7,5} \text{ m}$